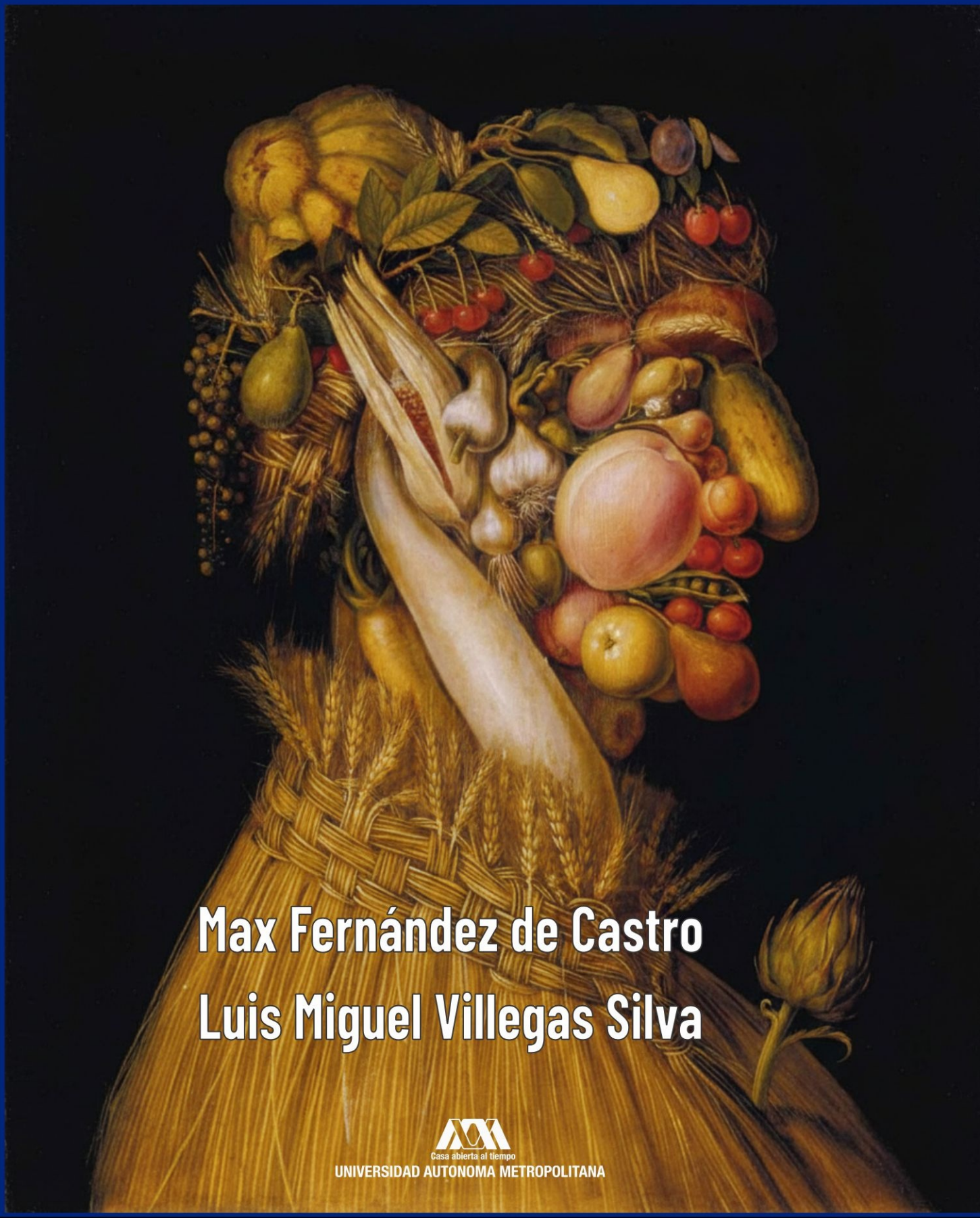
Lógica Matemática de Primer Orden Clásica y no Clásica

Volumen II



Max Fernández de Castro
Luis Miguel Villegas Silva

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Lógica matemática de primer orden clásica y no clásica

Volumen II

Biblioteca de signos
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

Casa abierta al tiempo

Lógica matemática de primer orden clásica y no clásica

Volumen II

Max Fernández de Castro
Luis Miguel Villegas Silva

Casa abierta al tiempo

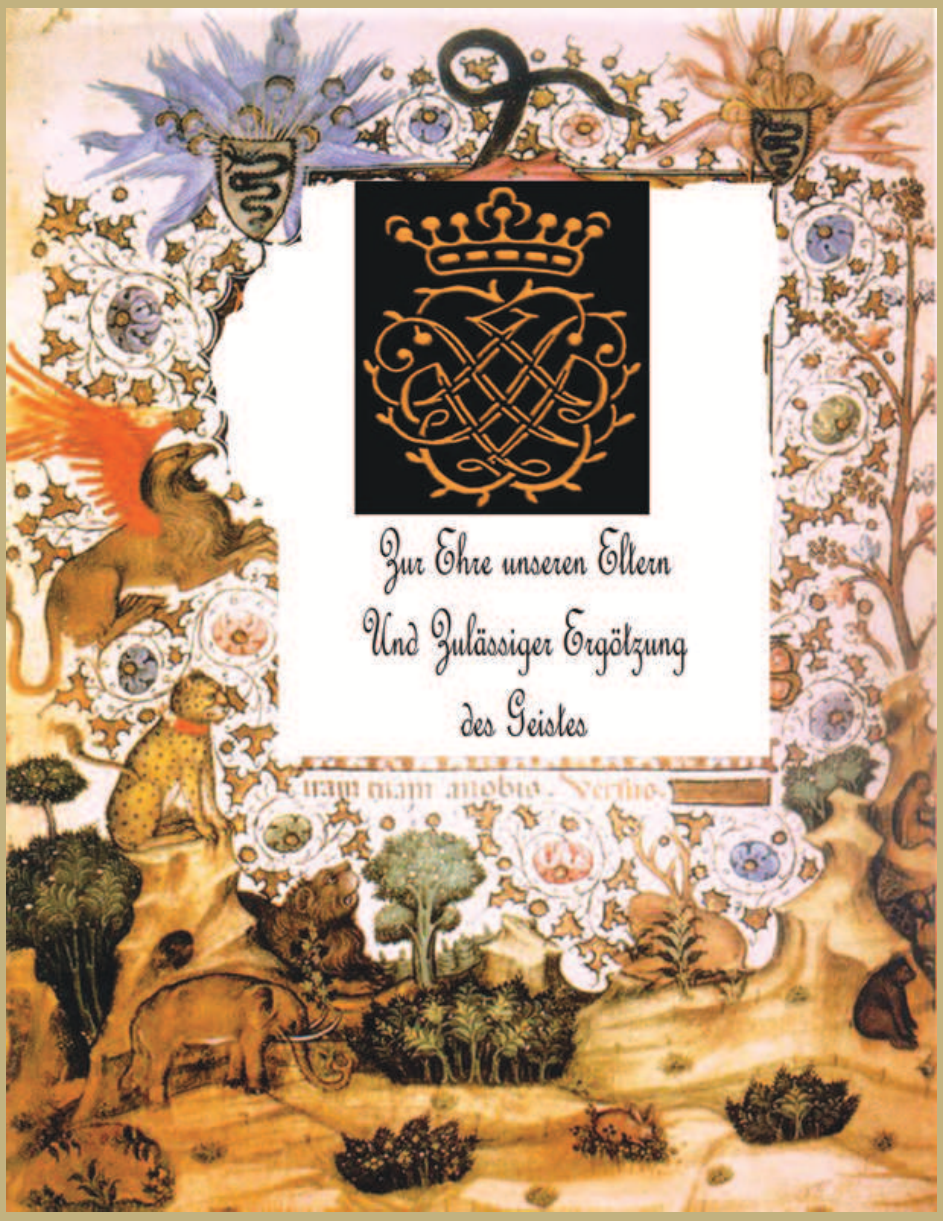
Imagen de portada: Pintura que representa el Verano del artista Giuseppe Arcimboldo
Formación: Salvador E. Vazquez Moctezuma

Unidad Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, 09340, México D.F.
Teléfono; 5804-4600 ext. 2030
libros.filosofiauami@gmail.com

Primera edición, 2026

ISBN de la colección: 978-607-28-3673-0
ISBN de la obra (Vol. II): 978-607-28-3675-4

Este libro ha sido evaluado mediante dictamen anónimo por al menos dos especialistas en la materia.


Zur Ehre unseren Eltern
Und Zulässiger Ergötzung
des Geistes

A Vera y a María

A Jesús, Bertha, Sergio, Víctor,
Emilio, Nicolás y Enriqueta

Prefacio

Reiteramos aquí el motivo que inspira esta obra y que fue expresado en el prefacio del primer volumen. La lógica ha tenido un crecimiento impredecible y gigantesco en las últimas décadas, muy fecundo en su entrecruzamiento con disciplinas afines a las que ha sido útil en sus aplicaciones y de las que ha recibido a su vez valiosas sugerencias para su desarrollo. Aunque la lógica es cada vez más una disciplina matemática, nunca ha perdido del todo sus motivaciones filosóficas. Se propone, por un lado, proveer lenguajes que permiten una expresión clara y precisa del pensamiento y, por otro, codi-

fica en ellos nuestras formas de razonamiento en campos particulares para determinar cuáles son válidas y cuáles no. Junto con estos fines generales cumple otros no menos importantes, por ejemplo, la lógica dio una idea precisa de lo que se entiende por un algoritmo. Eso basta para indicar por qué ha sido de extrema utilidad tanto en el desarrollo de la filosofía (en general y, en particular, de la filosofía de la mente y del lenguaje) como en el de la lingüística. Al interior de la matemática, en interacción con la teoría de conjuntos, ha generado métodos para resolución de problemas en álgebra, topología, gráficas y análisis, entre otras ramas. Esto solo por mencionar algunas formas en que la lógica ha contribuido a la expansión del conocimiento. Sin embargo, en nuestro país son muy escasas las posibilidades que un alumno de educación superior tiene de apreciar el rigor, la fecundidad y la sutileza que de la lógica y de profundizar en sus desarrollos más recientes. Pocos son los cursos que se ofrecen en las licenciaturas de matemáticas, filosofía, lingüística o computación. Con ello, el estudiante de nuestras diversas unversidades queda fatalmente imposibilitado para aportar al desarrollo en muchos campos de conocimiento tanto teóricos como prácticos. Estos volúmenes buscan subsanar en algo esa carencia. Pueden servir para acompañar cursos en las instituciones de educación superior o bien para el estudiante autodidacta que desee explorar por su cuenta los temas aquí tratados, sea sistemáticamente o ahondando en alguno de su particular interés. Pero la obra trasciende esos límites y se propone abrir nuevas direcciones de estudio, por ejemplo, las lógicas abstractas, en general las lógicas no clásicas.

En el primer volumen hemos introducido algunos de los tópicos centrales de la lógica de primer orden clásica y modal. Hemos expuesto en mucho detalle no solo los conceptos básicos de la semántica de los lenguajes de primer orden, sino la teoría de conjuntos que les sirve de base. Además, dedicamos un capítulo a la teoría axiomática de conjuntos. Finalmente tratamos la lógica modal proposicional y de primer orden. Con ello dimos un primer ejemplo de extensión de la lógica clásica que es especialmente fecunda en debates filosóficos y en el tratamiento de autómatas. Este segundo volumen se concentra más en los métodos de prueba formal, en algunas extensiones de la lógica de primer orden e introduce un par de lógicas no convencionales. Nos gustría resaltar esta figura del segundo volumen: aparecen diversas lógicas no clásicas, expuestas en forma amigable, con el ánimo de interesar al lector en su estudio y varias lógicas abstractas, presentadas primero en forma particular, para finalmente presentar un apartado enetramente dedicado a las lógicas abstractas. Así, los dos capítulos finales de este volumen sintetizan en buena medida el objetivo de esta obra. Dada la extensión de los volúmenes, nos fue imposible incorporar material adicional u otras lógicas, pero esperamos que lo expuesto es suficiente para motivar al lector. De hecho, la exposición en ambos volumenes está, en buena medida, diseãda para desafiar al lector realmente interesado a buscar nuevas lógicas, desarrollar técnicas inovadoras y detectar líneas ineditas de investigación.

El primer capítulo se dedica a estudiar métodos de prueba formal poco convencionales o, digamos, menos tradicionales. Nos referimos a tablas y árboles semánticos, resolución, el método de Herbrand (junto con los universos asociados), precedido por un tratamiento de las formas normales. Se confirma también la completud y correctud del

método de tablas semánticas. Aparece un tratamiento detallado de algunas variantes de resolución. Los sistemas axiomáticos de prueba formal de Hilbert y de deducción natural, requieren un tratamiento particular que ocurre en el siguiente capítulo. La naturaleza misma de tales sistemas los hacen poco o nada intuitivos y cuesta mucho trabajo su cabal comprensión por el lector. Un lugar aparte ocupa la deducción natural que como su nombre lo indica, está más apegado a la práctica cotidiana, pero que sólo adquiere sentido, por su formulación axiomática, cuando se sabe como trabajar con tales sistemas. Hemos sido generosos en cuanto ejemplos y aplicaciones de deducción natural. El siguiente capítulo trata de los cuatro teoremas fundamentales de la lógica de primer orden: los teoremas de completud, correctud, compacidad y Löwenheim-Skolem, y se muestra su relevancia. En cuanto a este apartado vale la pena abundar pues hemos trabajado varias cuestiones notables. Los dos últimos teoremas mencionados se derivan normalmente de los dos primeros, pero en ocasiones es importante no depender de un método de prueba formal para demostrarlos. Aquí presentamos diversas demostraciones: desde su deriviación a partir de correctud y completud, pasando por el método de Henkin, hasta el de propiedades de consistencia; la amalgamación de estos proporciona una herramienta indispensable en el tratamiento de las lógicas infinitarias. Pero no sólo esto constituye el núcleo del capítulo, sino las numerosas y variadas aplicaciones del teorema de compacidad, muchas de ellas inesperadas y de gran interés. Muchas de las aplicaciones del teorema de compacidad ofrecen una perspectiva clara de la imposibilidad de expresar ciertas situaciones en presencia de dicho teorema. Incluimos un tratamiento de los modelos no estándar de la aritmética, que en cierta medida motiva el siguiente capítulo.

En el cuarto capítulo tratamos extensamente la aritmética de Peano y algunas de sus variantes. Examinamos diversas axiomatizaciones, sus relaciones y consecuencias. Presentamos un teorema de incompletud en términos de teoría de juegos, y al final agregamos una estructura particular para trabajar la aritmética; nos referimos a los conjuntos hereditariamente finitos. Se presentan allí también algunas extensiones de la lógica clásica, como la lógica de segundo orden, las lógicas infinitarias y con cuantificadores generalizados, además de un breve esbozo del sistema FDE que sirve de base a algunas familias de lógica relevante. Esperamos que esta presentación sirva de motivación para el lector para incorporarse al estudio de la lógica moderna, y deje atrás la imagen tétrica, aburrida y gris que se tiene usualmente de esta disciplina, que no se vea como la llegada al Mictlán, sino a Talocan, Xochitalpan e Ilhuicatl.

El siguiente capítulo introduce al lector en una lógica que representa otra desviación de la lógica clásica, a saber, la lógica intuicionista. Se inicia el apartado exponiendo las ideas centrales que motivan esta lógica, así como la semántica que de ellas resulta. Después se presenta el método de los árboles para la determinación de la validez o invalidez de fórmulas desde el punto de vista intuicionista. La siguiente sección expone un método de deducción natural para esta lógica, así como algunos resultados que la vinculan con su contraparte clásica. Por último, se prueba la completud y corrección del método de los árboles antes expuesto.

Finalmente, el último capítulo condensa en buena medida nuestros objetivos al escribir esta obra: tratamos las lógicas abstractas, desde su definición, ejemplos, aplicaciones y resultados en la frontera del conocimiento, hasta la demostración de un hecho que menionaremos repetidamente, a saber, el Teorema de Lindström. Éste establece que cualquier lógica regular al menos tan expresiva como la lógica de primer orden y que satisfaga los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad, coincide con la lógica de primer orden. Por supuesto, este tema es tan vasto que sería imposible estudiarlo a profundidad en un capítulo, o incluse en un volumen.

Los capítulos contienen ejercicios de diferentes grados de complejidad; la cantidad de los mismos es considerable y es parte esencial de la cabal comprensión de la lógica matemática. En algunos casos se ofrecen sugerencias para su resolución. Creemos que quien haya estudiado los capítulos dos y tres del primer volumen o que conozca lo esencial de los temas allí tratados (es decir los lenguajes de primer orden y su semántica) y tenga algún conocimiento elemental de la teoría de conjuntos podrá leer con facilidad este segundo volumen. Asimismo, no es necesario que el lector conozca todos los métodos de prueba que se presentan en los dos primeros capítulos. Si conoce uno de ellos podrá entender los teoremas fundamentales de que trata el capítulo cuatro.

Vale la pena mencionar que en este segundo volumen el énfasis es mayor en cuanto a la aplicación de los métodos descritos. Hemos tratado de establecer aplicaciones «prácticas», esto es, cómo emplear las diversas técnicas que se hayan introducido en situaciones que se presentan cotidianamente al examinar teorías concretas. Con esto queremos decir que nuestra intención es reseñar con detalle como proceder al interactuar con situaciones particulares, por ejemplo, en teoría de modelos.

Al igual que el volumen anterior, éste está diseñado para leerse en tres niveles de dificultad creciente. Algunos temas son más adecuados para lectores intermedios; las secciones de esta categoría se inician con el símbolo  . Además, hay temas que requieren una madurez aún mayor por parte del lector o apelan a resultados más sofisticados; éstos se agrupan en apartados que se inician con  . El fin de estas secciones se marca con los símbolos  y  , respectivamente.

Sería de enorme ayuda para los autores conocer las opiniones de colegas, lectores, estudiantes, etc. acerca de este libro, por lo que mucho agradeceríamos nos enviaran sus comentarios a la dirección de correo electrónico:

tecolote.libros@gmail.com

In quexquichcauh maniz cemanahuatl, ayc pollihuiz itenyo yn itauhca in Mexico-Tenochtitlan

En tanto permanezca el mundo, no acabará la fama y la gloria de México-Tenochtitlan

Ixtapalapa, CDMX, Septiembre 2025.

Preámbulo

Auh ino ipan quizato inoquittaque cenca miectlamantli in tlanahuizolli in oncanca in acaihtic caye ihca ipampa in nahuatil yuhquimilhui in Huitzillopochtli in teomamaque in itahuan in Quauhtlequetzqui anozo in Quauhcohuatl in Axollohua tlamacazqui ca quin nahuati ca yuhquimilhui in ixquich in oncan inonoc in tollihtic in acaihtic in oncan ihcaz, in oncan tlapiez in yehuatl in Huitzilopochtli ca itencopa quimilhui ca yuhquin nahuati in Mexica, auh niman oquittaque iztac in ahuehuetl, iztac in huexotl, in oncan ihcac, ihuan iztac in acatl, iztac in tolli, ihuan iztac in cueyatl iztac in michin, iztac in cohuatl, in oncan nemi atlan, auh niman oquittaque nepaniuhticac intexcalli in oztotl, inic ce in texcalli in ozotl tonatiuh iquizayan itztoc itoca tleatl, Atlatlayan. Auh inic ome in texcalli in oztotl mictlampa Ytztoc, inic nepaniuhtoc, itoca Matlallatl, ihuan itoca Toxpallatl.

Auh inoquittaque niman yechoca in huehuetque quitohua anca yenican yez, caotiquittaque intechilhui inic technahuati in tlamacazqui in Huitzlipochtli inquihto inyuhqui anquittazque in Tollihtic in acaihtic miectlamantli in oncan ca auh in axcan coatiquittaque, otic mahuizoque, caye nelli caomochiuh caoneltic in tlatol inic technahuati, niman oquihtoque Mexicaye maoctihuian caotitlamahuizoque maoctic tlatolchiyecan in tlamacazqui yehuatl quimati quenin mochihuaz, niman ohuallaque motlallico in oncan Temazcaltitlan,

auh niman yohualtica in oquittac inoquimottiti in teomama initoca Quauhtlequetzqui anozo Quauhcohuatl in yehuatl in Huitzilopochtli, oquilhui Quauhcohuatle caohuanquittaque in ix-Cuauhcoatl y Axolohua fueron pasando y miraron mil maravillas allí entre las cañas y los juncos. Ese había sido el mandato que les dio Huitzilopochtli a ellos que eran sus guardianes, eran sus padres los dichos. Lo que les dijo fue así: «En donde se tienda la tierra entre cañas y entre juncos, allí se pondrá en pie, y reinará Huitzilopochtli». Así por su propia boca les habló y esta orden les dio. Y ellos al momento vieron: sauces blancos, allí enhiestos; cañas blancas, juncos blancos, y aun las ramas blancas, peces blancos, culebras blancas; es lo que anda por las aguas. Y vieron después donde se parten las rocas sobre puestas, una cueva cuatro rocas la cerraban. Una al oriente se ve, nada de agua tiene, es sin agua que se agita. La segunda roca de la cueva ve al norte: se ve que está sobrepuesta, y de ella sale el agua que se llama agua azul, agua verdosa.

Cuando esto vieron los viejos, se pusieron a llorar. Y decían ¿Conque aquí ha de ser? Es que estaban viendo lo que les había dicho, lo que les había ordenado Huitzilopochtli. Es que él les había dicho: «Habéis de ver maravillas muchas entre cañas y entre juncos». «Ahora las estamos mirando» decían ellos, «¡y quedamos admirados! «¡Cuán verdadero fue lo dicho, bien se realizó su orden!» Van a buscar a los mexicanos y les dicen: «Mexicanos, vamos, vamos a admirar lo que hemos contemplado. Digamos al sacerdote; él dirá qué debemos hacer». Fueron a Temazcatitlan y allí se detuvieron.

Por la noche vinieron a ver, vinieron a mostrarse unos a otros y era el sacerdote Cuauhtlaquezqui, que es el mismo Huitzilopochtli. Dijo él: Cuauhcóhuatl, ¿habéis visto allí todo, lo que hay entre cañas y jun-

quich in oncan onoc in acaihtic ohuan tlamahuizoque. Auh tlaxiccaquica occentlamantli in ayemo anquitta. Auh inin xihuian, xiquittati in Tenochtli in oncan anquittazque ic pacca icpac, ihcac in yehuatl in quauhtli oncan tlaqua, oncan mototonia, auh ca ic pachihui in amoyollo, ca yehuatl iniyollo in Copil intiqualmayauh in oncan timoquetz tlalcocomocco. Auh niman oncan huetzico ino anquittaque texcaltempa, Oztotempa in Acatzallan in toltzallan, auh ca oncan ixhuac iniyollo in Copil, in axcan motocayotia Tenochtli, auh ca oncan intiezque in titlapiezque, in titechiezque intitenamiquizque in nepapantlaca telchiquiuh totzonteco tomiuh tochimal, inic tiquimittazque in ixquich intechyahuallotoc ixquich tiquinpehuazque tiquimacizque ic maniz in taltepeuh Mexico Tenochtitlan quauhtli ipipitzcayan inetomayan quauhtli itlacuayan, ihuan michin ipatlanian, ihuan cohuatl izomocayan in Mexico in Tenochtitlan, auh ca miectlamantli in mochihuaz, niman oquilhui in Quauhcohuatl, cayequalli tlamacazque otlacauhqui imoyollotzin maquicaquican imottahuan in huehuetque in ixquichtin, ic niman oquincentalli in Mexica in Quauhcohuatl oquincaquilti initlatol in Huitzilopochtli inoquicacque Mexica.

Auh niman onoceppa yahque in Toltzallan in Acatzallan, in Oztotempa, auh ino ipan quizato Acatitlan ihcac in Tenochtli, in oncan (Oztotempa inoquittaque icpacca icpac ihcac moquetzticae in Quauhtli in yehuatl in Tenochtli oncan tlaqua, oncan quiqua quitzotzopitzticac in quiqua, auh in yehuatl in quauhtli inoquimittac in Mexica cenca omopechtecac in quauhtli, zan huecapa in conittaque) Auh initapazol inipepech, zan moch yehuatl in ixquich inepapan tlazo ihuitl in ixquich in xiuhtotoihuitl, in tlauhquecholihuitl, in ixquich quetzalli, auh zan no oncan quittaque in oncan tetepeuhtoc inin tzonteco inepapan totome in tlazototome in tzonteco oncan zozoticate, ihuan cequitoto icxitl, cequi omitl,

auh oncan quinnotz in Diablo quimilhui Mexicaye ye onca yecin, auh yece amo quitta in Mexica in cos? ¡Aún resta ver otra cosa! No la habéis visto todavía. Id y ved un nopal salvaje: y allí tranquila veréis un Águila que está enhiesta. Allí come, allí se peina las plumas, y con eso quedará contento vuestro corazón. ¡Allí está el corazón de Cópil que tu fuiste a arrojar allá donde el agua hace giros y más giros! Pero allí donde vino a caer, y habéis visto entre los peñascos, en aquella cueva entre cañas y juncos. ¡Del corazón de Cópil ha brotado ese nopal salvaje! ¡Y allí esperaremos y allí reinaremos! ¡Allí esperaremos y daremos el encuentro a toda clase de gentes! Nuestros pechos, nuestra cabeza, nuestras flechas, nuestros escudos. ¡Allí les haremos ver! ¡A todos los que nos rodean allí los conquistaremos! ¡Aquí estará perdurable nuestra ciudad de Tenochtitlan! ¡El sitio donde el Águila grazna, en donde abre las alas; el sitio donde ella come y en donde vuelan los peces, donde las serpientes van haciendo ruedos y silban! ¡Ese será México Tenochtitlan y muchas cosas han de suceder! Dijo entonces Cuauhcóhuatl: ¡Muy bien está, mi señor sacerdote! ¡Lo concedió tu corazón: vamos a hacer que lo oigan mis padres los ancianos todos juntos! Y luego hizo reunir a los ancianos todos Cuauhcóhuatl y les dio a conocer las palabras de Huitzilopochtli. Las oyeron los mexicanos.

Y de nuevo van allá entre cañas y entre juncos, a la orilla de la cueva. Llegaron al sitio donde se levanta el nopal salvaje, allí al borde de la cueva y vieron tranquila, parada, al Águila en el nopal salvaje. Allí come, allí devora y echa a la cueva los restos de lo que come. Y cuando el Águila vio a los mexicanos, se inclinó profundamente. Y el Águila veía desde lejos. Su nido y su asiento era todo él de cuantas finas plumas hay: plumas de azulejos, plumas de aves rojas y plumas de quetzal. Y vieron también allí cabezas de aves preciosas y patas de aves y huesos de aves finas tendidos por tierra.

Le habló el dios y así les dijo: ¡Ah, mexicanos: aquí sí será! ¡México es aquí! Y aunque no veían quién les hablaba, se pusieron a llorar y decían: ¡Felices nosotros, dichosos al fin! ¡Hemos visto ya dónde ha de ser nuestra ciudad! ¡Vamos y vengamos a re-

aquinquinotza ic oncan tlatocayotique Tenochtitlan auh niman ye ic choca in Mexica quitohua otocnopiltic, otomacehualtic caotic mahuizoque in taltepeuh yez, maoctihuian, maoctitocehuiti.

posar aquí!

Crónica Mexicáyotl, folios 86, 87


tenochtitlan
colhuacan. pueblo.
tenayucan. pueblo.

Descripción del tlacuache y de sus propiedades medicinales en el Códice Florentino

Inic nahui parrapho itechpa tlatoa in quenami iyeliz, in yolqui, manenenqui, in ituca tlacuatl.

Tlacuatl; tlacuaton, anozo tlatlacuaton: pazaltuntli, huel yuhquin epatl. Auh in ye huecahua, inic huehue, in ye ilama, tetazahui. Tempitzantun. Mihichiuh, mihixtetlilcomolo, nacazhuihuitzpil, cuitlapilhuiac, cuitlapilxuxupetztic; zan huel nacatl in icuitlapil; acan ca tzontli, in manel tumitl.

Auh in yeliz: tlallan, tlacoyocco, cana tepancamac in mopilhuatia. Auh in omopilhuati, in canapa yauh, quinhuica in ipilhuan: ca xillan xiquipile. Uncan quimotema, uncan quimonaaquia in ipilhuan; quinhuica in tlatlacuaz, umpa chichitihui. Niman amo yellele, amo tlahuele, amo tecua, amo tetetexoa, in icuac ano, in icuac tzitzquilo. Auh in icuac axihua, choca, pipitzca, huel quiza in imixayo, oc cenca icuac in ano, ihuan in ipilhuan; cenca quinpipitzquilia in ipilhuan, quinchoquilia, huel quiza in ixayo. Quimontetema in ixiquipilco, quinhualquiquixtia.

Auh in itlacuatl tonacayutl; metzalli, ihuan necutli. Ahu in incayo cualoni. Huelic, yuquin tochin, yuhquin citli. Auh in iyomio oc cenca yeh, in icuitlapil, zan niman amo cualoni. In aquin quicuaz, oc cenca yeh, intla miec quicuaz, mochi quiza in iitic ca, in icuitlaxcol.

Ceppa quichtacacua in chichi, ihuan miztun, in inacayo tlacuatl. Zan mochi quiteteitz, quitutupotz in omitl, ca nel nozo chichi. In tlthuic, omochi motepehuaco in icuitlaxcoli za quihuilantinemi.

Auh inin, icuitlapil, ca patli, ca tlatupehuani, tlaquixtiani. In canin tlein calaqui, oc cenca yeh momicamac in ahuelquiza, onmopapalteuhteca in tlacuacuitlapilli, miecpa onmoteca. In manel huel tzitzicaticac, quiquixtia zan ihuian quiquixtitiuh. Auh in yehuantin in ahuellacachihua, in ahuel mixihui ca coni ic iciuhca tlacati in conetzintli. Auh in aquin aoc huel maxixa in maxixtzacua, ca coni quitlapoa in piaztli, in cocotli, quipopohua, quiyectia, cochpana in ixtetenca. No yehuatl in tlatlaci, no coni in icuitlapil tlacuatl, ca quicxotla, quitemohuia in alahuac.

Tlácuatl, tlacuatn o tlatlacuaton. Es lanudillo, muy semejante al zorrillo. Y cuando envejece, cuando ya es anciano, ya es anciana, se vuelve blancuzco. Es de labios agudillos. Se pintó mucho del rostro: se hizo rodetes de tinta alrededor de los ojos. Orejas aguditas, larga la cola, la cola muy pelada: sólo de carne su cola; en ningún lado tiene cabellos, aunque hay pelusa.

Y sus costumbres: en la tierra, en un hoyo, en algún lugar en los boquetes de las paredes, pare la hembra. Y cuando parió, si va a alguna parte, lleva a sus hijos, pues tiene una bolsa en el vientre. Allí los pone: allí mete a sus hijos; los lleva cuando va a comer; allí van mamando. Luego, no es iracundo, no se enoja, no muerde, no trasca cuando es capturado, cuando es asido. Y cuando es cogido llora, chilla, bien salen sus lágrimas, principalmente cuando es capturada la hembra con sus hijos; mucho les chilla a sus hijos, le llora, bien salen sus lágrimas. Los pone en la bolsa; los hace salir.

Y su comida es el maíz y las raeduras de maguey y la miel. Y su carne es comestible. Es sabroso, como conejo, como liebre. Pero sus huesos, principalmente los de su cola, no son comestibles. A quien los come, si come muchos, le sale todo lo que está en su vientre, sus intestinos.

Una vez furtivamente un perro y un gato comieron la carne del tlacuache. En verdad el perro royó, mordió todos los huesos. Al amanecer todos sus intestinos se le vinieron a esparcir, sólo los andaba arrastrando.

Y ésta, su cola, es medicina: porque es arrojadora, es sacadora de cosas. Donde algo entra, principalmente en una grieta del hueso, que no puede salir, se pone abundantemente cola de tlacuache, mucha ahí se pone. Aunque esté muy atorado lo que se ha encajado, lo hace salir, fácilmente la va hacer salir. Y ellas, las que paren con dificultad, las que no pueden parir, beben el caldo para que rápidamente nazca el niñito. Y el que ya no puede defecar, que tiene es-

No yehuatl coni in cacahuatl ipan huei nacaztli ipan tlilxochitl, mecaxochitl ipan, in quin aoc temo quicua in ocuitlaxcol itlacauh in omotexten.

treñimiento, bebe el caldo de la cola del tlacuache, porque pisotea, hace bajar las flemas. También él lo bebe con cacao, con huei nacaztli (Cymbopetalum penduliflorum), con tlixóchitl (Vanilla), con mecaxóchitl (Vanilla planifolia), quien ya no digiere lo que come, al que se le corrompieron los intestinos, el que se repletó de masa.

A lo largo del libro aparecen diversos relatos, mitos, cuentos relativos al tlacuache, los cuales irán precedidos por la siguiente representación del tlacuache, tomada del Códice Fejérváry-Mayer:

http://www.famsi.org/spanish/

Los relatos, extractos, textos, dichos, adivinanzas, etc. no relacionados con matemáticas y que aparecen a lo largo del libro se tomaron de las siguientes fuentes e irán precedidos por la figura:

1. E. Ramírez, G. Valdés, *Canciones, mitos y fiestas huicholas*, México, DGEI/SEP, 1982.

2. M. Portal, *Cuentos y mitos en una zona mazateca*, México, INAH, 1986.

3. A. López Austin, *Los mitos del tlacuache, caminos de la mitología mesoamericana*, Alianza Editorial, México, 1990.

4. E. Florescano, *Memoria mexicana*, 3a Ed., FCE,1994.

5. Revista *Arqueología Mexicana*, diversos números.

6. J. Soustelle, *El universo de los aztecas*. FCE, 1996.

7. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicana*, 2a Ed., Porrúa, 1975.

8. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicáyotl*, México, UNAM, 1975.

9. *Códice Matritense de la Real Academia de la Historia*, Textos en náhuatl de los indígenas informantes de Sahagún, ed. facs. del Paso y Troncoso, vol. VIII, Madrid, 1907.

10. M. León-Portilla, *Los antiguos mexicanos*, México, FCE, 1987.

11. «Anales de Cuauhtitlan», en *Códice Chimalpopoca*, México, Imprenta Universitaria, 1945.

12. *Oraciones, adagios, adivinanzas y metaforas*, Del libro sexto del códice florentino, Pórtico de la Ciudad de México, 1993.

IN CALLI IXCAHUICOPA

El lema de esta casa de estudios se basa en la frase náhuatl In Calli Ixcahuicopa; ésta se integra por los elementos in calli, que significa «casa» y el compuesto ixcahuicopa formado por ix (tli) «rostro», cáhui (tl) «tiempo», y copa «hacia», que expresa «hacia el tiempo con rostro».

El elemento central cáhui (tl) implica «cambio y lo que éste va dejando». En síntesis, In calli ixcahuicopa es «casa orientada al tiempo con rostro». Convertida la frase en lema, apunta a los propósitos de la Universidad, que es «CASA ABIERTA AL TIEMPO» portador de sentido, posibilidad de saber y de diálogo.

Índice

1

Sistemas de pruebas formales

En este capítulo y el siguiente trataremos varios sistemas de prueba para el cálculo de predicados. Presentaremos los métodos de tablas semánticas, de resolución, y de árboles semánticos, pero también tratamos formas normales, requeridas en particular para el método de Herbrand y resolución. Un lector interesado en teoría de modelos puede prescindir de la lectura de este capítulo, pero es algo que de ninguna manera recomendamos para alguien que está aprendiendo lógica matemática. Habremos de depender fuertemente de lo visto en [FeVi09] al respecto de estos métodos, pues sería absurdo reproducir todo lo ahí visto aquí. Por tanto, el lector interesado en los métodos de prueba de este capítulo debera revisar la referencia mencionada.

Según los conceptos cosmológicos aztecas, el universo tiene la forma general de una cruz. Con cada uno de los cuatro puntos cardinales del mundo se relacionan cinco de los 20 signos de los días, entre ellos un portador de año (Este, ácatl, caña; Oeste, calli, casa; Norte, técpatl, cuchillo de pedernal; Sur, tochtli, conejo), un color (Este, rojo o verde; Oeste, blanco; Norte, negro; Sur, azul) y ciertos dioses. El quinto punto cardinal, el centro, es atribuido al dios del fuego, Huehuetéotl, porque el hogar se encuentra en medio de la casa.

Encima de la tierra, que está rodeada del «agua celeste» (ilhuicáatl) del océano, se encuentran 13 cielos, el más elevado de los cuales, «donde el aire es delicado y frío», es la morada de la «Pareja suprema». Debajo de la «tierra divina» (teotlalli) están los nueve infiernos de Mictkan, con otros tantos ríos que las almas de los muertos deben atravesar. El trece era considerado como una cifra favorable, y el nueve como muy nefasta.

Todos los cuerpos celestes y las constelaciones estaban divinizados. Así ocurría con la Osa Mayor (Tezcatlipoca), Venus (Quetzalcóatl), las estrellas del Norte (Centzon Mimixcoa, las «Cuatrocientas Serpientes de Nubes») y las estrellas del Sur (Centzon Huitznahua, los «Cuatrocientos Meridionales»).

Se suponía que el disco solar, Tonatiuh, era llevado en litera del Este al cenit al Oeste en medio de un cortejo de mujeres divinizada, las Cihuateteo. Cuando la noche se extendía sobre la tierra, el día se levantaba en Mictalan, la morada de los muertos.

Nuestro primer sistema de prueba será el de tablas semánticas.

1.1 Tablas semánticas

El método de tablas semánticas es un procedimiento sistemático para desarrollar pruebas en forma de árboles llamados tablas semánticas. Los nodos del árbol son fórmulas con un valor de verdad asociado (verdadero o falso), que llamaremos fórmulas valuadas. La idea primigenia es iniciar el árbol (raíz) con una fórmula φ que suponemos falsa (o verdadera) y si después de analizar a dónde nos conduce esta suposición, sólo obtenemos contradicciones, nuestra hipótesis inicial $\varphi \ \ F$ (o $\varphi \ \ V$) es incorrecta, por lo que conseguimos una prueba (o refutación) por tablas de φ. Para construir las ramas del árbol se utilizan fórmulas valuadas y se procede a generar una rama de acuerdo al conectivo principal de la fómula en cuestión. Para ello nos auxiliamos de las tablas atómicas que en breve presentamos. Expandemos nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}(C)$ mediante símbolos de constante que incluyen a las originales. Para las nociones no definidas a continuación véase [FeVi09].

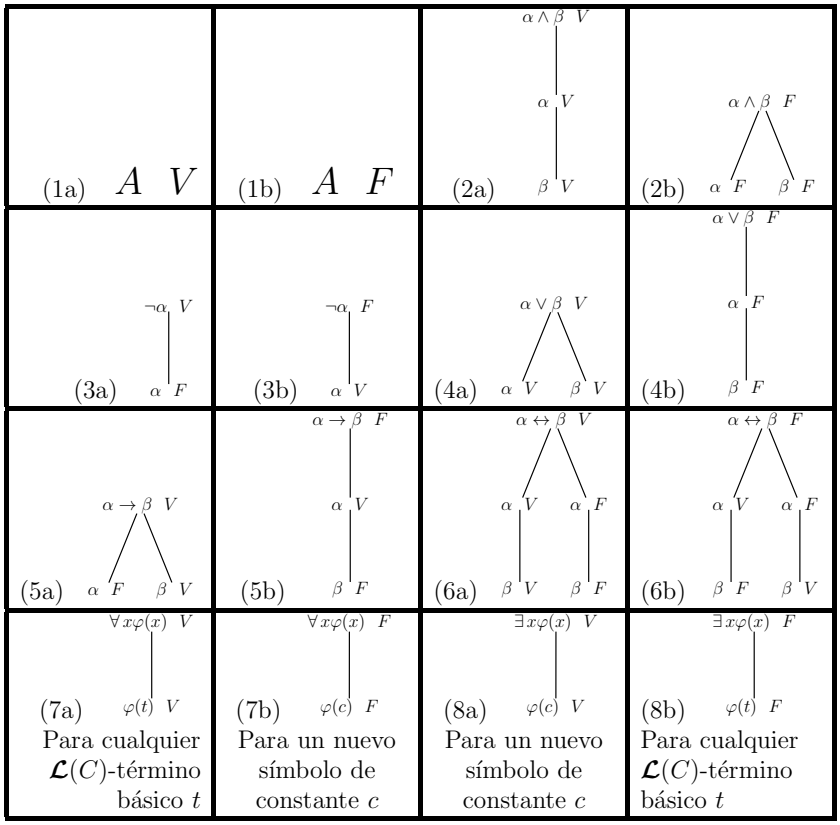
Definición 1.1.1. Una tabla semántica es un árbol binario[1] cuyos nodos son $\mathcal{L}(C)$-enunciados $\varphi \ \ K$, donde $K \in \{V, F\}$ y se construye por recursión. Nos referiremos a la figura de la página 3.

① Todas las tablas atómicas son tablas semánticas. El requisito de que c sea una nueva constante en los casos 7b y 8a significa que c es una de las c_i que no aparecen en φ.

② Si T es una tabla finita, P una trayectoria en T, N un nodo en P y T' se obtiene de T al añadir una tabla atómica con raíz N al final de P, entonces T' también es una tabla semántica. Aquí el requisito de que c sea un símbolo nuevo de constante en los casos 7b y 8a significa que c es una de las c_i que no aparece en los nodos de P.

③ Si T_0 es una tabla finita y $T_0, T_1, \ldots$ es una sucesión de tablas finitas, y para todo $n \geq 0$, T_{n+1} se obtiene de T_n mediante ②, entonces; $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ es una tabla semántica.

[1] Es decir, un árbol en el que cada nodo tiene a lo sumo dos descendientes.



Tablas semánticas atómicas

En la figura, A representa un símbolo de predicado (que puede ser $=$). Es muy importante en lógica de predicados que el nodo N en ② se repita cuando se añade la tabla atómica correspondiente a P (al menos en los casos 7a y 8b). La razón de esta insistencia se hará visible cuando analicemos cómo proceder en estos casos. En ocasiones queremos probar una fórmula a partir de un conjunto de premisas Σ. Para ello extendemos la noción recién dada de tabla semántica para incorporar el uso de premisas. Se supone que cada premisa es verdadera y como tal aparece en la tabla.

Definición 1.1.2 (Tablas semánticas con premisas)**.** La definición de tabla semántica a partir de Σ es la de la definición 1.1.1, excepto que incluye la siguiente regla.

②′ Si T es una tabla finita a partir de Σ, $\varphi \in \Sigma$, P es una trayectoria en T, T' se obtiene de T al añadir $\varphi \quad V$ en el final de P, entonces T' es una tabla semántica a partir de Σ.

Se sigue de la definición que toda tabla T (a partir de Σ) es la unión de una sucesión finita o infinita $T_0, T_1, \ldots$ de tablas (a partir de Σ) en la que T_0 es una tabla atómica y cada T_{n+1} se obtiene de T_n a partir de ② (o ②′).

En lo sucesivo, supondremos que toda tabla (a partir de Σ) se presenta como dicha unión.

Definición 1.1.3 (Prueba por tablas (a partir de Σ))**.** Sean T una tabla y P una trayectoria en T. Tenemos las siguientes definiciones.

❶ P es contradictoria si para algún $\mathcal{L}(C)$-enunciado α, $\alpha \;\; V$ y $\alpha \;\; F$ aparecen como nodos de P.

❷ T es contradictoria si toda trayectoria en T es contradictoria.

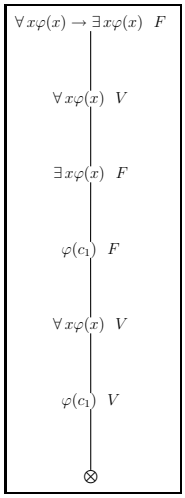
❸ T es una prueba por tablas de α (a partir de Σ) si T es una tabla contradictoria (a partir de Σ) cuya raíz es $\alpha \;\; F$.

❹ Si existe una prueba por tablas T de α (a partir de Σ), decimos que α es demostrable por tablas (a partir de Σ), en símbolos $\vdash \alpha$ (respectivamente, $\Sigma \vdash \alpha$).

❺ Σ es inconsistente si existe una prueba por tablas de $\alpha \wedge \neg\alpha$ a partir de Σ para algún enunciado α.

Observe que si existe una tabla contradictoria (a partir de Σ) con raíz $\alpha \;\; F$, entonces existe tal tabla finita, es decir, una prueba finita de α (a partir de Σ). Basta con detener cada trayectoria cuando ésta se vuelva contradictoria. Como cada trayectoria es finita, el árbol debe ser finito de acuerdo con el teorema de König (véase [FeVi09]).

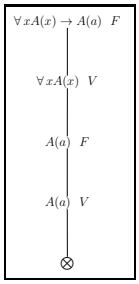
Ejemplo 1.1.4. Sea $\sigma \equiv \forall x\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$. Dé una demostración por tablas de σ.



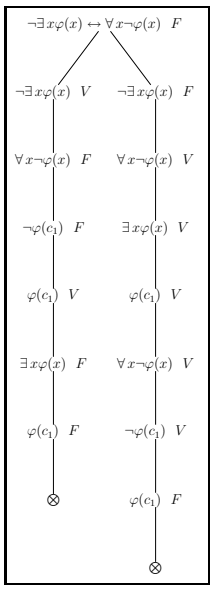
Puesto que la tabla es contradictoria, podemos decir que $\vdash \sigma$. Es importante entender cómo se procedió en el tercer nodo (de arriba a abajo): tenemos $\exists x\varphi(x) \;\; F$, por lo que ningún c_1 hace verdadera a φ, es decir, en particular $\varphi(c_1)$ es falsa.

En el penúltimo nodo usamos la constante c_1 porque tenemos el nodo $\forall x\varphi(x) \;\; V$ y la tabla atómica correspondiente a esta fórmula (7a) nos permite usar cualquier $\mathcal{L}(C)$-término básico.

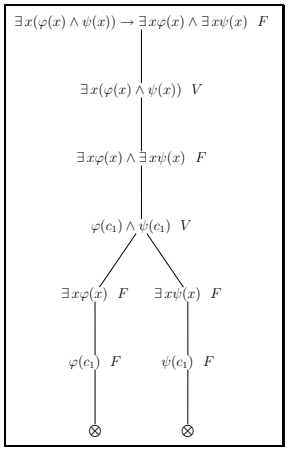
Ejemplo 1.1.5. Considere la fórmula $\psi \equiv \forall\, xA(x) \to A(a)$. En este caso nuestro lenguaje contiene una constante a. La demostración de ψ por tablas transcurre a continuación.



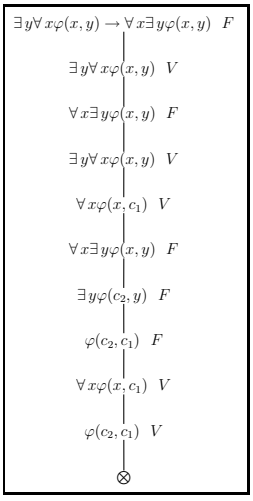
Ejemplo 1.1.6. Sea $\alpha \equiv \neg\exists\, \varphi(x) \leftrightarrow \forall\, x\neg\varphi(x)$. A continuación una prueba por tablas de α.



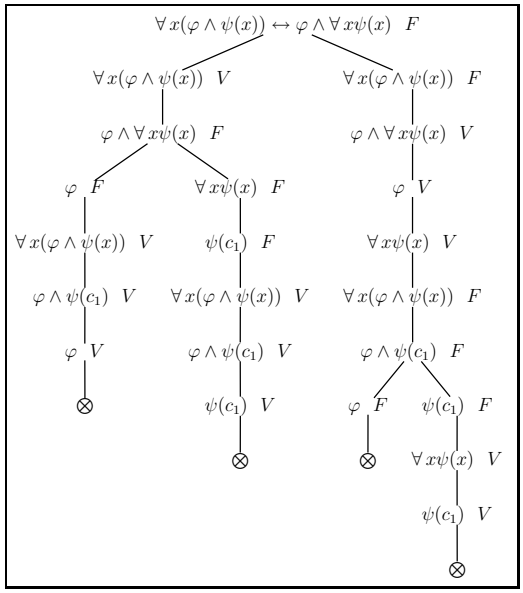
Ejemplo 1.1.7. Sea $\beta \equiv \exists\, x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \exists\, x\varphi(x) \wedge \exists\, x\psi(x)$. Presentamos una prueba por tablas de β.



Ejemplo 1.1.8. Sea $\rho \equiv \exists y \forall x \varphi(x,y) \to \forall x \exists y \varphi(x,y)$. Ahora nuestra fórmula φ tiene dos variables. Procedemos a demostrar ρ como sigue .



Ejemplo 1.1.9. Sea $\zeta \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \varphi \wedge \forall x \psi(x)$, donde φ no tiene a x como variable libre. La demostración por tablas de ζ es



Recuerde que un argumento consiste en un conjunto de premisas Σ y una conclusión φ. Decimos que el argumento es válido si

$$\Sigma \models \varphi.$$

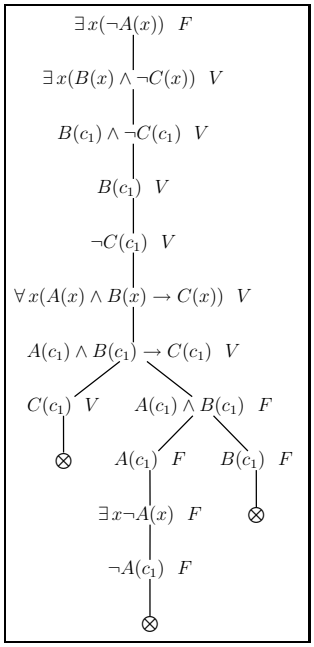
Aún no hemos demostrado el teorema de completud 1.7.7 para tablas semánticas en la lógica de predicados, pero como pronto lo haremos, supongamos por el momento que es cierto, es decir,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \models \varphi. \tag{$\divideontimes$}$$

Ejemplo 1.1.10. Suponiendo ($\divideontimes$), demuestre que los siguientes argumentos son válidos.

1. Premisas: $\forall x(A(x) \wedge B(x) \rightarrow C(x))$, $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$;
Conclusión: $\exists x \neg A(x)$.

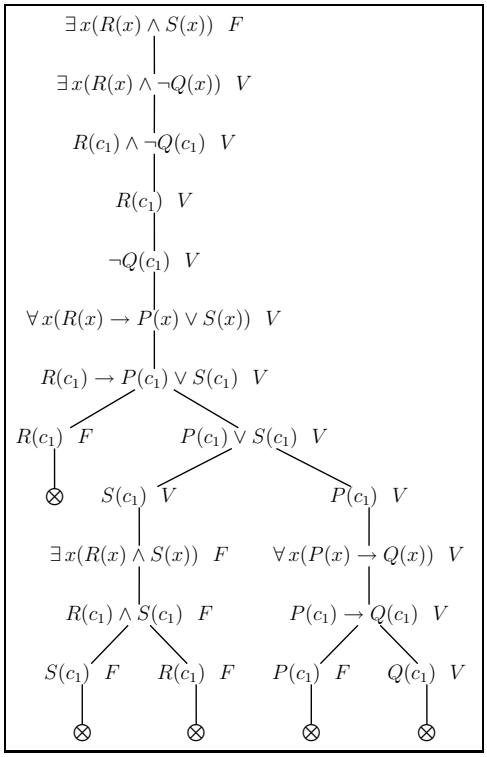
En este caso, pretendemos probar que la conclusión φ es una consecuencia lógica de las premisas Σ, es decir, $\Sigma \models \varphi$. De acuerdo con ($\divideontimes$), basta encontrar una demostración por tablas de φ a partir de Σ,



Como la tabla a partir de Σ resultó contradictoria, el argumento es válido.

2. Premisas: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$, $\forall x(R(x) \to P(x) \vee S(x))$.
Conclusión: $\exists x(R(x) \wedge S(x))$.

Como antes, construimos una demostración por tablas a partir de las premisas.



Concluimos que el argumento es válido.

3. Corroboremos que el siguiente argumento es válido.

Toda pintura en el museo es una obra maestra. Cualquier artista que pinta una obra maestra es un genio. Algún artista desconocido pintó un cuadro en el museo. Por lo tanto, algún artista desconocido es un genio.

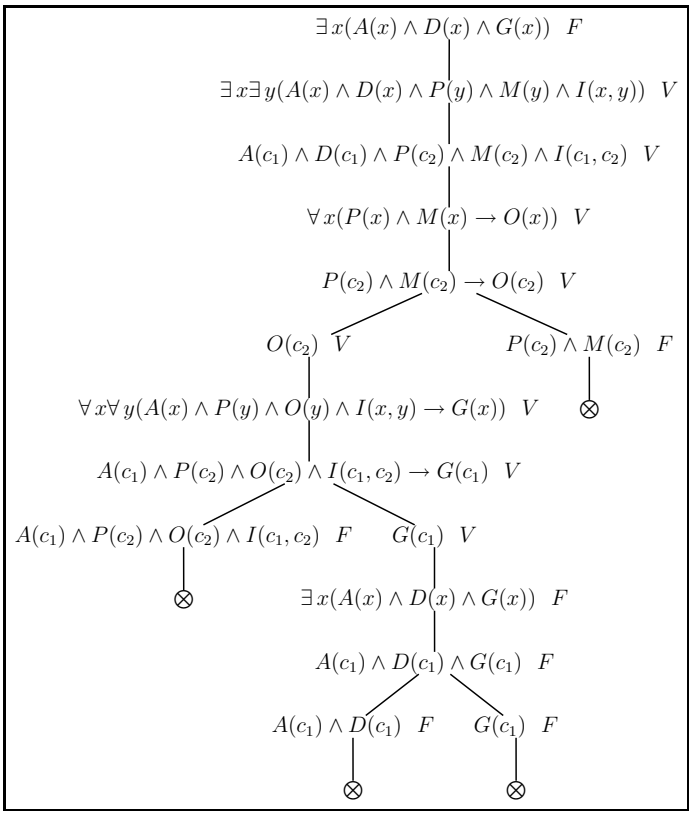
Usamos la siguiente notación:

- $P(x) \equiv x$ es una pintura.
- $M(x) \equiv x$ está en el museo.
- $O(x) \equiv x$ es una obra maestra.
- $A(x) \equiv x$ es un artista.
- $I(x,y) \equiv x$ pintó y.
- $G(x) \equiv x$ es un genio.
- $D(x) \equiv x$ es desconocido.

Nuestras premisas son

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x(P(x) \wedge M(x) \to O(x)), \forall x \forall y(A(x) \wedge P(y) \wedge O(y) \wedge I(x,y) \to G(x)),\\ &\exists x \exists y(A(x) \wedge D(x) \wedge P(y) \wedge M(y) \wedge I(x,y))\}.\end{aligned}$$

La conclusión es $\exists x(A(x) \wedge D(x) \wedge G(x))$. La prueba por tablas de la conclusión a partir de las premisas Σ es



Por lo tanto, el argumento es válido.

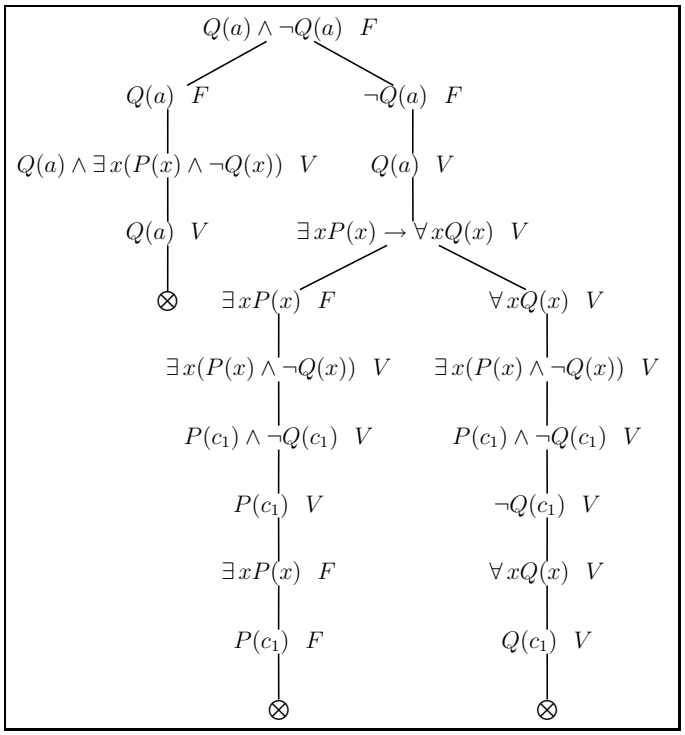
«Mi pluma de garza, mi sayo de cordeles». Quiere decir: Al haberme dado un cargo la ciudad, con ello me volví su siervo; si en algo la daño, le perjudico, lo he de pagar.

Ejemplo 1.1.11. Para los siguientes conjuntos de fórmulas Σ demuestre por tablas que son inconsistentes, es decir, pruebe que $\Sigma \vdash \theta \wedge \neg\theta$ para alguna fórmula θ.

1. $\Sigma = \{\exists\, xP(x) \to \forall\, xQ(x), Q(a) \wedge \exists\, x(P(x) \wedge \neg Q(x))\}$. Demostraremos que

$$\Sigma \vdash Q(a) \wedge \neg Q(a).$$

La tabla es



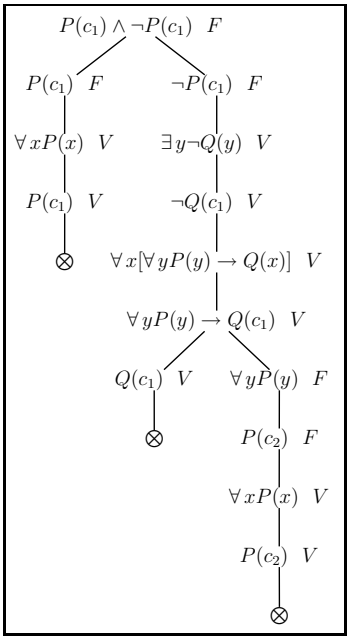
por lo que Σ es inconsistente.

2. $\Sigma = \{\forall\, x[\forall\, yP(y) \to Q(x)], \forall\, xP(x), \exists\, y\neg Q(y)\}$.

Probaremos que

$$\Sigma \vdash P(c_1) \wedge \neg P(c_1).$$

La tabla es



Los teoremas de completud, correctud, compacidad y de Löwenheim-Skolem para tablas semánticas se enuncian y demuestran en la sección 1.7.

El calendario de 260 días lleva por nombre, en azteca, tonalpohualli, que significa «la cuenta de los días». Ese calendario se desarrolla paralelamente al calendario solar de 365 días que estaba dividido en 18 meses de 20 días, además de cinco días suplementarios nefastos. La palabra tonalli quiere decir «dí» y «destino»: el calendario de 260 días era empleado principalmente con fines de adivinación. El ciclo del calendario comprendía 20 series de 13 días. Los días se denominaban por medio de la combinación de 20 signos (fenómenos naturales como el viento, ehécatl, y los temblores de la tierra, ollin; animales como el conejo, tochtli, y el jaguar, océlotl; plantas como la caña, áctl; objetos como el cuchillo de pedernal, técpatl, y la casa, calli) con los números de l 1 al 13.

El rasgo dominante del ritual mexicano desde los tiempos toltecas fue el sacrificio humano. Las víctimas eran o prisioneros de guerra, o esclavos comprados con este fin. En ciertos casos, eran escogidos en una categoría particular (mujeres, jóvenes). La muerte por sacrificio se consideraba como una manera segura de alcanzar una vida eterna feliz. Por ello, era aceptada con estoicismo, o aun buscada voluntariamente. La víctima llevaba la vestimenta y los adornos del dios y era llamada ixiptla, «la imagen del dios».

El fin de cada ciclo de 52 años se celebraba una ceremonia de «ligadura de los años» en la cumbre de la montaña Huixachtécatl. Los sacerdotes encendían el «Fuego Nuevo» sobre el pecho de su víctima.

1.2 Formas normales

En varios de los métodos de prueba se requiere que la fórmula por demostrar esté en una forma peculiar. De no tener tal representación, es imposible usar ciertos procedi-

mientos. En esta sección estudiaremos cómo transformar fórmulas arbitrarias a tales formas, conocidas como formas normales.

Definición 1.2.1. Una fórmula φ está en **forma normal prenexa** (FNP) si tiene la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$, donde cada $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y ψ es una fórmula libre de cuantificadores.

Más aún, si ψ es una conjunción de disyunciones de literales (atómicas o negación de atómicas), entonces φ está en **forma normal prenexa conjuntiva** (FNPC).

Note que la definición de FNP no excluye la posibilidad de que en ψ aparezca un sólo conyunto o un sólo disyunto. En una forma normal prenexa, todos los cuantificadores se ubican al principio de la fórmula.

Ejemplo 1.2.2. $\forall y \exists x(f(x) = y)$ está en FNP.

$\neg\forall x \exists y P(x,y,z)$ y $\exists x \forall y \neg P(x,y,z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y,z)$ no están en FNP.

En lo sucesivo usaremos la notación $Q_1x_1, \dots, Q_nx_n$, en general Qx, para denotar cuantificadores arbitrarios; es decir, Q_i o Q pueden ser $\forall$ o $\exists$. Además, definimos

$$\overline{Q}_i = \begin{cases} \forall, & \text{si } Q_i = \exists \\ \exists, & \text{si } Q_i = \forall. \end{cases}$$

Proposición 1.2.3. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Entonces*

$$\neg Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \overline{Q}_1x_1 \cdots \overline{Q}_nx_x\neg\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Demostración. Afirmación 1. Si ψ es una $\mathcal{L}$-fórmula, entonces

$$\neg\forall\, x_1\psi(x_1) \equiv \exists\, x_1\neg\psi(x_1) \qquad (\ast)$$
$$\neg\exists\, x_1\psi(x_1) \equiv \forall\, x_1\neg\psi(x_1). \qquad (\ast)$$

Demostración de la afirmación 1. Ambas equivalencias se siguen del teorema 2.7.39 (1) y (2) (Volumen I). (1)

Ahora probamos la proposición por inducción en n. Ya está demostrado para $n = 1$, así que suponga cierto el resultado para n y lo probaremos para $n+1$. Es decir, debemos

demostrar que

$$\neg Q_1 x_1 \cdots Q_{n+1} x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv \overline{Q}_1 x_1 \cdots \overline{Q}_{n+1} x_{n+1} \neg \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}). \qquad (\clubsuit)$$

Podemos escribir el lado izquierdo de (✿) como $\neg Q_1 x_1 \overline{\varphi}(x_1)$, donde $\overline{\varphi}$ es $Q_2 x_2 \cdots Q_{n+1} x_{n+1}\ \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, así que

$$\neg Q_1 x_1 \overline{\varphi} \equiv \overline{Q}_1 x_1 \neg \overline{\varphi}(x_1) \quad \text{Afirmación 1.}$$
$$\neg \overline{\varphi}(x_1) \equiv \overline{Q}_2 x_2 \cdots \overline{Q}_{n+1} x_{n+1} \neg \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ Hipótesis de inducción.}$$

Entonces

$$\neg Q_1 x_1 \cdots Q_{n+1} x_{n+1} \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv \overline{Q}_1 x_1 \cdots \overline{Q}_{n+1} x_{n+1} \neg \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

□

Teorema 1.2.4. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Entonces existe una $\mathcal{L}$-fórmula ψ en FNPC lógicamente equivalente a φ.*

Demostración. Primero probamos que existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ' en FNP lógicamente equivalente a φ. Procedemos por inducción en la construcción de φ.

- ✻ Si φ es atómica, está en FNP y hacemos $\varphi' \equiv \varphi$.
- ✻ Si $\varphi \equiv \neg\varphi_1$. Suponemos que existe $\varphi_1' \equiv \varphi_1$ tal que φ_1' está en FNP. Por supuesto, $\varphi \equiv \neg\varphi_1'$. La fórmula φ_1' tiene la forma $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, donde φ_0 no tiene cuantificadores. De acuerdo con la proposición 1.2.3,

  $$\neg\varphi_1' \equiv \overline{Q}_1 x_1 \cdots \overline{Q}_n x_n \neg\varphi_0,$$

  por lo que $\varphi' \equiv \neg\varphi_1' \equiv \overline{Q}_1 x_1 \cdots \overline{Q}_n x_n \neg\varphi_0$ es la FNP que buscamos.
- ✻ Si $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$, suponemos que existen φ_1', φ_2' en FNP tales que $\varphi_1 \equiv \varphi_1'$ y $\varphi_2 \equiv \varphi_2'$. Sean

  $$\varphi_1' \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_m x_m \overline{\varphi}_1(x_1, \ldots, x_m)$$
  $$\varphi_2' \equiv C_1 x_1 \cdots C_n x_n \overline{\varphi}_2(x_1, \ldots, x_n),$$

  donde $C_i, Q_i \in \{\forall, \exists\}$ y $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2$ son fórmulas sin cuantificadores. Sean $y_1, \ldots, y_m$, $z_1, \ldots, z_n$ variables que no aparecen en φ_1' o φ_2' y defina

  $$\psi_1' \equiv (\varphi_1')_{x_1,\ldots,x_m}(y_1, \ldots, y_m)$$
  $$\psi_2' \equiv (\varphi_2')_{x_1,\ldots,x_n}(z_1, \ldots, z_n);$$

  es decir, sustituimos x_i por y_i en φ_1' y x_i por z_i en φ_2'.

Se sigue que

$$\varphi_1' \equiv \psi_1' \equiv Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \overline{\psi}_1(y_1, \ldots, y_m)$$
$$\varphi_2' \equiv \psi_2' \equiv C_1 z_1 \cdots C_n z_n \overline{\psi}_2(z_1, \ldots, z_n),$$

donde $\overline{\psi}_1(y_1, \ldots, y_m) \equiv (\overline{\varphi}_1)_{x_1,\ldots,x_m}(y_1, \ldots, y_m)$ y algo similar para $\overline{\psi}_2$. En consecuencia,

$$\varphi \equiv Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \overline{\psi}_1(y_1, \ldots, y_m) \wedge C_1 z_1 \cdots C_n z_n \overline{\psi}_2(z_1, \ldots, z_n).$$

Mediante aplicaciones repetidas del teorema 2.7.39(1),(2) y (4) (volumen I) así como de la proposición 2.7.40(3) (volumen I), obtenemos

$$\varphi' \equiv Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m C_1 z_1 \cdots C_n z_n (\overline{\psi}_1 \wedge \overline{\psi}_2),$$

que está en FNP.

✻ Si $\varphi \equiv \exists x \varphi_1$, entonces $\varphi \equiv \exists v_0 \varphi_1'$ para alguna variable v_0 y φ_1' en FNP. Así que $\exists v_0 \varphi_1'$ está en FNP y tomamos $\varphi' \equiv \exists v_0 \varphi_1'$.

Ya tenemos φ' en FNP y lógicamente equivalente a φ'. Resta transformar φ' en FNCP. Dado que $\varphi' \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \varphi_0$ donde φ_0 no tiene cuantificadores, es suficiente transformar φ_0 en FNC.

Por inducción en la construcción de φ_0 encontramos fórmulas ψ y γ en FNC y FND, respectivamente.

✹ Si φ_0 es atómica, tomamos $\psi \equiv \gamma \equiv \varphi_0$.

✹ Si $\varphi_0 \equiv \neg\theta$, sabemos que existen fórmulas θ_d y θ_c en FND y FNC, respectivamente, lógicamente equivalentes a θ. Por lo tanto, definimos $\gamma \equiv \neg\theta_c$ y $\psi \equiv \neg\theta_d$.

✹ Si $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Sabemos, por hipótesis de inducción, que existen la FNC y la FND de φ_1 y φ_2, es decir, existen ψ_1, ψ_2 en FNC lógicamente equivalentes a φ_1 y φ_2, respectivamente, así como γ_1, γ_2 en FND lógicamente equivalentes a φ_1, φ_2, respectivamente.

Tomamos $\psi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$. Para obtener γ primero formamos $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ y después distribuimos $\wedge$ sobre $\vee$ para transformar $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ a FND.

□

Ejemplo 1.2.5. Sea $\varphi \equiv \neg(\forall x \exists y P(x,y,z) \vee \exists x \forall y \neg Q(x,y,z))$. Transformamos φ a FNPC.

Por el teorema anterior, existe φ' en FNP equivalente a φ. Más aún, la prueba del teorema indica el método a seguir para encontrar φ'. Primero note que φ tiene la forma $\neg\psi$. Introducimos la negación,

$$\varphi \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y,z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y,z).$$

Así que φ es equivalente a una fórmula de la forma $\psi \wedge \theta$. Cambiemos el nombre de las variables para poder escribir

$$\varphi \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y,z) \wedge \forall u \exists v Q(u,v,z).$$

Aplicamos el teorema 2.7.39 (Volumen I) así como la proposición 2.7.40 (Volumen I) y llegamos a

$$\varphi \equiv \exists x \forall y \forall u \exists v (\neg P(x,y,z) \wedge Q(u,v,z)),$$

que está en FNP, de hecho en FNPC.

Ejemplo 1.2.6. Encuentre la FNPC de

$$\varphi \equiv \forall\, x P(x) \leftrightarrow \exists\, x R(x).$$

Siguiendo el procedimiento descrito, logramos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\varphi \equiv & (\neg \forall\, x P(x) \vee \exists\, x R(x)) \wedge (\neg \exists\, x P(x) \vee \forall\, x R(x)) \\
\equiv & (\exists\, x \neg P(x) \vee \exists\, x R(x)) \wedge (\forall\, x \neg P(x) \vee \forall\, x R(x)) \\
\equiv & \exists\, x (\neg P(x) \vee R(x)) \wedge \forall\, y (\neg P(y) \vee R(y)) \\
\equiv & \exists\, x \forall\, y [(\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(y) \vee R(y))].
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.7. Sea $\zeta(x) \equiv \forall\, x \forall\, y [\exists\, z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists\, u R(x,y,u)]$. Encuentre su FNPC. Otra vez recurrimos al procedimiento ya utilizado:

$$\begin{aligned}
\zeta(x) \equiv & \forall\, x \forall\, y [\neg \exists\, z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee \exists\, u (R(x,y,u))] \\
\equiv & \forall\, x \forall\, y [\forall\, z (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee \exists\, u R(x,y,u)] \\
\equiv & \forall\, x \forall\, y \forall\, z [\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee \exists\, u R(x,y,u)] \\
\equiv & \forall\, x \forall\, y \forall\, z \exists\, u [\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee R(x,y,u)].
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.8. De nueva cuenta, se solicita la buena voluntad del lector para encontrar la FNCP de la fórmula

$$\begin{aligned}\varrho(x) \equiv & \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\exists u Q(x,u) \rightarrow \exists u Q(y,u)]] \\ \equiv & \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\neg \exists u Q(x,u) \vee \exists u Q(y,u)]] \\ \equiv & \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\forall u \neg Q(x,u) \vee \exists w Q(u,w)]] \\ \equiv & \forall x \forall y \exists z[P(x,y,z) \wedge \forall u \exists w[\neg Q(x,u) \vee Q(y,w)]] \\ \equiv & \forall x \forall y \exists z \forall u \exists w[P(x,y,z) \wedge (\neg Q(x,u) \vee Q(y,w))].\end{aligned}$$

Ahora nuestro objetivo es encontrar un método para determinar si una fórmula dada es satisfacible o no; por lo recién visto es suficiente encontrar tal método para fórmulas en FNPC. Resulta que la presencia de cuantificadores existenciales es un obstáculo.

Manejamos ya con cierta soltura la transformación de fórmulas a su FNPC; resta aprender a eliminar cuantificadores existenciales. Propiamente, dada una fórmula φ en FNCP, encontraremos ψ en FNPC que a lo sumo tiene cuantificadores universales pero no existenciales, y tal que ψ es satisfacible si y sólo si φ lo es. Es importante notar que ψ y φ no son necesariamente equivalentes.

1.2.1 Forma Normal de Skolem

El objetivo antes mencionado se logra poniendo una fórmula en forma normal de Skolem.

Definición 1.2.9. Una fórmula en **forma normal de Skolem** (FNS) es una fórmula en FNPC que es universal; es decir, los únicos cuantificadores (si hay alguno) en la fórmula son universales.

Dada una $\mathcal{L}$-fórmula φ definimos la fórmula $S(\varphi)$ en FNS. Es importante destacar que para construir $S(\varphi)$ habremos de expander nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ mediante nuevas

constantes $C = \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ y un conjunto F de nuevos símbolos de función F. En F ocurren símbolos de n-función f en una cantidad suficiente[2], para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Sea $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup C \cup F$.

La idea es la siguiente. Analicemos qué dice la fórmula $\psi \equiv \forall x \forall y \exists z \, \forall u \exists v \; \varphi(x, y, z, u, v)$; ésta afirma que para cualquier x y para cualquier y existe z y algo más. Así, la elección de z depende de quiénes sean x y y. Por ello podemos describir esta dependencia como

$$\forall x \forall y \forall u \exists v \varphi(x, y, f(x, y), u, v),$$

donde f es un nuevo símbolo de 2-función que sólo depende de las variables previas x, y. De la misma forma, podemos reducir aún más ψ para llegar a

$$\forall x \forall y \forall u \varphi(x, y, f(x, y), u, g(x, y, u)).$$

¿Qué hacemos si la fórmula por reducir es $\theta \equiv \exists x \forall y \forall z \sigma(x, y, z)$? En este caso x no depende de ninguna variable previa; es decir, para cualquier valor de y, z, x toma el mismo valor, es una constante, así que escribimos $\forall y \forall z \sigma(c, y, z)$, donde $c \in C$.

Después probaremos que φ es satisfacible si y sólo si $S(\varphi)$ es satisfacible. Pero no se puede asegurar que sean lógicamente equivalentes.

La fórmula $S(\varphi)$ es la «eskolemización» de φ. Describamos el procedimiento para obtener $S(\varphi)$:

- Encuentre una fórmula φ' en FNPC tal que $\varphi' \equiv \varphi$.

  Así

  $$\varphi \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$$

  para cuantificadores Q_i y φ_0 libre de cuantificadores.

- Si cada Q_i es $\forall$, entonces φ' es universal. Hacemos $S(\varphi) \equiv \varphi'$.

- En otro caso, φ' tiene cuantificadores existenciales. Definimos una fórmula $S(\varphi')$ que tiene menos cuantificadores existenciales que φ' (por ejemplo, si φ' tiene exactamente un cuantificador existencial, $S(\varphi')$ es universal). Sea i el menor número tal que $Q_i = \exists$.

  Si $i = 1$, entonces φ' es $\exists x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_m x_m \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

  Sea $S(\varphi') \equiv Q_2 x_2 \ldots Q_m x_m \varphi_0(c, x_2, \ldots, x_m)$, donde c es un símbolo de constante de C que no aparece en φ'.

  Si $i > 1$, entonces φ' es $\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_m x_m \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

  Sea $S(\varphi')$ la fórmula:

  $\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_m x_m \varphi_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1}), x_{i+1}, \ldots, x_m)$,

  donde f es un símbolo de $(i-1)$-función de F que no aparece en φ'.

[2]Es decir, hay tantos símbolos de n-función como $\mathcal{L}$-fórmulas para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, si el primer cuantificador de φ' es $\exists$, remplazamos x_1 por una constante nueva. Si el i-ésimo cuantificador en φ' es $\exists$ y todos los previos son $\forall$, remplazamos x_i por $f(x_1, \ldots, x_{i-1})$, donde f es un nuevo símbolo de función de F.

- Como $S(\varphi')$ tiene menos cuantificadores existenciales que φ', repetimos este proceso hasta obtener una fórmula universal $S(\varphi)$. Esto es, $S(\varphi)$ es $S^n(\varphi') = S(S\ (S \ldots (\varphi') \ldots))$ para algún n.

Ejemplo 1.2.10. Suponga que φ es la fórmula $\neg(\forall x \exists y P(x,y,z) \vee \exists x \forall y \neg Q(x,y,z))$.

Primero encontramos una fórmula φ' en FNPC equivalente a φ.

$$\varphi' \equiv \exists x \forall y \forall u \exists v (\neg P(x,y,z) \wedge Q(u,v,z)).$$

A continuación encontremos $S(\varphi')$ y después $SS(\varphi')$, $SSS(\varphi')$, ... Como φ' sólo tiene 2 existenciales, paramos en $SS(\varphi')$.

$$S(\varphi') \equiv \forall y \forall u \exists v (\neg P(c,y,z) \wedge Q(u,v,z)).$$
$$SS(\varphi') \equiv \forall y \forall u (\neg P(c,y,z) \wedge Q(u,f(y,u),z)),$$

que está en FNS.

En el siguiente teorema usaremos tácitamente el principio del buen orden (véase la página 313 del Volumen I) de la siguiente manera. Suponga que tenemos un lenguaje $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una fórmula de la forma

$$\varphi \equiv \forall\, x_1 \cdots x_n \exists\, y \psi(x_1, \ldots, x_n, y).$$

La fórmula φ afirma que para cualesquier elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, existe $b \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b].$$

Note que b depende de quienes sean $a_1, \ldots, a_n$. Podemos definir una función h de A^n a A tal que dada $\vec{a} \in A^n$, $h(\vec{a}) = b$, donde b es elemento que hace cierta

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b]. \qquad (\divideontimes)$$

El problema es que pueden existir varias b que satisfagan $(\divideontimes)$ y la función no queda bien definida. Para evadir esta dificultad recurrimos al PBO. Por PBO podemos bien ordenar A. Dada $\vec{a} \in A^n$, sea $B_{\vec{a}} \subseteq A$ el conjunto de testigos de la fórmula φ, es decir, $b \in B$ si y sólo si $(\divideontimes)$ se cumple para estas $a_1, \ldots, a_n$ y b. Como $B_{\vec{a}} \subseteq A$ y $B_{\vec{a}} \neq \varnothing$, $B_{\vec{a}}$ debe tener un menor elemento b. Éste es el b que elegimos para definir $h(\vec{a}) = b$.

«Te cubro el pelo, la cabeza». Quiere decir: Con los consejos que te doy miro por tu fama, para que con nada se empañe, para que no venga sobre ti ninguna desgracia.

Teorema 1.2.11. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ una $\mathcal{L}$-fórmula y $S(\varphi)$ su eskolemización. Entonces φ es satisfacible si y sólo si $S(\varphi)$ es satisfacible.*

Demostración. Podemos suponer que φ está en FNPC y que $S(\varphi) = S^m(\varphi)$. Por inducción en m, es suficiente mostrar que φ es satisfacible si y sólo si $S^1(\varphi)$ es satisfacible, porque si $m > 1$, el paso inductivo transcurre exactamente igual que este primer paso.

Hay dos posibilidades para $S^1(\varphi)$:

Caso 1. Si φ tiene la forma

$$\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_m x_m \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

entonces $S^1(\varphi)$ es $Q_2 x_2 \dots Q_m x_m \varphi_0(c, x_2, \dots, x_m)$ para alguna constante c. Sea $\psi(x_1)$ la fórmula $Q_2 x_2 \dots Q_m x_m \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Así que $\varphi \equiv \exists x_1 \psi(x_1)$ y $S^1(\varphi) = \psi_{x_1}(c)$. Primero suponga que φ es satisfacible. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ modelo de φ, por lo que existe un elemento $a \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \psi[a].$$

Debemos demostrar que $S^1(\varphi)$ es satisfacible, y para ello transformamos $\mathfrak{A}$ en una $\overline{\mathcal{L}}$-estructura: requerimos interpretar los símbolos de $C \cup F$ en $\mathfrak{A}$, pero sólo aquellos que aparecen en $S(\varphi)$ relevantes. Para todo $c \in C$, sea $c^{\mathfrak{A}} = a$. Con esta interpretación, es claro que $\mathfrak{A} \models S^1(\varphi)$.

Ahora suponga que $S^1(\varphi)$ es satisfacible, por lo que existe una $\overline{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$ modelo de $S^1(\varphi)$. Transformamos $\mathfrak{A}$ en una $\mathcal{L}$-estructura eludiendo la interpretación de los símbolos en $C \cup F$, y puesto que $\mathfrak{A} \models \psi_x(c)$, sabemos que existe un elemento $a = c^{\mathfrak{A}}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi_1[a]$, por lo que $\mathfrak{A}$, vista como $\mathcal{L}$-estructura, es modelo de $\exists x \psi_1(x)$, es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Caso 2. Si φ es $\forall x_1 \dots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} \dots Q_m x_m \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$, entonces $S^1(\varphi)$ es la fórmula: $\forall x_1 \dots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} \dots Q_m x_m \varphi_0(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, x_{i-1}), x_{i+1}, x_m)$, donde f es una $(i-1)$-función que no aparece en φ. Sea $\psi(x_1, \dots, x_i)$ la fórmula $Q_{i+1} x_{i+1} \dots Q_m x_m \ \varphi_0(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$ y suponga que $\forall x_1 \dots \forall x_{i-1} \exists x_i \psi(x_1, \dots, x_i)$ es satisfacible.

Sea $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{L}$-modelo de esta fórmula. Queremos verificar que $S^1(\varphi)$ es satisfacible, para lo que transformamos $\mathfrak{A}$ en una $\overline{\mathcal{L}}$-estructura: sea $a \in A$ arbitrario; defina $c^{\mathfrak{A}} = a$ para todo símbolo $c \in C$. Escogemos un símbolo $f \in F$ de $(i-1)$-función y definimos su interpretación en $\mathfrak{A}$ como una función $f : A^{i-1} \longrightarrow A$ mediante $f(\vec{b}) =$ el menor elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \dots, a_{i-1}, a]$, donde hemos supuesto que A está bien ordenado.

El resto de los símbolos $g \in F$ se puede interpretar en forma arbitraria. Con esta interpretación, es claro que

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots x_{i-1} \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1})).$$

Para la conversa, suponga que $S^1(\varphi)$ es satisfacible y sea $\mathfrak{A}$ un $\overline{\mathcal{L}}$-modelo de $S^1(\varphi)$, es decir,

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots x_{i-1} \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1})). \qquad (\maltese)$$

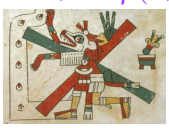
Como antes, transformamos $\mathfrak{A}$ en una $\mathcal{L}$-estructura simplemente olvidando la interpretación de los símbolos en $C \cup F$. Es claro que

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots x_{i-1} \exists x_i \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$$

porque ($\maltese$) se cumple.

□

Note que φ y $S(\varphi)$ no son necesariamente equivalentes. Por ejemplo, si $\varphi \equiv \exists x \psi(x, y)$ con $\psi(x, y)$ atómica, entonces $S(\varphi) \equiv \psi(c, y)$, que es equivalente a $\forall x \psi(x, y)$. Por supuesto, $\exists x \psi(x, y)$ y $\forall x \psi(x, y)$ no son equivalentes.



Ejemplo 1.2.12. Demos algunos ejemplos de FNP y eskolemización. Primero la FNPC.

1. Tenemos la fórmula $\psi \equiv \forall x \exists y P(x, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)$, que es equivalente a

$$\begin{aligned} \forall u[\exists y P(u, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)] &\Leftrightarrow \forall u \exists v[P(u, v) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \exists v[P(u, v) \vee \forall x \neg \forall y Q(x, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \exists v[P(u, v) \vee \forall x \exists y \neg Q(x, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \exists v \forall w[P(u, v) \vee \exists y \neg Q(w, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \exists v \forall w \exists z[P(u, v) \vee \neg Q(w, z)]. \end{aligned}$$

Otra posibilidad para 1 es

$$\begin{aligned} \psi \Leftrightarrow \forall u[\exists y P(u, y) \vee \neg \exists x \forall y Q(x, y)] &\Leftrightarrow \forall u[\exists y P(u, y) \vee \forall x \neg \forall y Q(x, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall w[\exists y P(u, y) \vee \neg \forall y Q(w, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall w \exists v[P(u, v) \vee \neg \forall y Q(w, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall w \exists v[P(u, v) \vee \exists y \neg Q(w, y)] \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall w \exists v \exists z[P(u, v) \vee \neg Q(w, z)]. \end{aligned}$$

2. Tenemos la fórmula $\varphi \equiv \forall x \forall y[\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \longrightarrow \exists u Q(x,y,u)$

$$\begin{aligned}\varphi &\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists\, w[(P(x,w) \wedge P(y,w)) \longrightarrow \exists u Q(x,y,u)] \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists\, w \exists z[(P(x,w) \wedge P(y,w)) \longrightarrow Q(x,y,z)].\end{aligned}$$

3. Sea $\theta \equiv \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\exists u Q(x,u) \longrightarrow \exists w Q(w,y)]]$.

$$\begin{aligned}\theta \equiv &\forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\exists u Q(x,u) \longrightarrow \exists w Q(w,y)]] \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\neg \exists u Q(x,u) \vee \exists w Q(w,y)]] \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y[\exists z P(x,y,z) \wedge [\forall u \neg Q(x,u) \vee \exists w Q(w,y)]] \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z[P(x,y,z) \wedge \forall u \exists w[\neg Q(x,u) \vee Q(w,y)]] \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z \forall u \exists w[P(x,y,z) \wedge [\neg Q(x,u) \vee Q(w,y)]]\end{aligned}$$

Ahora obtengamos su FNS.

1. La forma normal de Skolem de ψ es (según la primera versión de la FNP)

$$\forall u \forall w[P(u, f(u)) \vee \neg Q(w, g(u,w))].$$

2. La de φ es

$$\forall x \forall y \forall w[P(x,w) \wedge P(y,w) \longrightarrow Q(x,y,f(x,y,w))].$$

3. La de θ es

$$\forall x \forall y \forall u[P(x,y,f(x,y)) \wedge (\neg Q(x,u) \vee Q(g(x,y,u),y))].$$

Ejemplo 1.2.13. Considere

$$\varphi \equiv \forall x \exists y \forall z \exists v P(x,y,z,v).$$

Ya está en FNP, y su forma normal de Skolem es

$$\forall x \forall z P(x, f(x), z, g(x,z)).$$

«Tengo por madre y padre el montón de ceniza, la encrucijada». Decíanse estas palabras de las mujeres o de los hombres que estaban por ahí en la calle; no se lo habían mandado sus padres o sus madres, se quedaban en la calle por su gusto, simplemente porque les daba la gana.

Ejemplo 1.2.14. Ahora analizamos la fórmula

$$\varphi \equiv \exists y \forall x \forall z \psi(x, y, z).$$

Su FNS es

$$\forall x \forall z \psi(x, c, z).$$

Ya tenemos todo dispuesto para probar la no satisfacibilidad de ciertas fórmulas; siempre podemos trabajar con su FNS. En la siguiente sección tomaremos ventaja de esta forma normal para desplegar un método que corrobora en una forma sencilla la no satisfacibilidad de aquellas fórmulas que no tienen modelo.

Quetzalcóatl no figura entre los dioses en cuyo honor se celebraban las grandes fiestas organizadas cada 20 días. Figuraba, sin embargo, entre las divinidades más importantes en condición de igualdad con Tezcatlipoca y Huitzilopochtli, pero aparece, sobre todo, como el dios de los sacerdotes. Personalidad multiforme, dios del viento y planeta Venus, como «Serpiente Emplumada» está inextricablemente ligado a la edad de oro tolteca, reconocido sobre todo por los sacerdotes como el inventor de la escritura y del calendario ritual. La educación superior dada por los sacerdotes en los colegios-monasterios, que incluía especialmente la enseñanza de la escritura jeroglífica y el estudio de los libros sagrados, de la cronología y de la adivinación, estaba colocada bajo el patrocinio de Quetzalcóatl. Por el contrario, la enseñanza de las «casas de jóvenes» de los diversos barrios de la ciudad dada por «maestros de jóvenes» militares y laicos, provenía de Tezcatlipoca, uno de cuyos títulos, por cierto, era el de telpochtli, «hombre joven».

Estos dos sistemas de educación eran muy distintos, casi antagónicos. El primero se distinguía por su austeridad, por hacer hincapié en la teología, en la abnegación y en el dominio de sí mismo, y por la extensión (para el lugar y la época) de los conocimientos transmitidos. El segundo, esencialmente práctico y militar, intentaba desarrollar las virtudes guerreras, pero dejaba poco espacio a los valores intelectuales y espirituales; los jóvenes, ávidos de emular las proezas de sus mayores, todos ellos guerreros consumados, seguían un entrenamiento severo, mas para relajarse pasaban las veladas en la «casa de los cantos», donde bailaban y tocaban el tambor y la flauta. Los de mayor edad tenían relaciones con las cortesanas, cuyos tocados lujosos y modales refinados nos ha descrito Sahagún.

1.3 Teoría de Herbrand

En este apartado, hasta cierto punto sí usaremos resultados de la lógica proposicional; se sugiere revisar [FeVi09]. Recuerde que para probar que φ es satisfacible, debemos exhibir un modelo de φ. Pero para mostrar que φ no es satisfacible, debemos verificarlo en toda estructura. Esto es prácticamente imposible, pero probaremos que, en ciertas circunstancias, bastará mostrar que φ no se cumple en un tipo particular de estructura llamada estructura de Herbrand. Para lograrlo trataremos de reducir los enunciados de la lógica de predicados a enunciados de la lógica proposicional. Formalmente, dado φ en FNS, encontraremos un conjunto $E(\varphi)$ (posiblemente infinito) de enunciados de la lógica proposicional tal que φ es satisfacible si y sólo si $E(\varphi)$ es satisfacible. Sabemos que $E(\varphi)$ no es satisfacible si y sólo si $\square \in Res^*(E(\varphi))$, así que podemos usar el método de resolución de la lógica proposicional para mostrar que un enunciado de la lógica de predicados en FNS no es satisfacible.

Dado que podemos encontrar la FNS de cualquier enunciado φ, este método es aplicable para cualquier enunciado de la lógica de predicados.

El procedimiento que describiremos no necesariamente decide si un enunciado φ es satisfacible. Ya que $E(\varphi)$ puede ser infinito, es posible que no podamos decidir si $\square$ pertenece o no a $Res^*(E(\varphi))$. Pero si $\square \in Res^*(E(\varphi))$, por el teorema de compacidad, podemos derivar $\square$ en una cantidad finita de pasos. En este caso podemos afirmar que φ no es satisfacible.

1.3.1 Estructura de Herbrand

En este apartado no suponemos que la igualdad aparece necesariamente en los lenguajes.

Definición 1.3.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. El universo de Herbrand para $\mathcal{L}$ es el conjunto de todos los $\mathcal{L}$-términos básicos, es decir, sin variables libres. Si el conjunto de símbolos de constante de $\mathcal{L}$ es vacío, expandemos $\mathcal{L}$ añadiendo un nuevo símbolo de constante.

> «Se avienta de cara, de dientes». Decíanse estas palabras del rey o del noble que no hablaba como se debe, que decía cosas que daban mucha vergüenza, que no era necesario decir; se le decía, ve con cuidado, que en público te estas aventando de cara, es decir, te estás poniendo en vergüenza; también se le decía: te manchas, te perjudicas, dañas tu vida y tu palabra.

El universo de Herbrand se puede construir por etapas:

$$H_0 = \begin{cases} \{c : c \text{ es una constante en } \mathcal{L}\} \\ \{c_0\} \text{ si } \mathcal{L} \text{ carece de constantes.} \end{cases}$$

donde c_0 es una constante nueva, es decir, no está en $\mathcal{L}$ y se introduce arbitrariamente. Ya que tenemos H_i obtenemos H_{i+1}:

$H_{i+1} = H_i \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) : a_j (1 \leq j \leq n)$ son $\mathcal{L}$-términos en H_i y f es un símbolo de n-función en $\mathcal{L}\}$. Finalmente $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$.

Ejemplo 1.3.2. Suponga que tenemos $\mathcal{L} = \{P, f, a\}$, donde P es 1-predicado y f es 1-función. Entonces

$$\begin{aligned} H_0 &= \{a\} \\ H_1 &= \{a, f(a)\} \\ H_2 &= \{a, f(a), ff(a)\} \\ &\vdots \;\vdots\; \vdots \\ H &= \{a, f(a), ff(a), fff(a), \ldots\}. \end{aligned}$$

Recuerde que una $\mathcal{L}$-estructura consiste en un universo e interpretaciones de cada símbolo en $\mathcal{L}$. Suponga que tomamos el universo de Herbrand de $\mathcal{L}$ como el universo de nuestra estructura, y llame H a este conjunto, de modo que existe una interpretación natural para cada constante y función de $\mathcal{L}$. Cualquier $\mathcal{L}$-estructura que tenga a H como su universo e interprete las constantes y funciones en esta forma natural se llama $\mathcal{L}$-estructura de Herbrand.

Ejemplo 1.3.3. Suponga que $\mathcal{L} = \{f, R, c\}$, donde f es 1-función, R es una 2-relación y c una constante. El universo de Herbrand H es:

$$H = \{c, f(c), ff(c), fff(c), \ldots\}.$$

Sea $\mathfrak{H} = \langle H, f^{\mathfrak{H}}, R^{\mathfrak{H}}, c^{\mathfrak{H}} \rangle$. El conjunto H tiene el elemento c, así que hacemos $c^{\mathfrak{H}} = c$. Igualmente hay una interpretación obvia de f. Debemos encontrar una función $f^{\mathfrak{A}} : H \longrightarrow H$. Dado un elemento x de H, éste tiene la forma c o $f \cdots f(c)$, así que definimos $f^{\mathfrak{H}}(x) = f(c)$ o $ff \ldots f(c)$, respectivamente.

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{H}$ es una estructura de Herbrand si tiene universo H e interpreta las constantes y funciones como recién se describió.

Es una estructura de Herbrand sin saber aún cómo se interpretan los símbolos de relación, por lo que puede haber muchas $\mathcal{L}$-estructuras de Herbrand si $\mathcal{L}$ contiene al menos un símbolo de relación.

Sea H el universo de Herbrand y $\mathfrak{H}$ la estructura de Herbrand para $\mathcal{L}$. Tenemos los siguientes hechos fácilmente verificables:

- H es finito si y sólo si $\mathcal{L}$ carece de funciones.
- $\mathfrak{H}$ es la única $\mathcal{L}$-estructura de Herbrand si y sólo si $\mathcal{L}$ carece de símbolos de relación.

Ya sabemos elaborar el universo de Herbrand para una fórmula φ; ahora aprenderemos cómo construirlo para un conjunto de fórmulas.

Definición 1.3.4. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. El lenguaje de Herbrand para Γ, que se denota como $\mathcal{L}_\Gamma$, se define de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{L}_0$ el conjunto de relaciones, funciones y constantes que aparecen en las fórmulas en Γ. Si $\mathcal{L}_0$ no tiene constantes, entonces $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_0 \cup \{c\}$. En otro caso, $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_0$.

No requerimos trabajar con todos los símbolos de $\mathcal{L}$, sino sólo con aquellos que aparecen en Γ.

El universo de Herbrand para Γ, denotado como $H(\Gamma)$, es el universo de Herbrand de $\mathcal{L}_\Gamma$. $\mathfrak{H}$ es un modelo de Herbrand de Γ si $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura de Herbrand y $\mathfrak{H} \vDash \varphi$, para cada $\varphi \in \Gamma$.

Si Γ consiste en un enunciado φ, remplazamos Γ en la notación anterior por φ.

Es mi agua y mi comida. Quiere decir: es lo mío, mi propiedad, es mi oficio.

Si el símbolo de igualdad $=$ aparece en el lenguaje, pueden ocurrir situaciones que quisieramos evadir.

Ejemplo 1.3.5. Considere, por ejemplo, el enunciado $\varphi \equiv \forall x((f(x) \neq x) \wedge (ff(x) = x)$. El lenguaje de Herbrand para φ es $\mathcal{L}_\varphi = \{f, c\}$, donde f es una 1-función y c una constante. El universo de Herbrand para φ es $H(\varphi) = \{c, f(c), ff(c), \ldots\}$.

En cualquier $\mathcal{L}_\varphi$-estructura de Herbrand, c y $ff(c)$ son elementos distintos del universo $H(\varphi)$. Como φ asegura que $\forall x ff(x) = x$ el enunciado φ no tiene modelo de Herbrand, pero φ es satisfacible: sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}_2, f^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $f^{\mathfrak{A}}(x) = x + 1 \bmod 2$.

El siguiente teorema muestra que esta situación extraña sólo ocurre cuando φ incluye el símbolo =. Así que si φ es satisfacible y no contiene =, entonces φ tiene un modelo de Herbrand. Mejor aún:

Teorema 1.3.6. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados en FNS que no incluyen =. Entonces Γ es satisfacible si y sólo si Γ tiene un modelo de Herbrand.*

Demostración. Si Γ tiene un modelo de Herbrand, por supuesto que Γ es satisfacible.

A la inversa, suponga que Γ es satisfacible. Sean $\mathcal{L}_\Gamma$ el lenguaje de Herbrand de Γ, $\mathfrak{N}$ una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura que modela cada $\varphi_i \in \Gamma$ y $\mathfrak{M}'$ una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura de Herbrand para Γ. Definamos una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura $\mathfrak{M}$ como un híbrido de $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}'$. El universo de $\mathfrak{M}$ es $H(\Gamma)$, el universo de Herbrand para $\mathcal{L}_\Gamma$. Suponga que $\mathfrak{M}$ interpreta las funciones y las constantes en la misma forma que $\mathfrak{M}'$, y las relaciones en la misma forma que $\mathfrak{N}$. Como $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ pueden tener universos distintos, debemos aclarar esto último. En $\mathfrak{M}$ ya sabemos interpretar funciones y constantes; ahora debemos describir cómo interpretar los símbolos de relación. Si R es una n-relación de $\mathcal{L}_\Gamma$ y $t_1, \ldots, t_n$ están en el universo $H(\Gamma)$ de $\mathfrak{M}$, debemos decidir si $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ o $M \vDash \neg R(t_1, \ldots, t_n)$. Ya que cada $t_i \in H(\Gamma)$ es un $\mathcal{L}_\Gamma$-término sin variables y $\mathfrak{N}$ es una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura, cada t_i está representado por un elemento del universo N de $\mathfrak{N}$, por lo que podemos decidir si $\mathfrak{N} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ o $\mathfrak{N} \vDash \neg R(t_1, \ldots, t_n)$. Defina $\mathfrak{M}$ de tal manera que $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$. Note que el lenguaje original puede no contener constantes, por lo que al calcular $H(\Gamma)$ se añade c. Puesto que c no tiene interpretación en $\mathfrak{N}$, ya que c no aparece en el lenguaje original, interpretamos a c en forma arbitraria. El teorema se sigue de las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. Para todo $\mathcal{L}_\Gamma$-enunciado ψ libre de cuantificadores, $\mathfrak{M} \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi$.

Afirmación 2. Para todo $\mathcal{L}_\Gamma$-enunciado en FNS, si $\mathfrak{N} \vDash \psi$ entonces $\mathfrak{M} \vDash \psi$.

Supongamos, por el momento, que ambas afirmaciones son ciertas. De la 2 se sigue que $\mathfrak{M}$ debe ser modelo de Γ. Ya que $\mathfrak{H}$ es una $\mathcal{L}_\Gamma$-estructura de Herbrand, $\mathfrak{M}$ es un modelo de Herbrand de Γ, lo que queríamos demostrar. Resta probar las afirmaciones.

Demostración de la afirmación 1. Sea ψ un $\mathcal{L}_\Gamma$-enunciado sin cuantificadores. Mostramos que $\mathfrak{M} \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi$ por inducción en la construcción de ψ.

Si ψ es atómico, como ψ no usa =, ψ debe ser $R(t_1, \ldots, t_n)$ para alguna n-relación R en $\mathcal{L}_\Gamma$ y $\mathcal{L}_\Gamma$-términos t_i. Puesto que ψ es un enunciado, cada t_i debe estar libre de variables. Esto es, cada $t_i \in H(\Gamma)$. Por la definición de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi$.

Suponga que $\mathfrak{M} \vDash \psi_1$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi_1$ y $\mathfrak{M} \vDash \psi_2$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi_2$. Es claro que $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi_1$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \neg\psi_1$ y $\mathfrak{M} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$.

Se sigue que $\mathfrak{M} \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi$ para cualquier fórmula ψ sin cuantificadores.

(1)

Demostración de la afirmación 2. Probaremos la afirmación por inducción en la cantidad de cuantificadores en ψ. Si ψ no tiene cuantificadores, por la afirmación 1, $\mathfrak{M} \vDash \psi$ si y sólo si $\mathfrak{N} \vDash \psi$.

Suponga que $\psi \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n \psi_0(x_1, \dots, x_n)$, donde ψ_0 está libre de cuantificadores. Nuestra hipótesis de inducción es que la afirmación 2 se cumple para cualquier enunciado en FNS que tenga menos que n cuantificadores.

Sea $\psi'(x_1)$ la fórmula $\forall x_2 \dots \forall x_n \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que se obtiene al eliminar el primer cuantificador del enunciado ψ. Sea t un $\mathcal{L}_\Gamma$-término sin variables. Esto es, t está en $H(\Gamma)$. Si $\mathfrak{N} \vDash \psi$, entonces $\mathfrak{N} \vDash \psi'(t)$ por la semántica de $\forall$, lo que da lugar $\mathfrak{M} \vDash \psi'(t)$ (por hipótesis de inducción). Pero t fue un elemento arbitrario de $H(\Gamma)$. En consecuencia, si $\mathfrak{N} \vDash \psi$, ocurre $\mathfrak{M} \vDash \psi'(t)$ para todo $t \in H(\Gamma)$. Como $H(\Gamma)$ es el universo de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \vDash \forall x_1 \psi'(x_1)$ (por la semántica de $\forall$). Puesto que $\forall x_1 \psi'(x_1)$ y ψ son el mismo, completamos la demostración de la afirmación 2.

□

En particular, si Γ en el teorema previo consiste en un sólo enunciado φ, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.7. *Sea φ un enunciado sin $=$ en FNS. Entonces φ es satisfacible si y sólo si φ tiene un modelo de Herbrand.*

Nos queda una gran tarea: debemos describir cómo proceder cuando sí aparece $=$. Suponga que φ está en FNS y usa $=$. Definimos una fórmula φ_E que no contiene igualdad. El último corolario no se aplica a φ, pero sí a φ_E. Si demostramos que φ es satisfacible si y sólo si φ_E es satisfacible, habremos terminado. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de φ. Esto es, $\mathcal{L}$ es el conjunto finito de constantes, relaciones y funciones que aparecen en φ. Sean E una relación binaria que no está en $\mathcal{L}$, $\varphi_{\neq}$ el enunciado que se obtiene al remplazar cada ocurrencia de $t_1 = t_2$ en φ (para $\mathcal{L}$-términos t_1 y t_2) con $E(t_1, t_2)$, y φ_{ER} el siguiente enunciado:

$$\forall x \forall y \forall z (E(x,x) \wedge (E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)) \wedge (E(x,y) \wedge E(y,z) \longrightarrow E(x,z)))$$

Este enunciado afirma que E es una relación de equivalencia. Para cada relación $R \in \mathcal{L}$, sea φ_R la fórmula,

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \wedge R(x_1, \dots, x_n)) \longrightarrow R(y_1, \dots, y_n)),$$

donde R es una n-relación. Sea φ_1 la conjunción de todas las φ_R para toda $R \in \mathcal{L}$. Igualmente, para cada función $f \in \mathcal{L}$, sea φ_f la fórmula:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \longrightarrow E(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n))),$$

donde f es una n-función. Sea φ_2 la conjunción de todas las φ_f para todas las funciones $f \in \mathcal{L}$. Por último sea φ'_E el enunciado $\varphi_{\neq} \wedge \varphi_{ER} \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Las fórmulas φ_{ER}, φ_1 y φ_2 en conjunto afirman los axiomas de igualdad para E. Note que $\varphi_{\neq}$, φ_{ER}, φ_1 y φ_2 no contienen = y están en FNS. Si transformamos φ'_E a FNP, obtendremos una fórmula φ_E sin = y en FNS.

Lema 1.3.8. *Para toda fórmula φ en FNS, φ es satisfacible si y sólo si φ_E es satisfacible.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}$ el lenguaje de φ y $\mathcal{L}_E = \mathcal{L} \cup \{E\}$, donde E es una relación binaria que no pertenece a $\mathcal{L}$. Si $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, entonces podemos obtener un modelo de φ_E al interpretar E como la igualdad en $\mathfrak{M}$.

Para la recíproca, suponga que φ_E tiene un modelo $\mathfrak{N}$. Lo que haremos es elaborar una estructura en la que E se comporte como la igualdad. Por definición de φ_E, E es una relación de equivalencia en $\mathfrak{N}$. Sea U el universo de $\mathfrak{N}$ y U/E el conjunto de E-clases de equivalencia en U. Definimos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{N}_E$ que tenga a U/E como universo, por lo que debemos decir cómo interpreta $\mathfrak{N}_E$ las constantes, relaciones y funciones de $\mathcal{L}$.

- Para cada $a \in N$, sea $[a]$ la E-clase de equivalencia de a. Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, $\mathfrak{N}_E$ interpreta c como $[c^{\mathfrak{N}}]$.
- Sea R una n-relación en $\mathcal{L}$. Para cada n-ada $([a_1], \ldots, [a_n])$ de elementos de U/E,

$$\mathfrak{N}_E \vDash R([a_1], \ldots, [a_n]) \text{ si y sólo si } \mathfrak{N} \vDash R(a_1, \ldots, a_n).$$

- Sea f una n-función en $\mathcal{L}$. Para $[b] \in U/E$ y $([a_1], \ldots, [a_n])$ elementos de U/E,

$$\mathfrak{N}_E \vDash f([a_1], \ldots, [a_n]) = [b] \text{ si y sólo si } \mathfrak{N} \vDash f(a_1, \ldots, a_n) = b.$$

Ya que $\mathfrak{N}$ modela φ_1 y φ_2, la estructura $\mathfrak{N}_E$ está bien definida. Es claro que E se comporta como la igualdad $=$ en $\mathfrak{N}_E$. Por último se puede mostrar que $\mathfrak{N}_E \vDash \varphi$ por inducción en la construcción de φ (véase pág. 209 y siguientes del Volumen I).

Ejemplo 1.3.9. Considere el enunciado $\forall x((f(x) \neq x) \wedge (ff(x) = x)) \equiv \varphi$. Ya vimos que es satisfacible. Entonces $\varphi_{\neq}$ es el enunciado

$$\forall x(\neg E(f(x), x) \wedge E(ff(x), x))$$

y φ_2 es el enunciado

$$\forall x \forall y(E(x, y) \longrightarrow E(f(x), f(y))).$$

Como φ no contiene símbolos de relación, no tenemos que pensar en φ_1. La conjunción φ'_E de $\varphi_{\neq}$, φ_2 y φ_{ER} es equivalente al siguiente enunciado φ_E en FNS,

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y \forall z(\neg E(f(x), x) \wedge E(ff(x), x) \wedge (E(x, y) \longrightarrow E(f(x), f(y))) \wedge \\ \wedge E(x, x) \wedge (E(x, y) \leftrightarrow E(y, x)) \wedge ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \longrightarrow E(x, z))).\end{array}$$

Por el lema 1.3.8, φ_E es satisfacible y por el corolario 1.3.7 tiene modelo de Herbrand. Esto es, existe un modelo para φ_E que tiene universo $H(\varphi_E) = \{c, f(c), ff(c), \ldots\}$.

En efecto, podemos interpretar E en $H(\varphi)$ como la relación de equivalencia que tiene las dos siguientes clases,

$C_{im} = \{t \in H(\varphi) : t$ tiene una cantidad impar de $f\}$ y
$C_{par} = \{t \in H(\varphi) : t$ tiene una cantidad par de $f\}$.

Se sigue que φ tiene un modelo con sólo 2 elementos. Sea $\mathfrak{N}$ la estructura con universo $\{C_{im}, C_{par}\}$ que interpreta la función f mediante la regla

$$f(C_{im}) = C_{par} \qquad \text{y} \qquad f(C_{par}) = C_{im}.$$

Es claro que $\mathfrak{N} \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.3.10. Supongamos que

$$\gamma \equiv \forall\, x R(x, x) \wedge \forall\, y(gf(y) = f(y)) \rightarrow \exists\, z R(z, g(z)).$$

Queda como ejercicio probar que es satisfacible. Primero obtenemos $\gamma_{\neq}$:

$$\gamma_{\neq} \equiv \forall\, x R(x, x) \wedge \forall\, y E(gf(y), f(y)) \rightarrow \exists\, z R(z, g(z))$$

La transformamos a FNP:

$$\gamma_{\neq} \equiv \forall\, x \forall\, y \exists\, z(R(x, x) \wedge E(gf(y), f(y)) \rightarrow R(z, g(z)),$$

para obtener su FNS:

$$\gamma_{\neq} \equiv \forall x \forall y (R(x,x) \wedge E(gf(y), f(y)) \rightarrow R(h(x,y), gh(x,y))$$

El nuevo símbolo de función es h y depende de x y y. Ahora obtenemos el resto de fórmulas asociadas:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ER} \equiv & \forall x \forall y \forall z (E(x,x) \wedge (E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)) \wedge (E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z)) \\
\gamma_R \equiv & \forall x_1, x_2, y_1, y_2 (E(x_1, y_1)\ E(x_2, y_2) \wedge R(x_1, y_1) \rightarrow R(x_2, y_2)) \\
\gamma_f \equiv & \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(f(x), f(y))) \\
\gamma_g \equiv & \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(g(x), g(y))) \\
\gamma_h \equiv & \forall x_1, x_2, y_1, y_2 (E(x_1, y_1) \wedge E(x_2, y_2) \rightarrow E(h(x_1, y_1), h(x_2, y_2)) \\
\gamma_1 \equiv & \gamma_R \\
\gamma_2 \equiv & \gamma_f \wedge \gamma_g \wedge \gamma_h \\
\gamma_E \equiv & \gamma_{\neq} \wedge \gamma_{ER} \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \\
\gamma_E \equiv & \forall x \forall y \forall u \forall v (R(x,x) \wedge E(gf(y), f(y)) \rightarrow R(h(x,y), gh(x,y)) \wedge \\
& (E(x,x) \wedge (E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)) \wedge (E(x,y) \wedge E(y,u) \rightarrow E(x,u)) \\
& (E(x,y) \wedge E(u,v) \wedge R(x,y) \rightarrow R(u,v)) \wedge (E(x,y) \rightarrow E(f(x), f(y)) \\
& (E(x,y) \rightarrow E(g(x), g(y))) \wedge (E(x,y) \wedge E(u,v) \rightarrow E(h(x,y), h(u,v))))
\end{aligned}$$

Por el lema 1.3.8, γ_E es satisfacible (puesto que γ lo es) y por el corolario 1.3.7 tiene un modelo de Herbrand. Construyamos su modelo de Herbrand: el universo es

$$H(\gamma_E) = \{c, f(c), g(c), h(c,c), fg(c), gf(c), h(c, f(c), h(f(c), c), h(g(c), c), \ldots\}.$$

Por la definición de modelo de Herbrand, las interpretaciones $c^{\mathfrak{H}}, f^{\mathfrak{H}}, g^{\mathfrak{H}}$ y $h^{\mathfrak{H}}$ están dadas; sólo resta interpretar R y E: proponemos $R^{\mathfrak{H}} = H(\gamma_E) \times H(\gamma_E)$ y establecemos que para cualesquier t_1, t_2 elementos de $H(\gamma_E)$,

$$(t_1, t_2) \in E^{\mathfrak{H}} \qquad \Leftrightarrow \qquad t_1 \text{ y } t_2 \text{ son sintácticamente iguales.}$$

Entonces $\mathfrak{H} = \langle H(\gamma_E), f^{\mathfrak{H}}, g^{\mathfrak{H}}, h^{\mathfrak{H}}, R^{\mathfrak{H}}, E^{\mathfrak{H}}, c^{\mathfrak{H}} \rangle \models \gamma_E$.

¿Qué logramos en esta sección? demostrar que φ es satisfacible si y sólo si es satisfacible en un modelo de Herbrand (módulo una fórmula sin igualdad). Es evidente que resulta demasiado complicado mostrar que una fórmula es satisfacible mediante este procedimiento. La verdadera utilidad de este método aparece cuando queremos cerciorarnos de que una fórmula no es satisfacible, lo cual es el propósito de la siguiente sección.

Las sociedades mexicanas antiguas estaban fuertemente jerarquizadas. En la cumbre, los nobles, los guerreros y los sacerdotes podían consagrarse con libertad a especulaciones bastante complejas sobre el fondo mitológico que la tradición les entregaba; en la base, la población esencialmente campesina sin duda no superaba apenas el nivel de las creencias más difusas, acompañadas de una participación más o menos regular en las grandes ceremonias.

1.4 El método de Herbrand

En esta sección suponemos que la igualdad $=$ no pertenece al lenguaje, a menos que se indique lo contrario en una situación concreta, y que el lenguaje es numerable. Ahora describimos un método para determinar cuándo un enunciado φ no es satisfacible. Ya hemos mostrado que podemos suponer que φ no contiene = y que está en FNS. Sea $\varphi \equiv \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, donde φ_0 carece de cuantificadores y de $=$. Sean $H(\varphi)$ el universo de Herbrand de φ y

$$E(\varphi) = \{\varphi_0(t_1, \ldots, t_n) : t_1, \ldots, t_n \in H(\varphi)\}$$

que llamaremos el conjunto de las instancias básicas de φ, por lo que $\varphi_0(t_1, \ldots, t_n)$ es una instancia básica, para términos básicos $t_1, \ldots, t_n$. $E(\varphi)$ es el conjunto que se obtiene al sustituir términos de $H(\varphi)$ en lugar de las variables de φ_0 en todas las formas posibles. Sea $\{\varphi_1, \varphi_2 \ldots\}$ una enumeración de $E(\varphi)$. Se afirma que φ es satisfacible si y sólo si $E(\varphi)$ es satisfacible. Si $\mathfrak{M}$ es un modelo de φ, entonces $\mathfrak{M} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$. En particular, $\mathfrak{M} \vDash \varphi_0(t_1, \ldots, t_n)$ para todos los $\mathcal{L}_\varphi$-términos t_i sin variables. Es decir, $\mathfrak{M}$ modela cada φ_i en $E(\varphi)$ así que $E(\varphi)$ es satisfacible.

En forma recíproca, suponga que $E(\varphi)$ es satisfacible. Entonces $E(\varphi)$ tiene un modelo de Herbrand $\mathfrak{M}$. Note que el lenguaje de Herbrand para $E(\varphi)$ es el mismo que el lenguaje de Herbrand para φ, por lo que el universo de $\mathfrak{M}$ es $H(\varphi)$. Para cada $t_1, \ldots, t_n$ en $H(\varphi)$, $\mathfrak{M}$ modela $\varphi_0(t_1, \ldots, t_n)$ ya que este enunciado está en $E(\varphi)$. De la semántica del cuantificador $\forall$ se sigue que $\mathfrak{M} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$. Esto es, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ y φ es satisfacible. En consecuencia, φ no es satisfacible si y sólo si $E(\varphi)$ no es satisfacible. Como $E(\varphi)$ contiene enunciados sin cuantificadores, podemos ver a $E(\varphi)$ como un conjunto de enunciados de la lógica proposicional. Ya que φ está en FNS, cada φ_i en $E(\varphi)$ está en FNC. Sabemos, del cálculo proposicional, que el conjunto $E(\varphi)$ no es satisfacible si y sólo si $\square \in Res^*(E(\varphi))$. Por compacidad de la lógica proposicional, $E(\varphi)$ no es satisfacible si y sólo si algún subconjunto finito $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subseteq E(\varphi)$ no es satisfacible. Así que, si φ no es satisfacible, $\square \in Res^*(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\})$ para algún m.

Recuerde que un término básico t es aquel que no tiene variables. En lo sucesivo, representamos mediante $Term_0(\mathcal{L})$ los $\mathcal{L}$-términos básicos. Con los comentarios recién vertidos es fácil probar el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Sea Φ un conjunto de enunciados universales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Φ *es satisfacible.*

(ii) $E(\Phi)$ *es satisfacible.*

Cabe mencionar que $E(\Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} E(\varphi)$.

Demostración. (i)⇒(ii). Es trivial pues $\forall\, \vec{x}\psi \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$ para cualesquier términos básicos $\vec{t}$.

(ii)⇒(i). Supongamos que $\mathfrak{A} \models E(\Phi)$. El subconjunto

$$B = \{t^{\mathfrak{A}} : t \in Term_0(\boldsymbol{\mathcal{L}})\}$$

no es vacío (porque el lenguaje de Φ contiene al menos una constante, de lo contrario, se la añadimos), incluye los valores de las constantes del lenguaje y es cerrado respecto a funciones $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ (ya que si f es un símbolo de n-función y $\vec{t} \in Term_0(\boldsymbol{\mathcal{L}})$, $f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t^{\mathfrak{A}}) \in B$). Considere la estructura $\mathfrak{B}$ con universo B en la que los símbolos de constante del lenguaje se interpretan como en $\mathfrak{A}$. Si $t_1, \ldots, t_n \in B$ y g es un símbolo de n-función, $f^{\mathfrak{B}}(t_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n)$ y si R es un símbolo de n-relación, $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^n$.

Afirmación 1. Si φ es una fórmula sin cuantificadores y $a_1, \ldots, a_n \in B$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Demostración de la afirmación 1. Procedemos por inducción en la construcción de φ. Si $\varphi \equiv R(v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, entonces $\mathfrak{B} \models R[a_1, \ldots, a_n]$ por definición de $R^{\mathfrak{B}}$. El recíproco es similar.

Los casos $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, así como $\varphi \equiv \neg\psi$ se siguen de la hipótesis de inducción. (1)

Es claro que $\mathfrak{B} \models E(\Phi)$ ya que $\mathfrak{A} \models E(\Phi)$. Por consiguiente, $\mathfrak{B} \models \Phi$ de acuerdo con lo dicho antes del teorema. □

Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.2 (Herbrand). *Sean Φ un conjunto de enunciados universales y $\exists \vec{y}\psi$ un enunciado, donde ψ no tiene cuantificadores. Supongamos que $\Phi \models \exists \vec{y}\psi$. Entonces existen términos básicos $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_l$ tales que $\Phi \models (\psi(\vec{y}/\vec{t}_1) \vee \cdots \vee \psi(\vec{y}/\vec{t}_l))$.*

Demostración. Si $\Phi \models \exists \vec{y}\psi$, entonces $\Phi \cup \{\forall \vec{y} \neg\psi\}$ no es satisfacible, así que por el teorema 1.4.1 $\Phi \cup \{\neg\psi(\vec{y}/\vec{t}) : \vec{t} \in Term_0(\mathcal{L})\}$ no es satisfacible; y por compacidad, existen $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_l$ tales que

$$\Phi \models (\psi(\vec{y}/\vec{t}_1) \vee \cdots \vee \psi(\vec{y}/\vec{t}_l)).$$

□

Observe que, para Φ y $\exists \vec{y}\psi$ como en el teorema 1.4.2, sabemos que ψ tiene una solución; es decir, en el caso en que $\Phi \models \exists \vec{y}\psi$, hay una cantidad finita de n-adas $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_l$ tales que en cada modelo $\mathfrak{A}$ de ψ al menos una de las $\vec{t}_i$ es una solución. Sin embargo, considere $\{R(c) \vee R(d)\} \models \exists x R(x)$; este ejemplo muestra que, en general, no podemos esperar que $l = 1$. Después veremos que, con ciertas restricciones en Φ y $\exists \vec{y}\psi$, podemos elegir $l = 1$.

Retornemos al teorema 1.4.1, éste proporciona un método para averiguar si φ no es satisfacible. Verifique si $\square$ está en $Res^*(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\})$ para algún m y $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subseteq E(\varphi)$. Recuerde que $Res^*(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\})$ es un conjunto finito.

Si $\square \in Res^*(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\})$, nos detenemos y concluimos que φ no es satisfacible.

De lo contrario, continuamos y consideramos $Res^*(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}\})$. Si φ no es satisfacible, este método encontrará $\square$ en algún momento y concluye que φ no es satisfacible en una cantidad finita de etapas. Si φ es satisfacible, este método continuará por siempre.

En principio, tenemos un método para mostrar que un enunciado dado no es satisfacible. La primera etapa es que φ esté en FNS y no contenga =. Esto se puede hacer relativamente rápido. Pero mostrar que $\square \in Res^*(E(\varphi))$ puede tomar mucho tiempo pues este método no es eficiente. Aun si $\square \in Res^*(E(\varphi))$, puede tomar un largo periodo de tiempo averiguarlo.

Ejemplo 1.4.3. Considere el enunciado $\varphi \equiv \forall x \forall z\ ((\neg P(x) \vee Q(f(x), x)) \wedge P(g(b)) \wedge \neg Q(x, z))$, que está en FNS.

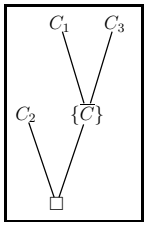
$\varphi \equiv \forall x \forall z \varphi_0$, donde $\varphi_0 = (\neg P(x) \vee Q(f(x), x)) \wedge P(g(b)) \wedge \neg Q(x, z)$. La siguiente resolución muestra que φ no es satisfacible.

El universo de Herbrand es:

$$\begin{aligned} H =&\{b, g(b), f(b), fg(b), gf(b), \ldots\} \\ E(\varphi) =&\{\{\overline{P}(g(b)), Q(fg(b), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\overline{Q}(f(b), b)\} \\ &\{\overline{P}(b), Q(f(b), b)\}, \{P(g(b))\}, \{\overline{Q}(b, b)\}, \{\overline{Q}(fg(b), g(b))\}, \ldots\}, \end{aligned}$$

y sean

$$\begin{aligned} A =&Q(f(b), b) & B =&Q(fg(b), g(b)) \\ C =&P(g(b)) & D =&P(b) \\ C_1 =&\{\overline{C}, B\} & C_2 =&\{C\} \\ C_3 =&\{\overline{B}\}. & E =&Q(b, b) \end{aligned}$$



Ejemplo 1.4.4. Sea $\psi \equiv \forall x[P(x) \wedge (\neg P(x) \vee Q(f(x))) \wedge \neg Q(f(x))]$.
$\psi_0 \equiv P(x) \wedge (\neg P(x) \vee Q(f(x))) \wedge \neg Q(f(x))$.
El universo de Herbrand

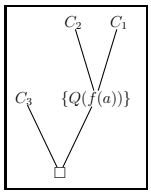
$$H = \{a, f(a), ff(a), fff(a), \ldots\},$$

mientras que

$$\begin{aligned} E(\psi) =&\{P(a) \wedge (\neg P(a) \vee Q(f(a))) \wedge \neg Q(f(a))), \ldots\} \\ =&\{\{P(a)\}, \{\overline{P}(a), Q(f(a))\}, \{\overline{Q}(f(a))\}, \ldots\}, \end{aligned}$$

Considere

$$C_1 = \{P(a)\}, \quad C_2 = \{\overline{P}(a), Q(f(a))\}, \quad C_3 = \{\overline{Q}(f(a))\}.$$



En consecuencia, ψ no es satisfacible.

Se sigue que el problema de satisfacibilidad para enunciados universales se puede reducir a la satisfacibilidad de enunciados sin cuantificadores, enunciados que se comportan como fórmulas proposicionales. A continuación formalizamos esta idea. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable con al menos un símbolo de relación. El conjunto

$$Atm(\mathcal{L}) = \{R(t_1, \ldots, t_n) : R \text{ es un símbolo de } n\text{-relación}, \vec{t} \in Term(\mathcal{L})\}$$

es a lo sumo numerable.

Sea $\iota_0 : Atm(\mathcal{L}) \longrightarrow \{P_1, P_2, \ldots\}$ una biyección entre las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$ y las variables proposicionales. Extendemos ι_0 a una aplicación ι definida en el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas sin cuantificadores:

$$\begin{aligned} \iota(\varphi) &= \iota_0(\varphi) \quad \text{si } \varphi \in Atm(\mathcal{L}). \\ \iota(\neg\varphi) &= \neg\iota(\varphi). \\ \iota(\varphi \wedge \psi) &= \iota(\varphi) \wedge \iota(\psi). \\ \iota(\varphi \vee \psi) &= \iota(\varphi) \vee \iota(\psi). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que ι es una biyección entre $Fml(\mathcal{L})$ y las fórmulas proposicionales.

Lema 1.4.5. *Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\mathcal{A}$ una asignación (según el cálculo proposicional). Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en fórmulas atómicas, es decir, para cualquier $\varphi \in Atm(\mathcal{L})$,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{A} \models \iota_0(\varphi).$$

Entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en cada enunciado sin cuantificadores, es decir, para todo enunciado ψ sin cuantificadores,

$$\mathfrak{A} \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{A} \models \iota(\psi).$$

Demostración. Ejercicio sencillo. ∎

Proposición 1.4.6. *(a) Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, existe una asignación $\mathcal{A}$ tal que $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en cada enunciado sin cuantificadores.*
(b) Para toda asignación $\mathcal{A}$, existe una estructura de Herbrand $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en todo enunciado sin cuantificadores.

Demostración. (a) Dada $\mathfrak{A}$, definimos la asignación $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(P) = V \Leftrightarrow \iota^{-1}(P) \text{ es un enunciado y } \mathfrak{A} \models \iota^{-1}(P).$$

En consecuencia, $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en los enunciados atómicos, por lo que coinciden en cada enunciado sin cuatificadores.

(b) Dada $\mathcal{A}$, sea $\mathfrak{A}$ la estructura de Herbrand con

$$R^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{A} \models \iota(R(t_1, \ldots, t_n)).$$

Se sigue que $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en los enunciados atómicos. Por lo tanto, $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}$ coinciden en enunciados sin cuantificadores. □

Corolario 1.4.7. *Sea $\Phi \cup \{\psi\}$ un conjunto de enunciados sin cuantificadores. Entonces*

(a) Φ es satisfacible si y sólo si $\iota(\Phi)$ es satisfacible (si y sólo si Φ tiene un modelo de Herbrand).

(b) $\Phi \models \psi$ si y sólo si $\iota[\Phi] \models \iota(\psi)$.

□

Con este resultado podemos ver a los enunciados sin cuantificadores, respecto a satisfacibilidad, como fórmulas proposicionales, lo cual nos permite usar los métodos del cálculo proposicional.

Sea Φ un conjunto de enunciados universales. Para averiguar si Φ es satisfacible, el teorema 1.4.1 nos indica que debemos discriminar si

$$E(\Phi) = \{\psi(\vec{x}/\vec{t}) : \forall\, \vec{x}\psi \in \Phi, \psi \text{ sin cuantificadores}, \vec{t} \in Term_0(\mathcal{L})\},$$

es satisfacible. Por el corolario 1.4.7, la satisfacibilidad de $E(\Phi)$ es equivalente a la del conjunto $\iota[E(\Phi)]$ de fórmulas proposicionales. Si Φ y $Term_0(\mathcal{L})$ son finitos, $\iota[E(\Phi)]$ es finito y podemos usar resolución proposicional para determinar la satisfacibilidad de Φ.

Claro como el agua que el procedimiento recién descrito, para probar que una fórmula no es satisfacible, resulta extremadamente ineficiente; peor aún, cuando la fórmula es satisfacible, el método no funciona. El problema es que si recurrimos a este procedimiento, debemos buscar afanosamente cómo lograr resolventes que finalmente nos conduzcan a □. No parece haber un algoritmo que nos permita encontrar las cláusulas más adecuadas en $E(\varphi)$ para lograr □.

Cuando estudiamos resolución proposicional ([FeVi09]), desarrollamos un algoritmo para determinar si un conjunto finito de cláusulas de Horn es satisfacible. A continuación reformulamos el algoritmo en una forma más adecuada para nuestros fines.

Recuerde que una fórmula básica de Horn es de la forma

(H1) q o

(H2) $\neg q_0 \vee \cdots \vee \neg q_k \vee q$ o

(H3) $\neg q_0 \vee \cdots \vee \neg q_k$,

donde $q_0, q_1, \ldots, q_k$ y q son variables proposicionales.

(H1) y (H2) son fórmulas positivas (o estrictas), mientras que las de la forma (H3) son negativas. Si Δ es un conjunto de cláusulas de Horn, Δ^+ y Δ^- son los subconjuntos de fórmulas positivas y negativas en Δ, respectivamente. Sean Δ un conjunto de cláusulas de Horn y $\mathcal{A} \models \Delta$. Entonces $\mathcal{A}(q) = V$ para $q \in \Delta$ y siempre que $(q_0 \wedge \cdots \wedge q_k \to q) \in \Delta$

y $\mathfrak{A}(q_0) = \cdots = \mathcal{A}(q_k) = V$, se sigue que $\mathcal{A}(q) = V$. Por lo tanto, se cumple $\mathcal{A}(q) = V$ al menos para aquellas variables que estén marcadas al aplicar el siguiente algoritmo.

«Ya frente al fuego, ya en la escalinata». Dícense estas palabras de aquéllos que en breve morirán, que ya suben a morir, o que ya están colocados frente al fuego, ya que es hora de que mueran.

Algoritmo de Horn

(AH1) Marque todas las variables proposicionales que sean elementos de Δ.

(AH2) Si $(q_0 \wedge \cdots \wedge q_k \to q) \in \Delta$ y $q_0, \ldots, q_k$ ya están marcadas, marque toda ocurrencia de q en fórmulas de Δ.

El algoritmo termina cuando ya no es posible aplicar alguna de las reglas; si Δ contiene r variables proposicionales, el algoritmo se detendrá en a lo sumo r etapas.

Ejemplo 1.4.8. Considere

$$\Delta = \{(r \to q), (s \wedge q \to t), (\neg r \vee \neg t), (p \to q), s, (s \wedge p \wedge r \to p), r\}.$$

Por (AH1) tenemos

$$\{(\underline{r} \to q), (\underline{s} \wedge q \to t), (\neg \underline{r} \vee \neg t), (p \to q), \underline{s}, (\underline{s} \wedge p \wedge \underline{r} \to p), \underline{r}\}.$$

Por (AH2)

$$\{(\underline{r} \to \underline{q}), (\underline{s} \wedge \underline{q} \to t), (\neg \underline{r} \vee \neg t), (p \to \underline{q}), \underline{s}, (\underline{s} \wedge p \wedge \underline{r} \to p), \underline{r}\}.$$

Otra vez (AH2),

$$\{(\underline{r} \to \underline{q}), (\underline{s} \wedge \underline{q} \to \underline{t}), (\neg \underline{r} \vee \neg \underline{t}), (p \to \underline{q}), \underline{s}, (\underline{s} \wedge p \wedge \underline{r} \to p), \underline{r}\},$$

y el algoritmo termina.

Sea $\mathcal{A}^\Delta$ la siguiente asignación asociada a Δ:

$$\mathcal{A}^\Delta(q) = \begin{cases} V, & \text{si } q \text{ está marcada,} \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se deduce que si $\mathcal{A} \models \Delta$ y $\mathcal{A}^{\Delta}(q) = V$, entonces $\mathcal{A}(q) = V$, que es el inciso (a) del siguiente lema. Note que el conjunto de variables marcadas sólo depende del conjunto Δ^+ de fórmulas positivas en Δ; en consecuencia, $\mathcal{A}^{\Delta} = \mathcal{A}^{\Delta^+}$ (inciso (b) del siguiente lema).

Lema 1.4.9. *(a) Para cualesquier asignación $\mathcal{A}$ y variable q: si $\mathcal{A} \models \Delta$ y $\mathcal{A}^{\Delta}(q) = V$, entonces $\mathcal{A}(q) = V$.*
(b) $\mathcal{A}^{\Delta} = \mathcal{A}^{\Delta^+}$.
(c) $\mathcal{A}^{\Delta^+} \models \Delta^+$.
(d) $\mathcal{A}^{\Delta} \models \Delta$ si y sólo si Δ es satisfacible, si y sólo si para cada $\alpha \in \Delta^- \; \Delta^+ \cup \{\alpha\}$ es satisfacible.

Demostración. (c) Las fórmulas en Δ^+ tienen la forma (H1) o (H2). Note que $\mathcal{A}^{\Delta^+}(q) = V$ para $q \in \Delta^+$ pues tales q están marcadas por (AH1). Sea $(q_0 \wedge \cdots \wedge q_k \to q) \in \Delta^+$. Si $\mathcal{A}^{\Delta^+}(q_0) = \cdots = \mathcal{A}^{\Delta^+}(q_k) = V$, entonces $q_0, \ldots, q_k$ están marcadas, de donde se sigue (de (AH2)) que q está marcada. Por lo tanto, $\mathcal{A}^{\Delta^+}(q) = V$, así que $\mathcal{A}^{\Delta^+} \models (q_0 \wedge \cdots \wedge q_k \to q)$.
(d) Es claro que si $\mathcal{A}^{\Delta} \models \Delta$, entonces Δ es satisfacible y si Δ es satisfacible, así lo es $\Delta^+ \cup \{\alpha\}$ para $\alpha \in \Delta^-$. Suponga que para toda $\alpha \in \Delta^-$, $\Delta^+ \cup \{\alpha\}$ es satisfacible. Debemos mostrar que $\mathcal{A}^{\Delta} \models \Delta$ o, en forma equivalente (por (b)), que $\mathcal{A}^{\Delta^+} \models \Delta$. Por (c), $\mathcal{A}^{\Delta^+} \models \Delta^+$. Sea $\alpha \in \Delta^-$, digamos $\alpha = (\neg q_0 \vee \cdots \neg q_k)$. Por hipótesis, existe $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \Delta^+ \cup \{\alpha\}$; en particular, $\mathcal{A}(q_i) = F$ para $i = 0, \ldots, k$. Si aplicamos (a) a $\Delta = \Delta^+$, deducimos que $\mathcal{A}^{\Delta^+}(q_i) = F$ para $i = 0, \ldots, k$, por lo que $\mathcal{A}^{\Delta^+} \models \alpha$. ❐

Puesto que las fórmulas de Horn negativas tienen la forma $(\neg q_0 \vee \cdots \vee \neg q_k)$, deducimos:

Corolario 1.4.10. *Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(i) Δ es satisfacible.

(ii) Para ninguna $\alpha \in \Delta^-$, cada variable de α está marcada según el algoritmo de Horn.

❐

Este corolario muestra que el algoritmo proporciona una prueba para la satisfacibilidad de un conjunto finito Δ de fórmulas básicas de Horn: usamos las reglas (AH1) y (AH2) y finalmente verificamos si todas las fórmulas negativas de Δ contienen al menos una variable que no está marcada. Así, el conjunto Δ del ejemplo previo no es satisfacible ya que ambas variables de $\neg r \vee \neg t$ están marcadas.

En resumen, $\mathcal{A}^{\Delta} \models P$ si y sólo si $\Delta^+ \models P$. Esto nos sugiere cómo proceder en el caso de la lógica de primer orden, el cual ahora trataremos.

En lo sucesivo Φ es un conjunto de enunciados universales de Horn, Φ^- y Φ^+ son los subconjuntos de Φ negativos y positivos, respectivamente. Recuerde que para determinar completamente una estructura de Herbrand, sólo falta describir la interpretación de los símbolos de predicado. Antes de continuar, describimos un ejemplo de cómo se representa una situación «real».

Ejemplo 1.4.11. Disponemos de dos recipientes vacíos de 5 y 7 litros. La idea es determinar qué acciones consecutivas se deben emprender para dejar 4 litros de agua en el recipiente de 7 litros. Sólo se permiten dos acciones:

1. Llenar un recipiente.

2. Transferir agua de un recipiente al otro hasta que el correspondiente esté lleno o vacío.

Aquí $A \to B$ se escribe $B \leftarrow A$, $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$ se representa como $B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \leftarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Si $n = 0$, anotamos $B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \leftarrow$, en cambio si $m = 0$, se presenta $\leftarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$.

$Recip(u, v) \equiv$ el recipiente de 7 litros contiene u litros y el de 5 litros contiene v litros. Suponemos que $x + y = z$ y $x \leq y$ ya se han definido.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv Recip(0,0) \leftarrow \\
\varphi_2 &\equiv \leftarrow Recip(4,y) \\
\varphi_3 &\equiv Recip(7,y) \leftarrow Recip(x,y) \\
\varphi_4 &\equiv Recip(x,5) \leftarrow Recip(x,y) \\
\varphi_5 &\equiv Recip(0,y) \leftarrow Recip(x,y) \\
\varphi_6 &\equiv Recip(x,0) \leftarrow Recip(x,y) \\
\varphi_7 &\equiv Recip(0,y) \leftarrow Recip(u,v), u+v=y, y \leq 5 \\
\varphi_8 &\equiv Recip(x,0) \leftarrow Recip(u,v), u+v=x, x \leq 7 \\
\varphi_9 &\equiv Recip(u,v), u+v=w, 7+y=w \\
\varphi_{10} &\equiv Recip(x,5) \leftarrow Recip(u,v), u+v=w, 5+x=w.
\end{aligned}
$$

- φ_1 expresa la situación inicial.
- φ_2 es la meta.
- φ_3, φ_4 corresponden al llenado del primer y segundo recipiente, respectivamente.
- φ_5, φ_6 expresan que se vacía el primero y el segundo.
- φ_7, φ_8 Transferencia de agua hasta que el primer recipiente está vacío.
- φ_9, φ_{10} Transferencia de agua hasta que el segundo está vacío.

«De reojo, de través». Dícense estas palabras cuando alguien ya ha sido advertido muchas veces y no ha escuchado, no lo ha tenido en nada, y ya que se lo llevan amarrado, se le da ánimo con estas palabras: no me vayas viendo de reojo, de través ; yo cumplí mi obligación contigo.

Definición 1.4.12. La estructura de Herbrand $\mathfrak{H}^{\Phi}$ asociada a Φ está definida al imponer, para cada $R \in \mathcal{L}$ y cualesquier $t_1, \ldots, t_n$ términos básicos

$$R^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi^+ \models R(t_1, \ldots, t_n).$$

Note que los enunciados atómicos sin variables son precisamente fórmulas de la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$ con $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$.

Proposición 1.4.13.

(a) Para cualesquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y términos $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$: si $\mathfrak{A} \models \Phi$ y $\mathfrak{H}^{\Phi} \models R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

(b) $\mathfrak{H}^{\Phi} = \mathfrak{H}^{\Phi^+}$.

(c) $\mathfrak{H}^{\Phi^+} \models \Phi^+$.

(d) $\mathfrak{H}^{\Phi} \models \Phi$ si y sólo si Φ es satisfacible, si y sólo si para cada $\varphi \in \Phi^-$, $\Phi^+ \cup \{\varphi\}$ es satisfacible.

Demostración. (a) Si $\mathfrak{A} \models \Phi$ y $\mathfrak{H}^{\Phi} \models R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $\Phi^+ \models R(t_1, \ldots, t_n)$ (por definición), así que $\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

(b) Se sigue de la definición 1.4.12.

(c) Sea $\varphi \in \Phi^+$, digamos $\varphi = \forall \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k \to \psi)$ (la prueba para $\varphi = \forall \vec{x}\psi$ es aún más sencilla). Sean $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-términos básicos y suponga que

$$\mathfrak{H}^{\Phi^+} \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(\vec{x}/\vec{t}). \qquad (\star)$$

Debemos probar que $\mathfrak{H}^{\Phi^+} \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$. Por $(\star)$ y la definición 1.4.12,

$$\Phi^+ \models \psi_0(\vec{x}/\vec{t}), \ldots, \Phi^+ \models \psi_k(\vec{x}/\vec{t}),$$

puesto que $\varphi \in \Phi^+$, $\Phi^+ \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$; en consecuencia, $\mathfrak{H}^{\Phi^+} \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$.

(d) Basta probar que $\mathfrak{H}^{\Phi} \models \Phi$ en el caso en que para todo $\varphi \in \Phi^-$

$$\Phi^+ \cup \{\varphi\} \text{ es satisfacible.} \qquad (\star)$$

Supongamos entonces (✯). Por (b) y (c), $\mathfrak{H}^\Phi \models \Phi^+$. Sea $\varphi \equiv \forall \vec{x}(\neg\psi_0 \vee \cdots \vee \neg\psi_k) \in \Phi^-$. Para cerciorarnos de $\mathfrak{H}^\Phi \models \varphi$, sea $\mathfrak{A} \models \Phi^+ \cup \{\varphi\}$. Entonces dados los términos $\vec{t}$ existe $i \leq k$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\psi_i(\vec{x}/\vec{t})$, por lo que por (a), para cualesquier términos básicos $\vec{t}$ existe $i \leq k$ tal que $\mathfrak{H}^\Phi \models \neg\psi_i(\vec{x}/\vec{t})$, es decir, para cualesquier términos básicos $\vec{t}$

$$\mathfrak{H}^\Phi \models (\neg\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \vee \cdots \vee \neg\psi_k(\vec{x}/\vec{t}));$$

así que

$$\mathfrak{H}^\Phi \models \forall \vec{x}(\neg\psi_0 \vee \cdots \vee \neg\psi_k).$$

□

Corolario 1.4.14. *Sean $\Phi = \Phi^+$ y φ un enunciado de Horn negativo. Entonces*

$$\Phi \models \neg\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{H}^\Phi \models \neg\varphi.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\Phi \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \Phi \cup \{\varphi\} \text{ no es satisfacible}\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{H}^{\Phi\cup\{\varphi\}} \not\models \Phi \cup \{\varphi\} \text{ (Proposición 1.4.13(d))}\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{H}^\Phi \models \neg\varphi\end{aligned}$$

por 1.4.13(b), (c) pues $(\Phi \cup \{\varphi\})^+ = \Phi$. □

Corolario 1.4.15. *Sean Φ un conjunto de enunciados universales de Horn positivos y $\exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ un enunciado, donde los ψ_i son atómicos. Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(i) $\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$.

(ii) $\mathfrak{H}^\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$.

(iii) Existen términos básicos $\vec{t}$ tales que

$$\Phi^\Phi \models (\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\vec{x}/\vec{t})).$$

(iv) Existen términos básicos $\vec{t}$ tales que

$$\mathfrak{H}^\Phi \models (\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\vec{x}/\vec{t})).$$

Más aún, la equivalencia de (iii) y (iv) ocurre término a término, en el siguiente sentido: para cualesquier términos básicos $\vec{t}$

$$\begin{aligned}\Phi \models &(\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\vec{x}/\vec{t})) \Leftrightarrow\\ \mathfrak{H}^\Phi \models &(\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\vec{x}/\vec{t})).\end{aligned} \qquad (✣)$$

Demostración. Ejercicio. □

En la situación del corolario 1.4.15, la validez de la implicación $\Phi \models \exists \vec{x}\varphi$, donde $\varphi = (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$, se puede averiguar en una sola estructura, a saber $\mathfrak{H}^\Phi$. Esto implica que en el caso $\Phi \models \exists \vec{x}\varphi$ existe una sola n-ada $\vec{t}$ tal que $\Phi \models \varphi(\vec{x}/\vec{t})$ (en el teorema de Herbrand 1.4.2 se requiere una cantidad finita de n-adas).

Observe que si Φ es satisfacible, entonces el modelo $\mathfrak{H}^\Phi$ de Φ es mínimo, esto es, si $\mathfrak{A}$ es una estructura de Herbrand y $\mathfrak{A} \models \Phi$, entonces para cualquier símbolo de relación R de $\mathcal{L}$, $R^{\mathfrak{H}^\Phi} \subseteq R^{\mathfrak{A}}$.

El corolario 1.4.15 enfatiza el papel de la estructura de Herbrand $\mathfrak{H}^\Phi$. No obstante, en la práctica por lo general contamos con una estructura arbitraria, así que la pregunta es ¿qué estructuras $\mathfrak{A}$ son de la forma $\mathfrak{H}^\Phi$ para algún conjunto Φ de enunciados universales de Horn? En el caso en que $\mathcal{L}$ contiene un símbolo de función, la estructura de Herbrand se torna infinita, por lo que las estructuras finitas salen del juego.

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Recuerde que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L} \cup \{\mathring{a} : a \in A\}$. El diagrama positivo $D(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ consiste en los siguientes enunciados:

1. $R(\mathring{a}_1, \ldots, \mathring{a}_n)$ para $R \in \mathcal{L}$ y $\vec{a} \in R^{\mathfrak{A}}$.
2. $f(\mathring{a}_1, \ldots, \mathring{a}_n) = a$ para $f \in \mathcal{L}$, $\vec{a}, a \in A$ y $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a$.
3. $a = c$ para $c \in \mathcal{L}$, $a \in A$ y $c^{\mathfrak{A}} = a$.

Se puede probar fácilmente, por inducción en la construcción de términos usando los enunciados en (2) y (3), que

4. Para todo término básico de $\mathcal{L}(A)$ existe $a \in A$ tal que $D(\mathfrak{A}) \models t = \mathring{a}$.

Proposición 1.4.16.

$$\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{A})} \cong (\mathfrak{A}, A),$$

por lo que

$$\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{A})} \restriction \mathcal{L} \cong \mathfrak{A}.$$

□

Ejemplo 1.4.17. Considere una gráfica $\mathfrak{G} = \langle G, E^{\mathfrak{G}} \rangle$ como las que se estudiaron en el Volumen I (pág. 233 y siguientes). Imagine que los elementos de $\mathfrak{G}$ son pueblos de un país y que $(a, b) \in E^{\mathfrak{G}}$ significa que cierta empresa de autobuses brinda una conexión directa de a a b. Averigue si dos personas que viven en los pueblos a_1, a_2 se pueden encontrar en algún pueblo b usando autobuses de la compañía; esto es equivalente a la pregunta

(✱) ¿Existe un pueblo b para el que existan E-trayectorias de a_1 a b y de a_2 a b?

Introducimos un nuevo símbolo de 2-relación C para conexiones que posiblemente requieran un cambio de autobús. Sea

$$\mathfrak{G}' = \langle G, E^{\mathfrak{G}}, C^{\mathfrak{G}} \rangle,$$

donde $C^{\mathfrak{G}} = \{(a,b) \in G \times G : \text{ existe una } E\text{-trayectoria de } a \text{ a } b\}$.

(Suponga que hay una trayectoria de a a a). Entonces (✱) es equivalente a

$$\text{¿}\mathfrak{G}' \models \exists z(C(x,z) \wedge C(y,z))[a_1, a_2]? \qquad (\ast)$$

Como $\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G}')} \cong (\mathfrak{G}', G)$, por el corolario 1.4.15, (✲) es equivalente a

$$\text{¿}D(\mathfrak{G}') \models \exists z(C(\mathring{a}_1, z) \wedge C(\mathring{a}_2, z))? \qquad (\divideontimes)$$

Una vez que los datos de $\mathfrak{G}'$ están disponibles, sólo se deben recorrer en forma obvia para obtener una respuesta a (✲). Sin embargo, en la práctica puede ocurrir que sólo se almacenen los datos de la $\mathfrak{G}$ original. Entonces, a los datos $D(\mathfrak{G})$ añadimos las reglas que definen a $C^{\mathfrak{G}}$. Formalmente,

$$\Phi = \{\forall x C(x,x), \forall x \forall y \forall z(C(x,y) \wedge E(y,z) \to C(x,z)\}.$$

Se comprueba sin dificultad que (✱) es equivalente a

$$\text{¿}D(\mathfrak{G}) \cup \Phi \models \exists x(C(\mathring{a}_1, z) \wedge C(\mathring{a}_2, z))? \qquad (\divideontimes)$$

(Basta probar que (✳) y (✴) son equivalentes; con este fin demuestre que $\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G})\cup\Phi} \cong \mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G})}$).

El marco de trabajo que tenemos hasta ahora no es suficiente para proporcionarnos trayectorias o una lista de trayectorias de a_1 y a_2 a b. La razón es que no tenemos forma de llamar a las conexiones.

Revisemos nuestro modelo y remplacemos la relación C por una 3-relación P junto con una 2-función f. En forma intuitiva, $f(x,y)$ representa una trayectoria hipotética de x a y. Así, $f(f(x,y),z)$ describe una trayectoria hipotética de x a z vía y. En cambio, $P(x,y,z)$ afirma que z es una trayectoria de x a y. En consecuencia, una trayectoria hipotética

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow a \longrightarrow e$$

está representada por el término

$$t = f(f(f(f(\mathring{a}, \mathring{b}), \mathring{d}), \mathring{a}), \mathring{e})$$

y $P(\mathring{a}, \mathring{e}, t)$ significa que $a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow a \longrightarrow e$ es una trayectoria de a a e en $\mathfrak{G}$, esto es, $(a,b), (b,d), (d,a), (a,e) \in E^{\mathfrak{G}}$. Las reglas que definen a P son

$$\Phi = \{\forall x P(x,x,x), \forall u \forall x \forall y \forall z(P(x,y,u) \wedge E(y,z) \to P(x,z,f(u,z))\}.$$

Para la estructura de Herbrand $\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G})\cup\Phi'}$ tenemos

$$\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G})\cup\Phi'} \models P(\mathring{a}, \mathring{b}, t) \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ representa una trayectoria de } a \text{ a } b.$$

La pregunta original (✱) es equivalente a

$$¿\mathfrak{H}^{D(\mathfrak{G})\cup\Phi'} \models \exists z \exists u \exists v (P(\mathring{a}_1, z, u) \wedge P(\mathring{a}_2, z, v))?$$

que, por el corolario 1.4.15, es equivalente a

$$¿D(\mathfrak{G}) \cup \Phi' \models \exists z \exists u \exists v (P(\mathring{a}_1, z, u) \wedge P(\mathring{a}_2, z, v))?$$

y

$$D(\mathfrak{G}) \cup \Phi' \models P(\mathring{a}_1, t, t_1) \wedge P(\mathring{a}_2, t, t_2)$$

es equivalente al enunciado: t es un pueblo, t_1 es una trayectoria de a_1 a t y t_2 es una trayectoria de a_2 a t.

En general, dado un conjunto Φ de enunciados universales positivos de Horn y un enunciado $\exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ con las ψ_i atómicas, nos preguntamos si

$$\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k). \tag{✧}$$

Por el corolario 1.4.15 sabemos que la respuesta es positiva en el caso en que existan términos básicos $\vec{t}$ tales que

$$\Phi \models (\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\vec{x}/\vec{t})). \tag{★}$$

Estamos interesados en encontrar tales términos $\vec{t}$ o generarlos. Por el teorema 1.4.1, (★) es equivalente a que existan términos básicos $\vec{t}$ tales que

$$E(\Phi) \cup \{(\neg\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \cdots \vee \neg\psi_k(\vec{x}/\vec{t}))\} \tag{☆}$$

no sea satisfacible.

Es claro que (☆) se puede responder verificando, para cualesquier términos básicos $\vec{t}$, si

$$E(\Phi) \cup \{(\neg\psi_0(\vec{x}/\vec{t}) \vee \cdots \vee \neg\psi_k(\vec{x}/\vec{t}))\}$$

no es satisfacible; para ello aplicamos resolución proposicional.

Sin embargo, este método no toma en consideración, por ejemplo, que para $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y una cantidad infinita de términos básicos, las instancias básicas $E(\Phi)$ son infinitas. Por eso, requerimos otra solución. Repetimos la definición de $E(\Phi)$.

Definición 1.4.18. Sea φ una fórmula de la forma $\forall \vec{x}\psi$ con ψ sin cuantificadores. Para cualesquier variables distintas $y_1, \ldots, y_l$ y términos $t_1, \ldots, t_l$ la fórmula $\psi(\vec{y}/\vec{t})$ es una instancia de φ. Si $\psi(\vec{y}/\vec{t})$ es un enunciado, también lo llamamos una instancia básica.

Para un conjunto Φ de fórmulas φ de la forma recién descrita, $E(\Phi)$ es el conjunto de sus instancias básicas.

Puesto que la función ι (página 35) transforma inyectivamente fórmulas atómicas en variables proposicionales y fórmulas sin cuantificadores en fórmulas proposicionales, podemos usar con toda libertad la nomenclatura que ya tenemos: literal, cláusula, cláusula de Horn, resolvente, etcétera.

> «Greñudo, mugroso, bien que le pones una peluca a tu padre». Dícese esto del que avergüenza a su gobernante o a su jefe, del que acusa a alguien, del que avergüenza a su padre o a su madre, del que no quiere vivir como vivieron su padre o su abuelo.

Ejemplo 1.4.19. Supongamos que $\mathcal{L} = \{P, R, f, g, c\}$, donde

- P es un 3-predicado.
- R es un 2-predicado.
- f y g son 1-funciones.
- c es un símbolo de constante.

Sea $\Phi = \{\forall x \forall y (P(x, y, c) \to R(y, g(f(x))), \forall x \forall y P(f(x), y, c)\}$. Queremos cerciorarnos de que

$$\Phi \models \exists x \exists y R(f(x), g(y)),$$

es decir, si para ciertos términos básicos s, t

$$E(\{\neg P(x, y, c), R(y, g(f(x)))\}, \{P(f(x), y, c)\}) \cup \{\neg R(f(s), g(t))\}$$

no es satisfacible. Hacemos

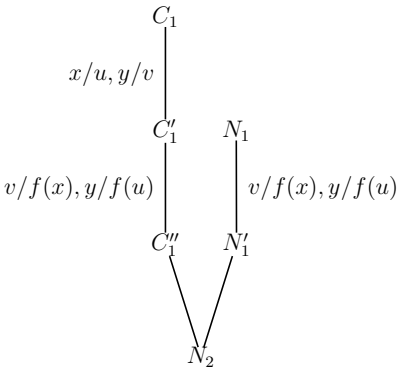
$$\begin{aligned} C_1 &= \{\neg P(x, y, c), R(y, g(f(x)))\}, \\ C_2 &= \{P(f(x), y, c)\} \\ N_1 &= \{\neg R(f(x), g(y))\}. \end{aligned}$$

Nuestro problema es equivalente a la existencia de una instancia básica N_1' de N_1 y un conjunto $\mathcal{C}$ de instancias básicas de C_1 y C_2 tales que podemos derivar $\square$ a partir de $\mathcal{C} \cup \{N_1'\}$. Al formar resolventes, la idea es usar instancias de C_1, C_2 y N_1, pero no sustituyendo términos básicos apropiados en lugar de variables, sino escogiendo términos tan generales como sea posible.

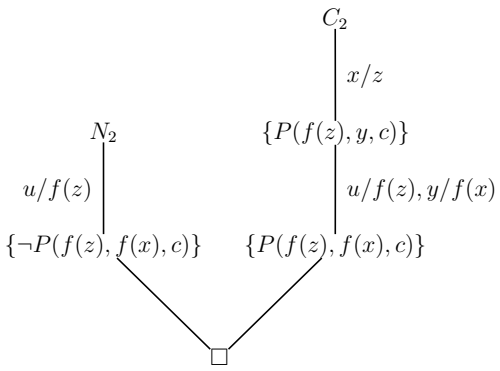
En nuestro caso, al analizar con detalle C_1, C_2 y N_1 encontramos que hay a lo sumo una posibilidad para efectuar resolución con N_1, a saber, resolver N_1 y C_1. Para evitar una colisión de variables, primero cambiamos de nombre a x, y en C_1; ahora son u, v:

$$C_1' = \{\neg P(u, v, c), R(v, g(f(u)))\}$$

Si comparamos N_1 y C_1' llegamos a la conclusión de que un remplazo de v por $f(x)$ y de y por $f(u)$ conduce a instancias más simples de N_1 y C_1', que se pueden resolver. De hecho, el remplazo da lugar a $N_1' = \{\neg R(f(x), g(f(u)))\}$ y $C_1'' = \{\neg P(u, f(x), c), R(f(x), g(f(u)))\}$. Si resolvemos C_1'' y N_1' obtenemos $N_2 = \{\neg P(u, f(x), c)\}$:



Podemos tratar a N_2 y C_2 en forma similar y derivar $\square$ como a continuación.



Si consideramos las sustituciones hechas, inferimos que la variable y de $N_1 = \{\neg R(f(x), g(y))\}$ se ha remplazado finalmente por $f(f(z))$, mientras que la variable x de N_1 se mantuvo fija. En forma intuitiva, existe un conjunto $\mathcal{C}_0$ de instancias de C_1 y C_2 tal que $\mathcal{C}_0 \cup \{\neg R(f(x), g(y))\}$ no es satisfacible, por lo que $\Phi \models R(f(x), g(f(f(z))))$. Ya que hemos escogido la sustitución en la resolución tan general como nos fue posible, tal vez obtengamos todas las soluciones, es decir,

$$\begin{aligned}&\{(s,t) \in Term_0(\mathcal{L}) \times Term_0(\mathcal{L}) : \Phi \models R(f(s), g(t))\}\\ =&\{(s, f(f(t))) : s,t \in Term_0(\mathcal{L})\}.\end{aligned}$$

Motivados por este ejemplo y nuestras observaciones previas, plantearemos otro método para determinar cuándo una fórmula no es satisfacible: resolución para lógica de primer orden que no se efectúa en $E(\varphi)$, sino «antes». Sea φ un enunciado en FNS. Entonces φ tiene la forma $\forall x_1 \ldots \forall x_m \varphi_0$, donde φ_0 es una conjunción de disyunciones de literales. En particular, φ_0 no tiene cuantificadores, así que se puede pensar como una fórmula del cálculo proposicional en FNC. Sea $C(\varphi_0)$ el conjunto de cláusulas en φ_0. Definimos $C(\varphi)$ como $C(\varphi_0)$. Esto es $C(\varphi) = \{C_1, \ldots, C_m\}$, donde C_i es el conjunto de literales en la i-ésima disyunción.

Ejemplo 1.4.20. $\varphi \equiv \forall x \forall y \forall z((P(x,y) \vee \neg Q(x,z)) \wedge (R(x,y,z) \vee \neg P(f(x,y),z)))$;
$C(\varphi) = \{\{P(x,y), \neg Q(x,z)\}, \{R(x,y,z), \neg P(f(x,y),z)\}\}$.

Note que un enunciado φ en FNS determina en forma única $C(\varphi)$. Recíprocamente $C(\varphi_0)$ determina φ_0 módulo equivalencias. Se sigue que $C(\varphi)$ determina φ módulo equivalencias. Esto es, si $C(\varphi) = C(\psi)$ para φ, ψ, enunciados en FNS, entonces $\varphi \equiv \psi$. Por esta razón, no tenemos que distinguir entre fórmulas en FNS y conjuntos de cláusulas.

En analogía con la resolución para la lógica proposicional, debemos definir la resolvente de dos cláusulas; cuidadosos debemos ser para que la resolvente sea consecuencia lógica de los padres. Consideremos informalmente cómo obtener la resolvente.

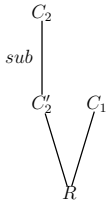
Ejemplo 1.4.21. Sea $C_1 = \{\neg Q(x,y), P(f(x),y)\}$ y $C_2 = \{\neg P(f(x),y), R(x,y,z)\}$.
La cláusula $R = \{\neg Q(x,y), R(x,y,z)\}$ es una resolvente de C_1 y C_2.

Ejemplo 1.4.22. Sea $C_1 = \{\neg Q(x,y), P(f(x),y)\}$ y $C_2 = \{\neg P(z,y), R(x,y,z)\}$. No podemos encontrar directamente una resolvente de C_1 y C_2. Sea C_2' la cláusula que se obtiene al sustituir $f(x)$ por z en la cláusula C_2, es decir, aplicamos la sustitución $sub = (z/f(x))$. Esto es, $C_2' = \{\neg P(f(x),y), R(x,y,f(x))\}$.

Observe que podemos encontrar con fácilidad una resolvente de C_1 y C_2':

$$R = \{\neg Q(x,y), R(x,y,f(x))\}.$$

Note que C_2' es una consecuencia de C_2 porque el enunciado en FNS representado por C_2 asegura que la fórmula $\neg P(z,y) \vee R(x,y,z)$ se cumple para cualesquie x, y, z. En particular, esta fórmula se cumple en el caso específico $z = f(x)$. Esto es, C_2 implica lógicamente a C_2'. En consecuencia, R, que es una consecuencia de $\{C_1, C_2'\}$, también es una consecuencia de $\{C_1, C_2\}$, con diagrama



Como ya vimos, en ocasiones antes de encontrar una resolvente debemos hacer sustituciones en variables para que ciertas literales se igualen. En el ejemplo previo realizamos una sustitución que hizo idénticas a $P(f(x),y)$ y $P(z,y)$. Este procedimiento se conoce como unificación.

Sea $\mathbb{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ un conjunto de literales. Decimos que $\mathbb{L}$ es unificable si existen variables $x_1, \ldots, x_m$ y términos $t_1, \ldots, t_m$ tales que sustituir t_i por x_i (para cada i) hace que cada literal en $\mathbb{L}$ sea igual. Denotemos tal sustitución con $sub = (x_1/t_1, \ldots, x_m/t_m)$. Para cualquier enunciado φ en FNS, denotamos el resultado de aplicar esta sustitución a φ por φ_{sub}.

Por ejemplo, si $sub = (x/w, y/f(a), z/f(w))$ y $\varphi = \{\neg Q(x,y), R(a,w,z)\}$, entonces $\varphi_{sub} = \{\neg Q(w,f(a)), R(a,w,f(w))\}$.

Si $\mathbb{L}$ es un conjunto de literales, entonces $\mathbb{L}_{sub}$ denota el conjunto de todas las l_{isub} con $l_i \in \mathbb{L}$. Así que $\mathbb{L}$ es unificable si y sólo si existe una sustitución sub tal que $\mathbb{L}_{sub}$ contiene una única literal. Si éste es el caso, llamamos a sub un unificador para $\mathbb{L}$ y decimos que sub unifica a $\mathbb{L}$.

Ejemplo 1.4.23. Sean $\mathbb{L} = \{P(f(x), y), P(f(a), w)\}$, $sub_1 = (x/a, y/w)$ y $sub_2 = (x/a, y/a, w/a)$. Entonces tanto sub_1 como sub_2 unifican a $\mathbb{L}$. Tenemos $\mathbb{L}_{sub_1} = \{P(f(a), w)\}$ y $\mathbb{L}_{sub_2} = \{P(f(a), a)\}$. Note que si hacemos otra sustitución, podemos obtener $\mathbb{L}_{sub_2}$ a partir de $\mathbb{L}_{sub_1}$. A saber, si $sub_3 = (w/a)$, entonces $sub_1 sub_3$ (sub_1 seguido de sub_3) tiene el mismo efecto que sub_2. Sin embargo, no podemos generar $\mathbb{L}_{sub_1}$ de $\mathbb{L}_{sub_2}$ pues $\mathbb{L}_{sub_2}$ no tiene variables. En cierto sentido, el unificador sub_1 es mejor para nuestro propósito, que es la resolución.

Definición 1.4.24. Sea $\mathbb{L}$ un conjunto de literales. La sustitución sub es un unificador más general (umg) para $\mathbb{L}$ si unifica $\mathbb{L}$, y para cualquier otro unificador sub' para $\mathbb{L}$ existe una sustitución sub'' con $sub\ sub'' = sub'$.

En el ejemplo 1.4.23, sub_1 es el unificador más general.

Proposición 1.4.25. *Un conjunto finito de literales es unificable si y sólo si tiene un unificador más general.*

Así que si el conjunto es unificable, tenemos un umg para él.

Demostración. Por supuesto, si tiene un unificador más general, el conjunto de literales es unificable. Supongamos entoces que el conjunto es unificable. Para demostrar que existe un umg, recurrimos al importante algoritmo de unificación:

El algoritmo de unificación

Dado un conjunto (finito) $\mathbb{L}$ de literales, se aplican las siguientes reglas (AU1)-(AU9) empezando por (AU1).

(AU1) Si $\mathbb{L} = \varnothing$ o contiene literales negativas y positivas o si las fórmulas en $\mathbb{L}$ no contienen los mismos símbolos de relación, el algoritmo se detiene y responde que $\mathbb{L}$ **no es unificable**.

(AU2) Se pone $i = 0$, $sub_0 = \varnothing$.

(AU3) Si $\mathbb{L}_{sub_i}$ contiene sólo un elemento, el algoritmo se detiene y responde que $\mathbb{L}$ **es unificable y** sub_i **es el mgu**.

(AU4) Si $\mathbb{L}_{sub_i}$ contiene más de un elemento, sean l_i, l_j literales distintas en $\mathbb{L}_{sub_i}$ (digamos, las dos primeras respecto al orden lexicográfico). Determine la primera posición donde difieren (vistas como cadenas de símbolos). Sean x_i, x_j las letras en estas posiciones en l_i, l_j, respectivamente.

(AU5) Si las letras x_i, x_j son símbolos de función o constantes, el algoritmo se detiene y responde que $\mathbb{L}$ **no es unificable**.

(AU6) Una de las letras x_i o x_j es una variable x, digamos x_i. Determine el término[3] t que comienza con x_j en l_j.

(AU7) Si x aparece en t, el algoritmo se detiene y responde que $\mathbb{L}$ **no es unificable**.

(AU8) Se hace $sub_{i+1} = sub_i(x/t)$ e $i = i + 1$.

(AU9) Pase a (AU3).

Note que el algoritmo siempre termina, pues en cada etapa, que no sea la última, elimina la aparición de una de las variables en $\mathbb{L}$. Si el algoritmo funciona, obtenemos un unificador $sub = sub_0 \cdots sub_n$. Resta corroborar que es un umg, para lo que tomamos un unificador sub' para $\mathbb{L}$; si mostramos $sub' = sub\ sub'$, habremos terminado. Procedemos por inducción a cormprobar que para toda i, $sub' = sub_0 \cdots sub_i sub'$, lo cual es evidente para $i = 0$. Suponga que $sub' = sub_0 \cdots sub_i sub'$ y $sub_{i+1} = \{v/t\}$. Basta confirmar que las sustituciones $sub_{i+1}sub'$ y sub son las mismas, lo que es tanto como verificar que el resultado de su aplicación a cada variable es el mismo. Para $x \neq v$, $xsub_{i+1}sub'$ claramente es igual a $xsub'$. Para v, $vsub_{i+1}sub' = tsub'$. Dado que sub' unifica $\mathbb{L}sub_0 \cdots sub_i$, y tanto v como t las primeras variables distintas en $\mathbb{L}sub_0 \cdots sub_i$ (de izquierda a derecha), sub' debe unificar v y t, es decir, $tsub' = vsub'$, como se pide. ❐

Aún no hemos verificado si este algoritmo funciona. Antes demos un ejemplo.

Ejemplo 1.4.26. Sea $\mathbb{L} = \{R(f(g(x)), a, x), R(f(g(a)), a, b), R(f(y), a, z)\}$.

$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}$ y $sub_0 = \emptyset$.

Leemos cada literal de izquierda a derecha; todas comienzan con $R(f(\ldots$ y luego hay una discrepancia. La segunda presenta $g(a)$ y la tercera y. Verificamos que uno de estos dos términos es una variable y el otro es un término que no contiene esa variable. Éste es el caso, así que

$$sub_1 = (y/g(a))$$
$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{0\ sub_1} = \{R(f(g(x)), a, x), R(f(g(a)), a, b), R(f(g(a)), a, z)\}.$$

[3] t puede se una variable. Es fácil probar que tal t existe.

Note que $\mathbb{L}_1$ contiene más de una literal. Seguimos. Todas las literales comienzan con $R(f(g(\ldots$ La primera tiene después x y la segunda a. Uno de éstos es una variable y el otro un término que no contiene a x; se sigue que:

$$sub_2 = (x/a)$$
$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{1\ sub_2} = \{R(f(g(a)), a, a), R(f(g(a)), a, b), R(f(g(a)), a, z)\}.$$

$\mathbb{L}_2$ contiene más de una literal. Cada literal en $\mathbb{L}_2$ empieza con $R(f(g(a)), a, \ldots$ pero entonces la primera literal tiene a y la segunda b. Ninguna es variable y el algoritmo concluye $\mathbb{L}$ no es unificable.

Lema 1.4.27. *El algoritmo de unificación, al aplicarse a un conjunto finito de literales* $\mathbb{L}$*, se detiene y da la respuesta correcta a la pregunta ¿es* $\mathbb{L}$ *unificable? Si la respuesta es afirmativa, el algoritmo proporciona el umg.*

Demostración. Sea $\mathbb{L}$ un conjunto finito de literales. Si el algoritmo se detiene en (AU1), es obvio que $\mathbb{L}$ no es unificable. Por consiguiente, podemos suponer que $\mathbb{L} \neq \varnothing$, que las literales son todas positivas o todas negativas y que éstas contienen los mismos símbolos de relación.

El algoritmo se detiene al término de una cantidad finita de etapas: ya que al aplicar (AU8), la variable x desaparece (pues x no ocurre en t), el único ciclo posible (AU3)-(AU9) se recorre a lo sumo tantas veces como variables diferentes encontremos en $\mathbb{L}$.

Si el algoritmo se detiene en (AU3), $\mathbb{L}$ es unificable. Por lo tanto, cuando $\mathbb{L}$ no es unificable sólo se puede detener por (AU5) o (AU7), por lo que el algoritmo responde de manera correcta en el caso en que $\mathbb{L}$ no sea unificable.

En consecuencia, supongamos que $\mathbb{L}$ es unificable. Probaremos que

(✣) Si ν es un unificador de $\mathbb{L}$, entonces para cada valor de i que el algoritmo alcance, existe ν_i con $sub_i\nu_i = \nu$.

Si probamos (✣), terminamos, pues si k es el menor valor de i, entonces $\mathbb{L}sub_k$ es unificable pues $\mathbb{L}sub_k\nu_k = \mathbb{L}\nu$; así que el algoritmo no puede terminar con (AU5) o (AU7); si terminase, por ejemplo, con (AU7), habría dos literales diferentes en $\mathbb{L}sub_k$ de la forma $\ldots x-$ y $\ldots t-$ donde $t \neq x$ y x ocurre en t; después de algunas sustituciones, siempre habrían términos de longitud diferente que comienzan en las posiciones correspondientes a x y t, respectivamente, por lo que $\mathbb{L}sub_k$ no sería unificable y por (✣), lo mismo ocurriría con $\mathbb{L}$. Por consiguiente, el algoritmo debe terminar con (AU3), es decir, sub_k es un unificador y por (✣) es un umg.

Probamos (✣) por inducción en i. Para $i = 0$ hacemos $\nu_0 = \nu$. Entonces $sub_0\nu_0 = \nu$. En la etapa inductiva, sea $sub_i\nu_i = \nu$ y suponga que alcanzamos $i+1$. Por (AU8) tenemos $sub_{i+1} = sub_i(x/t)$ para ciertas x, t con x sin aparecer en t. Concluimos que

$$x\nu_i = t\nu_i \qquad (✘)$$

($\mathbb{L}sub_i v_i$ tiene un sólo elemento). Definimos v_{i+1} mediante

$$yv_{i+1} = \begin{cases} yv_i, & \text{si } y \neq x_j \\ x, & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Puesto que x no aparece en t, tenemos

$$tv_{i+1} = tv_i. \qquad (✙)$$

Pero $(x/t)v_{i+1} = v_i$: si $y \neq x$, entonces $y((x/t)v_{i+1}) = yv_{i+1} = yv_i$ y $x((x/t)v_{i+1}) = tv_{i+1} = tv_i = xv_i$. En resumen,

$$sub_{i+1}v_{i+1} = /sub_i(x/t))v_{i+1} = sub_i((x/t)v_{i+1}) = sub_i v_i = v,$$

lo que concluye la etapa inductiva. ❐

Si bien el algoritmo de unificación parece ser fácilmente implementable en una computadora, es importante averiguar su complejidad computacional; para ello, véase [BaSie94], [Bo97].

En lo sucesivo, U-resolvente significa que se obtuvo por resolución usando el algoritmo de unificación.

Lema 1.4.28. *Si C_1, C_2 y C son cláusulas básicas de Horn, C es una resultante (proposicional) de C_1 y C_2 si y sólo si C es una U-resolvente de C_1 y C_2.*

Demostración. El lector no tendrá dificultades en demostrar este resultado. ❐

Los antiguos mexicanos distinguían y conocían numerosas constelaciones, como por ejemplo las Pléyades, la Osa Mayor, etc. Obsevaban especialmente el movimiento de las Pléyades cada fin de «siglo», es decir, cada 52 años.

De manera general, todos los cuerpos celestes secundarios se dividían en dos grupos opuestos: los Centzon Mimixcoa al Norte, los Centzon Huitznahua al Sur. Las «Cuatrocientas Serpientes de Nubes», pequeñas divinidades septentrionales, rondan la gran estepa de cactos; los «Cuatrocientos Meridionales» son los hermanos de Huitzilopochtli, a los que dio muerte al nacer.

A los planetas se les llamaba tzontémoc, «los que descienden», porque su movimiento, en contraste con el de las estrellas, los hace desaparecer tras el horizonte. Esos periodos de desaparición en lo invisible, en la morada de los muertos, los han hecho identificarse con las Cihuateteo y con los Tzitzimime, monstruos del Oeste que aguardan, disimulados detrás del mundo que nuestros ojos conocen, la destrucción del universo por nuevos cataclismos.

1.5 Resolución

Ya estamos listos para definir resolución en la lógica de primer orden.

Definición 1.5.1. Sean C_1, C_2 cláusulas, s_1, s_2 sustituciones para las cuales C_1s_1 y C_2s_2 no tienen variables en común, $l_1, \ldots, l_m \in C_1s_1$ y $l'_1, \ldots, l'_n \in C_2s_2$ tales que: $\mathbb{L} = \{\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_m}, l'_1, \ldots, l'_n\}$ es unificable y sub el umg de $\mathbb{L}$. Entonces $R = [(C_1s_1 - \{l_1, \ldots, l_m\}) \cup (C_2s_2 - \{l'_1, \ldots, l'_n\})]sub$ es una resolvente de C_1, C_2.

Sea φ un enunciado en FNS; podemos pensar que $\varphi = \{C_1, \ldots, C_n\}$, donde las C_i son cláusulas.

$$\begin{aligned} Res(\varphi) &= \{R : R \text{ es una resolvente de } C_i, C_j, i \leq j \leq n\} \\ Res^0(\varphi) &= \varphi \\ Res^{n+1}(\varphi) &= Res(Res^n(\varphi)) \\ Res^*(\varphi) &= \bigcup_n Res^n(\varphi). \end{aligned}$$

Note que $Res^*(\varphi)$ puede ser un conjunto infinito.

Ejemplo 1.5.2. Sean $C_1 = \{Q(x,y), P(f(x),y)\}$ y $C_2 = \{R(x,c), \neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(z))\}$. Suponga que queremos encontrar una resolvente de C_1, C_2. Primero cambiamos el nombre a algunas variables, ya que x, y aparecen en C_1 y C_2. Sea $s_1 = (x/u, y/v)$. Entonces: $C_1s_1 = \{Q(u,v), P(f(u),v)\}$, que no tiene variables en común con C_2. Note que C_1s_1 contiene una literal de la forma $P(\cdot,\cdot)$ $(P(f(u),v))$ y C_2 una de la forma $\neg P(\cdot,\cdot)$ (de hecho dos $\neg P(f(c),x)$, y $\neg P(f(y),h(z))$). Sea

$$\mathbb{L} = \{P(f(u),v), P(f(c),x), P(f(y),h(z))\}.$$

Aplicando el algoritmo de unificación, obtendremos que $\mathbb{L}$ es unificable y

$$sub = (u/c, y/c, v/h(z), x/h(z)),$$

es un umg. Concluimos que C_1 y C_2 tienen resolvente.

$$\begin{aligned} R &= [(C_1s_1 - \{P(f(u),v)\}) \cup (C_2 - \{\neg P(f(c),x), \neg P(f(y),h(z))\})]sub \\ &= \{Q(u,v), R(x,c)\}sub \\ &= \{Q(c,h(z)), R(h(z),c)\} \end{aligned}$$

Verifiquemos que la resolvente R es una consecuencia de C_1, C_2. Recuerde que C_1 y C_2 representan enunciados en FNS. C_1 representa $\forall x \forall y (Q(x,y) \vee P(f(x),y))$, mientras que C_2 representa $\forall x \forall y \forall z (R(x,c) \vee \neg P(f(c),x) \vee \neg P(f(y),h(z)))$. Suponga que C_1, C_2 se cumplen (en alguna estructura). Entonces, como estos enunciados son universales, se cumplen para cualquier término. En particular,

$$C_1 s_1 sub \equiv \forall z (Q(c,h(z)) \vee P(f(c),h(z))) \quad \text{y}$$
$$C_2 sub \equiv \forall z (R(h(z),c) \vee \neg P(f(c),h(z)))$$

se cumplen. Esto es, $C_1 s_1 sub$ es una consecuencia de C_1 y $C_2 sub$ es consecuencia de C_2. Puesto de otra forma:

$$C_1 s_1 sub \equiv \forall z (\neg Q(c,h(z)) \longrightarrow P(f(c),h(z))) \text{ y}$$
$$C_2 sub \equiv \forall z (P(f(c),h(z)) \longrightarrow R(h(z),c)).$$

De estos dos enunciados, podemos deducir

$$\forall z (\neg Q(c,h(z)) \longrightarrow R(h(z),c)),$$

que es equivalente a:

$$\forall z (Q(c,h(z)) \vee R(h(z),c)),$$

que es el enunciado representado por R. Así que R es una consecuencia de $C_1 \wedge C_2$.

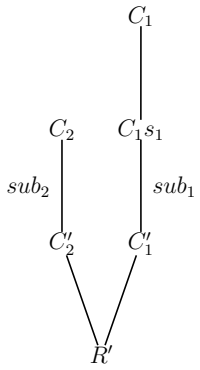
Sigamos adelante con nuestra disertación. Ya sabemos que φ no es satisfacible si y sólo si el conjunto $E(\varphi_0)$ no es satisfacible, donde $\varphi \equiv \forall \vec{y} \varphi_0$. Recuerde que $E(\varphi)$ es el conjunto de enunciados que se obtienen al remplazar cada variable de φ con un término del universo de Herbrand. Estos enunciados se pueden ver como enunciados de la lógica proposicional porque no tienen variables ni cuantificadores. Suponga que C_1' y C_2' están en $E(\varphi)$ y R' es una resolvente de C_1' y C_2' en el sentido de la lógica proposicional. Entonces existen cláusulas C_1 y C_2 de φ tales que $C_1' = C_1 sub_1$ y $C_2' = C_2 sub_2$. En el siguiente teorema probamos que existe una resolvente R de C_1 y C_2 y una sustitución tal que $Rsub = R'$.

En esencia, este resultado dice que cualquier R' que se pueda derivar de $E(\varphi)$ usando resolución proposicional se puede derivar de φ usando resolución en lógica de primer orden. El resultado tendrá enorme relavancia en lo sucesivo y recurriremos a él con frecuencia.

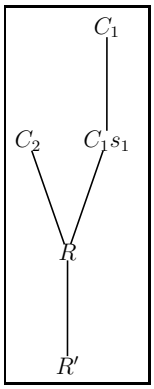
Teorema 1.5.3. *(a) Sea φ un enunciado en FNS. Si $R' \in Res(E(\varphi))$ (en el sentido proposicional), entonces existe $R \in Res(\varphi)$ tal que $Rsub' = R'$ para alguna sustitución sub' (en lógica de primer orden).*

(b) Si $R \in Res(\varphi)$, $R' = Rsub'$ para alguna sustitución sub', entonces $R' \in Res(E(\varphi))$.

Sean φ un enunciado en FNS, C_1, C_2 cláusulas de φ, s_1 la sustitución tal que $C_1 s_1$ y C_2 no tienen variables en común, C_1' y C_2' en $E(\varphi)$ tal que $C_1 s_1 sub_1 = C_1'$ y $C_2 sub_2 = C_2'$ para sustituciones sub_1 y sub_2, y R' una resolvente (en el sentido proposicional) de C_1' y C_2'.



El teorema dice que si esto ocurre, entonces existe una resolvente R de $C_1 s_1$ y C_2 (en el sentido de primer orden) tal que $Rsub' = R'$ para alguna sustitución sub'. Esta conclusión, en símbolos, es



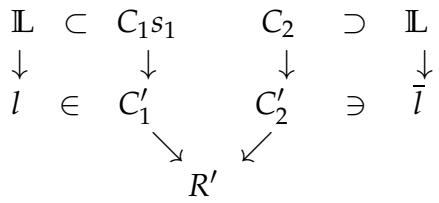
En el primer diagrama, la resolvente se tiene como en la lógica proposicional. En el segundo, la resolvente es en lógica de primer orden.

Demostración. (a) Suponga que el primer diagrama se cumple. Entonces debe existir una literal $l \in C_1$ tal que $\overline{l} \in C_2'$ y $R' = (C_1' - \{l\}) \cup (C_2' - \{\overline{l}\})$. Ésta es la definición de resolvente en lógica proposicional.

Sea $sub' = sub_1 sub_2$. Como $C_1 s_1$ y C_2 no tienen variables en común, $C_1 s_1 sub' = C_1 s_1 sub_1 = C_1'$ y $C_2 sub' = C_2 sub_2 = C_2'$.

Sea $\mathbb{L}_1 = \{l_1, \ldots, l_n\}$ el conjunto de las l_i en $C_1 s_1$ tales que $l_i sub' = l$. En forma similar, sea $\mathbb{L}_2 = \{l_1', \ldots, l_m'\}$ el conjunto de las l_i' en C_2 tales que $l_i' sub' = \overline{l}$.

Tenemos el siguiente diagrama:



Sea $\mathbb{L} = \{\overline{l}_1 \ldots, \overline{l}_n, l'_1, \ldots, l'_m\}$ (esto es, $\mathbb{L} = \overline{\mathbb{L}}_1 \cup \mathbb{L}_2$).

Este conjunto es unificable pues $\mathbb{L}_{sub'} = \{\overline{l}\}$. Sea sub el umg de $\mathbb{L}$. Entonces podemos aplicar la definición y encontrar la resolvente de C_1 y C_2,

$$R = [(C_1 s_1 - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2)]sub.$$

En referencia al segundo diagrama del lema, resta probar que R' se puede obtener de R por una sustitución. Terminamos la prueba del lema si mostramos que $Rsub' = R$. Aplicamos sub' y obtenemos

$$Rsub' = [(C_1 s_1 - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2)]subsub'.$$

Como sub' es un unificador para $\mathbb{L}$ y sub es un umg para $\mathbb{L}$, sabemos que $subsub' = sub'$. Así que

$$\begin{aligned} Rsub' &= [(C_1 s_1 - \mathbb{L}_1) \cup (C_2 - \mathbb{L}_2)]sub' \\ &= (C_1 s_1 sub' - \mathbb{L}_1 sub') \cup (C_2 sub' - \mathbb{L}_2 sub') \\ &= (C'_1 - \{l\}) \cup (C'_2 - \{\overline{l}\}) = R'. \end{aligned}$$

(b) Sea R una U-resolvente de C_1, C_2, digamos que $R = (M_1 \cup M_2\xi)\eta$, $C_i = M_1 \cup L_i$ $(i = 1, 2)$ y $(\overline{L_1} \cup_2 \xi)\eta = \{l_0\}$, donde ξ es un cambio de nombre para C_1 y C_2 y η es el umg de $\overline{L}_1 \cup L_2\xi$. Además, sea $Csub$ una instancia básica de R. Hacemos

$$\begin{aligned} sub_1 &= \eta sub \\ sub_2 &= \xi\eta sub. \end{aligned}$$

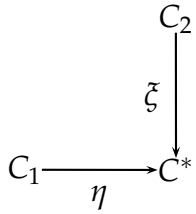
Podemos suponer que $C_1 sub_1$ y $C_2 sub_2$ son cláusulas básicas (en otro caso, remplazamos sub por $subv$, donde $v(x)$ es un término básico si x aparece en $C_1 sub_1 \cup C_2 sub_2$ y notemos que $Rsubv = Rsub$ pues $Rsub$ es una instancia básica). Por consiguiente, basta probar que $Rsub$ es una resolvente de $C_1 sub_1$ y $C_2 sub_2$. Para ello es suficiente notar que

$$\begin{aligned} C_1 sub_1 &= M_1 sub_1 \cup L_1 sub_1 = M_1 sub_1 \cup \{\overline{l}_0 sub\} \\ C_2 sub_2 &= M_2 sub_2 \cup L_2 sub_2 = M_2 sub_2 \cup \{l_0 sub\} \end{aligned}$$

y

$$M_1 sub_1 \cup M_2 sub_2 = (M_1 \cup M_2\xi)\eta sub = Rsub.$$

Corolario 1.5.4. *Si C_1 y C_2 son cláusulas, $C_1 sub_1, C_2 sub_2$ son instancias básicas de C_1 y C_2 y C es una resolvente de $C_1 sub_1, C_2 sub_2$, entonces para todo conjunto finito Y de variables existen C^*, ξ, η y ν tales que*



es una U-resolvente y $C = C^*\nu$, así como $y\eta\nu = y sub_1$ para $y \in Y$.

Demostración. Se sigue de la prueba del teorema 1.5.3. Queda como ejercicio para el lector.

Corolario 1.5.5. *Sea φ un enunciado en FNS. Si $C' \in Res^*(E(\varphi))$, entonces existe $C \in Res^*(\varphi)$ y una sustitución sub' tal que $Csub' = C'$. A la inversa, si $C' \in Res^*(\varphi)$, entonces existe $C \in Res^*(E(\varphi))$ y una sustitución sub tal que $Csub = C'$.*

Demostración. Si $C' \in Res^*(E(\varphi))$, entonces $C' \in Res^n(E(\varphi))$ para algún n. Probaremos el corolario por inducción en n. Si $n = 0$, entonces $C' \in E(\varphi)$. Por la definición de $E(\varphi)$, C' se obtiene al sustituir términos sin variables por variables en alguna $C \in \varphi$.

Para la etapa inductiva, utilizamos el teorema 1.5.3. Suponga que para alguna m, cada cláusula de $Res^m(E(\varphi))$ se obtiene de alguna cláusula de $Res^*(\varphi)$ mediante sustitución. Sea $\tilde{\varphi} \subset Res^*(\varphi)$ tal que toda cláusula de $Res^m(E(\varphi))$ surge de alguna cláusula en $\tilde{\varphi}$. Entonces $Res^m(E(\varphi)) \subset E(\tilde{\varphi})$.

Si $C' \in Res^{m+1}(E(\varphi))$, $C' \in Res(E(\tilde{\varphi}))$. Por el lema, existe $C \in Res(\tilde{\varphi})$ tal que $Csub' = C'$ para alguna sustitución sub'. Como $\tilde{\varphi} \subset Res^*(\varphi)$, $C \in Res^*(\varphi)$. La demostraciónde la aseveración recíproca queda como ejercicio.

Teorema 1.5.6. *Sea φ un enunciado en FNS. Entonces φ no es satisfacible si y sólo si $\square \in Res^*(\varphi)$.*

Demostración. Sabemos que Φ es satisfacible si y sólo si $E(\Phi)$ lo es, es decir, por resolución proposicional, si y sólo si $\square \notin Res^*(E(\Phi))$. Por el corolario 1.5.5, lo último se cumple si y sólo si $\square \notin Res^*(\varphi)$.

A continuación presentamos ejemplos de las nociones relacionadas con resolución.

Ejemplo 1.5.7. Sean $C_1 = \{P(f(x), y), Q(a, b, x)\}$, $C_2 = \{\neg P(f(g(c)), g(d))\}$. Estas cláusulas no tienen variables en común. Note que C_1 contiene símbolos de la forma $P(\cdot, \cdot)$ y Q, mientras que C_2 es de la forma $\neg P(\cdot, \cdot)$. Sea $\mathbb{L} = \{P(f(x), y),\ P(f(g(x)),\ g(d))\}$. Aplicamos el algoritmo de unificación. Sean $sub_0 = \varnothing$ y $sub_1 = x/g(c)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0 =& \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_1 =& \mathbb{L}_0 sub_1 = \{P(f(g(c)), y), P(f(g(c)), g(d))\} \\ sub_2 =& y/g(d) \\ \mathbb{L} =& \mathbb{L}_1 sub_2 = \{P(f(g(c)), g(d))\} \end{aligned}$$

así que $\mathbb{L}$ es unificable y $sub = sub_2 sub_1 sub_0 = (x/g(c), y/g(d))$ es un unificador más general. Además,

$$\begin{aligned} R =& [(C_1 - \{P(f(x), y)\}) \cup (C_2 - \{\neg P(f(g(c)), g(d))\})] sub \\ =& \{Q(a, b, g(c))\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.8. Considere la fórmula ψ en forma clausal:

$$\psi = \{Q(a, x, f(g(z))), Q(z, f(y), f(y))\}$$

¿Es ψ unificable?

Empezamos con $sub_0 = \varnothing$. Buscamos la primera discordancia en ψ y definimos $sub_1 = z/a$. Se sigue que

$$\psi sub_1 = \{Q(a, x, f(g(a)), Q(a, f(y), f(y))\}.$$

La siguiente divergencia arroja $sub_2 = x/f(y)$. En consecuencia,

$$\psi sub_1 sub_2 = \{Q(a, f(y), f(g(a))), Q(a, f(y), f(y))\}.$$

La tercera discrepancia nos induce a definir $sub_3 = y/g(a)$ y obtenemos

$$\psi sub_1 sub_2 sub_3 = \{Q(a, f(g(a)), f(g(a)))\},$$

por lo que ψ es unificable.

Ejemplo 1.5.9. Considere la siguiente información.

- Si alguien es inteligente, tiene sentido común.
- Trump no tiene sentido común.

Corroboremos que Trump no es inteligente.

1. $\forall x(I(x) \to H(x))$
2. $\neg H(T)$
3. $\neg I(T)$.

La última afirmación es lo que pretendemos demostrar, por lo cual incorporamos su negación a las dos primeras para formar un conjunto:

$$\Sigma = \{\forall x(I(x) \to H(x)), \neg H(T), I(T)\}.$$

Si Σ es no satisfacible, sabremos que la última fórmula es incompatible con la información de que disponemos. Esto es tanto como decir que las premisas implican que Trump no es inteligente.

$$\varphi_1 = \{\overline{I}(x), H(x)\}$$
$$\varphi_2 = \{\overline{H}(T)\}$$
$$\varphi_3 = \{I(T)\}.$$

Tenemos la siguiente refutación.

1. $\{\overline{I}(x), H(x)\}$ Premisa.
2. $\{\overline{H}(T)\}$ Premisa.
3. $\{I(T)\}$ Meta negada.
4. $\{\overline{I}(T)\}$ 1 y 2(x/T).
5. $\square$ 3 y 4.

«Dulce, fragante» Decíase de la ciudad donde la genta es feliz y está contenta, o también se decía del rey que alegra a su gente.

Ejemplo 1.5.10. Consideremos los siguientes hechos.

- ❀ Sara es la madre de Marga.
- ❀ Sara está viva.
- ❀ Si x es la madre de y, entonces x es uno de los padres de y.
- ❀ Si x es uno de los padres de y y x está viva, entonces x es más vieja que y.

Probemos que Sara es más vieja que Marga. Los hechos:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv Mama(S, M)\\
\varphi_2 &\equiv Viva(S)\\
\varphi_3 &\equiv \forall\, x, y(Mama(x, y) \rightarrow Ma - Pa(x, y)\\
\varphi_4 &\equiv \forall\, x, y(Ma - Pa(x, y) \wedge Viva(x)) \rightarrow Vieja(x, y)\\
\varphi_5 &\equiv Vieja(S, M).
\end{aligned}$$

1. $\{Mama(S, M)\}$. Premisa
2. $\{Viva(S)\}$. Premisa
3. $\{\overline{Mama}(x, y), Ma - Pa(x, y)\}$. Premisa
4. $\{\overline{Ma - Pa}(x, y), \overline{Viva}(x, y), Vieja(x, y)\}$. Premisa
5. $\{\overline{Vieja}(S, M)\}$. Meta negada.
6. $\{Ma - Pa(S, M)\}$ 1,(3$(x/S, y/M)$.
7. $\{\overline{Viva}(S), Vieja(S, M)\}$ 6, 4$(x/S, y/M)$.
8. $\{Vieja(S, M)\}$ 7, 2.
9. $\square$ 8,5.

Ejemplo 1.5.11. Con la misma información que en el ejemplo previo, queremos averiguar si existe alguien más vieja(o) que Marga. Ahora tenemos

$$\varphi_6 \equiv \exists\, x Vieja(x, M).$$

que al negarla

$$\forall\, x(\neg Vieja(x, M).$$

Recuperamos la prueba del ejemplo anterior

1. $\{Mama(S, M)\}$. Premisa
2. $\{Viva(S)\}$. Premisa
3. $\{\overline{Mama}(x, y), Ma - Pa(x, y)\}$. Premisa
4. $\{\overline{Ma - Pa}(x, y), \overline{Viva}(x, y), Vieja(x, y)\}$. Premisa
5. $\{\overline{Vieja}(x, M)\}$. Meta negada.
6. $\{Ma - Pa(S, M)\}$ 1,(3$(x/S, y/M)$.
7. $\{\neg Viva(S), Vieja(S, M)\}$ 6, 4$(x/S, y/M)$.
8. $\{Vieja(S, M)\}$ 7, 2.
9. $\square$ 8,5(x/S).

> «Su aliento, su palabra». Decíase esto de la palabra de los reyes; se decía el aliento, la palabra del rey, no de la palabra de nadie más, sino de la palabra, del aliento de nuestro señor.

Ejemplo 1.5.12. Ahora considere

$$\theta = \{Q(y, y), Q(z, f(z))\}.$$

Sean $sub_0 = \varnothing$ y $sub_1 = y/z$. Obtenemos

$$\theta sub_1 = \{Q(z, z), Q(z, f(z))\}.$$

Buscamos la segunda discrepancia y encontramos z y el término $f(z)$. El término contiene a la variable, así que el algoritmo de unificación responde que θ no es unificable.

Ejemplo 1.5.13. Considere las siguientes fórmulas:

$$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y \forall z[P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)] \quad \text{(transitividad)}$$
$$\varphi_2 \equiv \forall u \forall v[P(u, v) \rightarrow P(v, u)] \quad \text{(simetría)}$$
$$\varphi_3 \equiv \forall x \forall y \forall z[P(x, y) \wedge P(z, y) \rightarrow P(x, z)].$$

Queremos probar que

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3,$$

que es equivalente a probar

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \varphi_3.$$

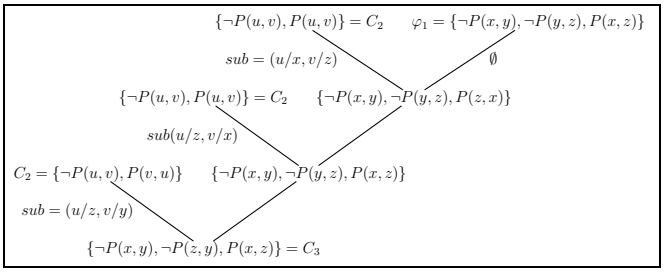
Resolveremos este problema en dos formas. 1. Usamos resolución, y para ello requerimos la forma clausal de las fórmulas implícitas:

$$\begin{aligned}\varphi_1 =&\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}\\ \varphi_2 =&\{\neg P(u,v), P(v,u)\}\\ \varphi_3 =&\{\neg P(x,y), \neg P(z,y), P(x,z)\}.\end{aligned}$$

Damos una demostración por resolución de φ_3:

1. $\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}$, φ_1.
2. $\{\neg P(u,v), P(v,u)\}$, φ_2.
3. $\{\neg P(x,z), P(z,x)\}$, en 2 aplicamos $sub = (u/x, v/z)$.
4. $\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(z,x)\}$, resolvente de 1 y 3.
5. $\{\neg P(z,x), P(x,z)\}$, en 2 usamos $sub = (u/z, v/x)$.
6. $\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}$, resolución en 4 y 5.
7. $\{\neg P(z,y), P(y,z)\}$, en 2 usamos $sub = (u/z, v/y)$.
8. $\{\neg P(x,y), \neg P(z,y), P(x,z)\}$, resolución en 6 y 7.

Note que la fórmula en 8 es φ_3.
2. Otra vez resolución, pero en forma de árbol:



Esta forma de resolución se usa también en PROLOG.

Ejemplo 1.5.14. Considere los siguientes hechos:

- $\varphi_1 \equiv$ Vicente es un ladrón.
- $\varphi_2 \equiv$ Martha gusta del poder.
- $\varphi_3 \equiv$ Martha gusta del lujo.
- $\varphi_4 \equiv$ Vicente gusta del dinero.
- $\varphi_5 \equiv$ Vicente gusta de cualquiera que guste del lujo.
- $\varphi_6 \equiv x$ puede robar y si x es ladrón y x gusta de y.

Se pide contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puede robar Vicente?
2. ¿Puede Vicente robar a Martha?

Primero traducimos la información; con este fin introducimos la siguiente notación.

$$\begin{aligned} L(x) &\equiv x \text{ es un ladrón.} \\ Gusta(x,y) &\equiv x \text{ gusta de } y. \\ Puede-robar(x,y) &\equiv x \text{ puede robar } y. \\ \text{Vicente} &\equiv v. \\ \text{Martha} &\equiv m. \\ \text{Dinero} &\equiv d. \\ \text{Lujo} &\equiv l. \\ \text{Poder} &\equiv p. \end{aligned}$$

La información que tenemos es

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv L(v). \\ \varphi_2 &\equiv Gusta(m,p). \\ \varphi_3 &\equiv Gusta(m,l). \\ \varphi_4 &\equiv Gusta(v,d). \\ \varphi_5 &\equiv \forall\, x(Gusta(x,l) \to Gusta(v,x)). \\ \varphi_6 &\equiv \forall\, x \forall\, y(L(x) \wedge Gusta(x,y) \to Puede-robar(x,y)). \end{aligned}$$

La traducción de las preguntas es

$$\begin{aligned} \varphi_7 &\equiv Puede-robar(v,x). \\ \varphi_8 &\equiv Puede-robar(v,m). \end{aligned}$$

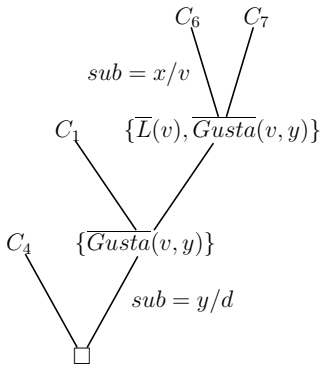
Sea $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$. Lo que queremos averiguar es si para algún valor de $a \in \{\text{dinero, poder, vicente, martha, lujo}\}$, se cumple $(\varphi_7)_x(a)$ y si se cumple φ_8.

Usaremos resolución para probar que $\Sigma \cup \{\neg(\varphi_7)_x(a)\}$ no es satisfacible para ciertos a, lo que de paso nos dirá de qué a se trata. Igualmente probaremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi_8\}$ no es satisfacible, lo cual quiere decir que $\Sigma \models \varphi_8$ y $\Sigma \models (\varphi_7)_x(a)$. Por lo tanto, habremos respondido las preguntas.

Requerimos la forma clausal de $\varphi_1 - \varphi_6$, $\neg\varphi_7$ y $\neg\varphi_8$.

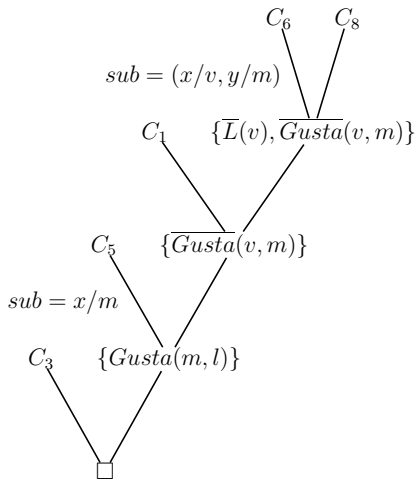
$$
\begin{aligned}
C_1 =& \{L(v)\}\\
C_2 =& \{Gusta(m,p)\}\\
C_3 =& \{Gusta(m,l)\}\\
C_4 =& \{Gusta(v,d)\}\\
C_5 =& \{\overline{Gusta}(x,l), Gusta(v,x)\}\\
C_6 =& \{\overline{L}(x), \overline{Gusta}(x,y), Puede-robar(x,y)\}\\
C_7 =& \neg\varphi_7 = \{\overline{Puede-robar}(v,x)\}\\
C_8 =& \neg\varphi_8 = \{\overline{Puede-robar}(v,m)\}.
\end{aligned}
$$

Tenemos la siguiente resolución:



Así que Vicente puede robar dinero, es decir, $\Sigma \models (\varphi_7)_x(a)$ si $a =$dinero.

Respecto a la segunda pregunta, tenemos la siguiente resolución:



Efectivamente, Vicente es capaz de robar a Martha.

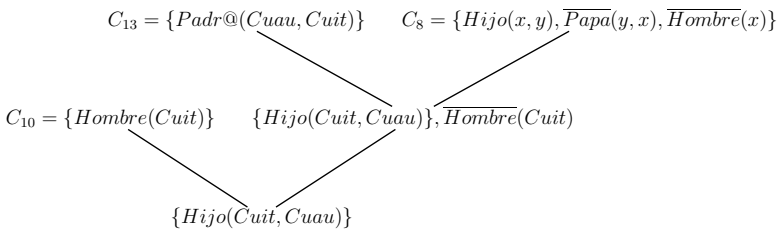
«Pelo y uña, espina y púas, barba y ceja, pedazo y astilla de alguien». Quiere decir alguien que nace de un linaje de señores, de genta noble, y también se lo llama la sangre, el color de alguien.

Ejemplo 1.5.15. Tenemos las siguientes fórmulas para describir ciertas relaciones familiares.

1. $Mama(x,y) \rightarrow Padr@(x,y)$
2. $Papa(x,y) \rightarrow Padr@(x,y)$
3. $Mama(y,x) \wedge Mujer(x) \rightarrow Hija(x,y)$
4. $Mama(y,x) \wedge Hombre(x) \rightarrow Hijo(x)$
5. $Hijo(x,y) \rightarrow Chamac@(x,y)$
6. $Hija(x,y) \rightarrow Chamac@(x,y)$
7. $Papa(y,x) \wedge Mujer(x) \rightarrow Hija(x,y)$
8. $Papa(y,x) \wedge Hombre(x) \rightarrow Hijo(x)$
9. $Hombre(Cuau)$

10. $Hombre(Cuit)$
11. $Mujer(Xochitl)$
12. $Mujer(Itzel)$
13. $Papa(Cuau, Cuit)$
14. $Papa(Cuau, Itzel)$
15. $Mama(Xochitl, Cuit)$
16. $Mama(Xochitl, Itzel)$

Sea C_i $(i = 1, \ldots, 16)$ la forma clausal de cada una de las fórmulas anteriores. Tenemos la siguiente resolución:



Así que Cuit es hijo de Cuau.

Ejemplo 1.5.16. Disponemos de la siguiente información.

- ✽ Todo caballo corre más rápido que cualquier perro.
- ✽ Algún galgo corre más rápido que cualquier conejo.
- ✽ Los galgos son perros.
- ✽ Mr. Ed es un caballo.
- ✽ Solovino es un conejo.

Note que la relación *correr más rápido* es transitiva. Empleamos el siguiente lenguaje:

- ❋ $g(y) \equiv y$ es galgo.
- ❋ $h(x) \equiv x$ es caballo.
- ❋ $d(z) \equiv z$ es un perro.

❋ $f(x,y) \equiv x$ corre más rápido que y.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall\, x,y(h(x) \wedge d(y) \rightarrow f(x,y)) \\
\varphi_2 &\equiv \exists\, y(g(y) \wedge \forall\, z(r(z) \rightarrow f(y,z)) \\
\varphi_3 &\equiv \forall\, y(g(y) \rightarrow d(y)) \\
\varphi_4 &\equiv \forall\, x,y,z(f(x,y) \wedge f(y,z) \rightarrow f(x,z)) \\
\varphi_5 &\equiv h(Ed) \\
\varphi_6 &\equiv r(Solovino)
\end{aligned}$$

Quisieramos probar que Ed es más rápido que Solovino, esto es

$$\varphi_7 \equiv f(Ed, Solovino)$$

Negamos φ_7 y lo añadimos a los hechos previos para probar que en conjunto no son satisfacibles.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\overline{h}(x), \overline{d}(y), f(x,y)\} \\
C_2 &= \{g(e)\} \\
C_3 &= \{\overline{r}(z), f(e,z)\} \\
c_4 &= \{\overline{f}(x,y), \overline{f}(y,z), f(x,z)\} \\
c_5 &= \{h(Ed)\} \\
c_6 &= \{r(Solovino)\} \\
c_7 &= \{\overline{g}(y), d(y)\} \\
c_8 &= \{\overline{f}(Ed, Solovino)\}
\end{aligned}$$

Tenemos la siguiente refutación.

1. $\{\neg h(x), \neg d(y), f(x,y)\}$ Premisa.
2. $\{g(e)\}$ Premisa.
3. $\{\neg r(z), f(e,z)\}$ Premisa.
4. $\{\neg g(y), d(y)\}$ Premisas.
5. $\{\neg f(x,y), \neg f(y,z), f(x,z)\}$ Premisa.
6. $\{h(Ed)\}$ Premisa.
7. $\{r(Solovino)\}$ Premisa.
8. $\{\neg f(Ed, Solovino)\}$ Meta negada.

9. $\{d(e)\}$ 2,4.
10. $\{\neg d(y), f(Ed, y)\}$ 6,1.
11. $\{f(Ed, e)\}$ 9,10.
12. $\{f(e, Solovino)\}$ 7,3.
13. $\{\neg f(e, z), f(Ed, z)\}$ 11,5.
14. $\{f(Ed, Solovino)\}$ 12,13
15. $\square$ 14,8.

Ejemplo 1.5.17. Vicente ha logrado establecer con ayuda de Martha los siguientes hechos.

1. Existe un dragón.
2. El dragón duerme en su cueva o caza en el bosque.
3. Si el dragón está hambriento, no puede dormir.
4. Si el dragón está cansado, no puede cazar.

Supongamos lo que dice Vicente; apliquemos resolución para responder a lo siguiente

(i) ¿Qué hace el dragón cuando está hambriento?

(ii) ¿Qué hace el dragón cuando está cansado?

(iii) ¿Qué hace el dragón cuando está cansado y hambriento?

Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D(x) &\equiv x \text{ es dragón.} \\ H(x,y,z) &\equiv x \text{ hace } y \text{ en } z. \\ C(x) &\equiv x \text{ está cansado.} \\ P(x,y,z) &\equiv x \text{ puede hacer } y \text{ en } z. \\ A(x) &\equiv x \text{ está hambriento.} \\ \text{Cueva} &\equiv u. \\ \text{Duerme} &\equiv d. \\ \text{Caza} &\equiv c. \\ \text{Bosque} &\equiv b. \end{aligned}$$

Podemos suponer que

5. $\varphi_5 \equiv \forall x(D(x) \wedge H(x,y,z) \rightarrow P(x,y,z))$.

Traducimos la información:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \equiv & \exists x D(x) \\
\varphi_2 \equiv & \forall x(D(x) \rightarrow H(x,d,u) \vee H(x,c,b)) \\
\varphi_3 \equiv & \forall x(D(x) \wedge A(x) \rightarrow \neg P(x,d,z)) \\
\varphi_4 \equiv & \forall x(D(x) \wedge C(x) \rightarrow \neg P(x,c,z)).
\end{aligned}$$

Obtenemos la FNS de $\varphi_1 - \varphi_5$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \equiv & D(e) \\
\varphi_2 \equiv & \forall x[\neg D(x) \vee H(x,d,u) \vee H(x,c,b)] \\
\varphi_3 \equiv & \forall x[\neg D(x) \vee \neg A(x) \vee \neg P(x,d,z)] \\
\varphi_4 \equiv & \forall x[\neg D(x) \vee \neg C(x) \vee \neg P(x,c,z)] \\
\varphi_5 \equiv & \forall x[\neg D(x) \vee \neg H(x,y,z) \vee P(x,y,z)].
\end{aligned}$$

En forma clausal:

$$\begin{aligned}
C_1 = & \varphi_1 = \{D(e)\} \\
C_2 = & \varphi_2 = \{\overline{D}(x), H(x,d,u), H(x,c,b)\} \\
C_3 = & \varphi_3 = \{\overline{D}(x), \overline{A}(x), \overline{P}(x,d,z)\} \\
C_4 = & \varphi_4 = \{\overline{D}(x), \overline{C}(x), \overline{P}(x,c,z)\} \\
C_5 = & \varphi_5 = \{\overline{D}(x), \overline{H}(x,y,z), P(x,y,z)\}.
\end{aligned}$$

La primera pregunta es

$$\forall x(D(x) \wedge A(x) \rightarrow H(x,y,z)),$$

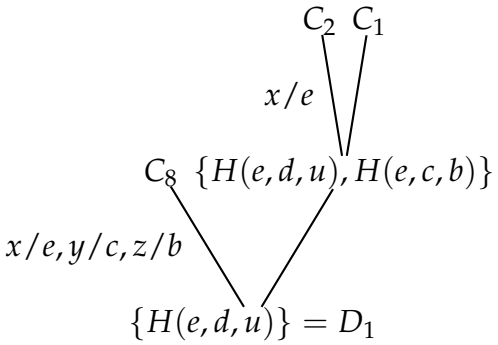
cuya negación es

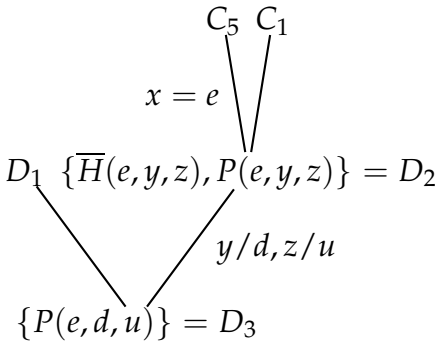
$$\exists x(D(x) \wedge A(x) \wedge \overline{H}(x,y,z)).$$

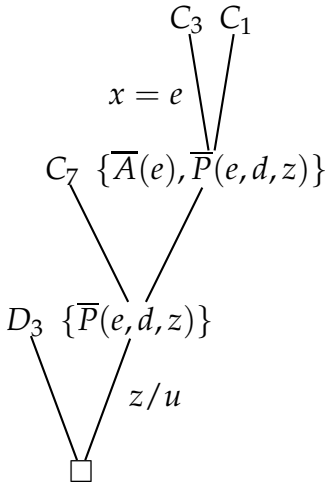
Así,

$$\begin{aligned}
C_6 &= \{D(e)\} \\
C_7 &= \{A(e)\} \\
C_8 &= \{\overline{H}(e,y,z)\}.
\end{aligned}$$

Tenemos la siguiente resolución:







Así que cuando el dragón está hambriento, duerme en la cueva, esto es, $H(e,d,u)$, pues las últimas sustituciones fueron y/d y z/u.

(ii) La segunda pregunta es

$$\forall\, x(D(x) \wedge C(x) \rightarrow H(x,y,z))$$

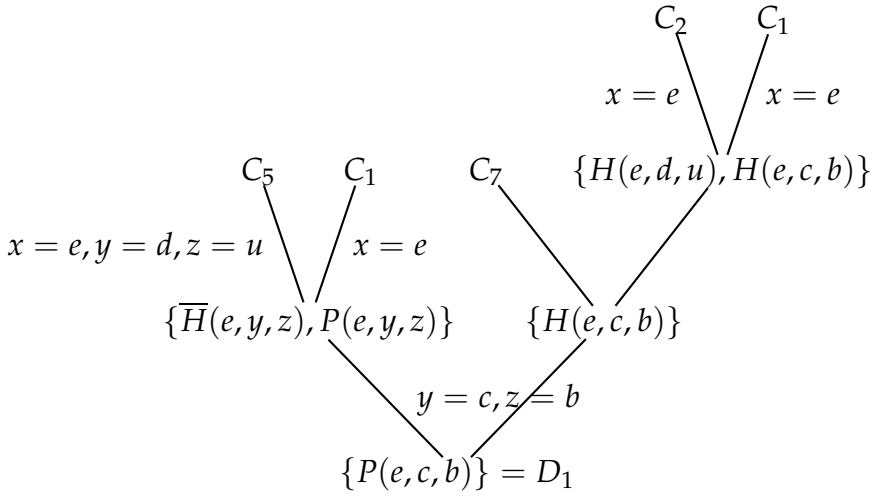
cuya negación es

$$\exists\, x(D(x) \wedge C(x) \wedge \overline{H}(x,y,z)).$$

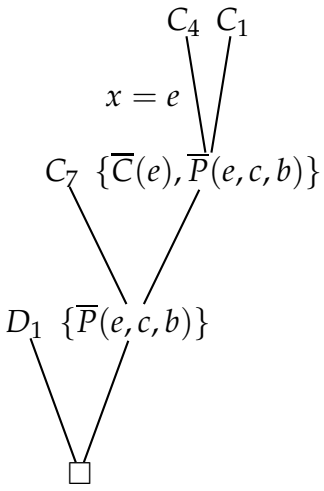
por lo que

$$C_6 = \{D(e)\}$$
$$C_7 = \{C(e)\}$$
$$C_8 = \{\overline{H}(e,y,z)\}.$$

Logramos la resolución:



Por otro lado,



Entonces las últimas sustituciones fueron y/c y z/b, por lo que $H(e,c,b)$, es decir, cuando el dragón está cansado, caza en el bosque.

(iii) La última pregunta

$$\forall\, x(D(x) \wedge C(x) \wedge A(x) \to H(x,y,z))$$

que al negarla da lugar a

$$\exists\, x(D(x) \wedge A(x) \wedge C(x) \wedge \overline{H}(x,y,z))$$

y las cláusulas:

$$\begin{aligned} C_6 &= \{D(e)\} \\ C_7 &= \{C(e)\} \\ C_8 &= \{A(e)\} \\ C_9 &= \{\overline{H}(e,y,z)\}. \end{aligned}$$

Podemos resolver con C_7 y deducir que el dragón caza en el bosque como en (ii) o usamos C_8 y deducimos como en (i) que duerme en la cueva.

Estos resultados no significan que hayamos efectuado mal la resolución o que el método sea pobre; simplemente no proporcionamos información suficiente para obtener respuestas unívocas.

Ejemplo 1.5.18. Contamos con la siguiente información en forma de cláusulas de Horn.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv Persona(Marcus) \leftarrow \\ \varphi_2 &\equiv Persona(Aurelius) \leftarrow \\ \varphi_3 &\equiv Mortal(x1) \leftarrow Persona(x1) \\ \varphi_4 &\equiv Nacio - Pompeya(Aurelius) \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_5 &\equiv Nacio - Pompeya(Marcus) \leftarrow \\ \varphi_6 &\equiv Nacio(Aurelius, 45) \leftarrow \\ \varphi_7 &\equiv Nacio(Marcus, 40) \leftarrow \\ \varphi_8 &\equiv Murio(x2, 79) \leftarrow Nacio - Pompeya(x2) \end{aligned}$$

$$\varphi_9 \equiv Erupcion(volcan, 79) \leftarrow$$
$$\varphi_{10} \equiv Muerto(x3, t2) \leftarrow Mortal(x3), Nacio(x3, t1), t2 - t1 > 150$$
$$\varphi_{11} \equiv No - Vivo(x4, t3) \leftarrow Muerto(x4, t3)$$
$$\varphi_{12} \equiv Muerto(x5, t4) \leftarrow No - Vivo(x5, t4)$$

$$\varphi_{13} \equiv Muerto(x6, t6) \leftarrow Murio(x6, t5), t6 > t5$$
$$\varphi_{14} \equiv \leftarrow No - Vivo(x, 2018)$$

La pregunta es ¿Quién no está vivo en 2018?, lo cual se expresa en φ_{14}. La forma clausal de la información es:

$$C_1 = \{Persona(Marcus)\}$$
$$C_2 = \{Persona(Aurelius)\}$$

$$C_3 = \{Mortal(x1), \neg Persona(x1)\}$$
$$C_4 = \{Nacio - Pompeya(Aurelius)\}$$
$$C_5 = \{Nacio - Pompeya(Marcus)\}$$
$$C_6 = \{Nacio(Aurelius, 45)\}$$

$$C_7 = \{Nacio(Marcus, 40)\}$$
$$C_8 = \{Murio(x2, 79), \neg Nacio - Pompeya(x2)\}$$
$$C_9 = \{Erupcion(volcan, 79)\}$$

$$C_{10} = \{Muerto(x3, t2), \neg Mortal(x3), \neg Nacio(x3, t1), \neg(t2 - t1) > 150\}$$
$$C_{11} = \{No - Vivo(x4, t3), \neg Muerto(x4, t3)\}$$

$$C_{12} = \{Muerto(x5, t4), \neg No - Vivo(x5, t4)\}$$
$$C_{13} = \{Muerto(x6, t6), \neg Murio(x5, t5), \neg(t6 > t5)\}$$
$$C_{14} = \{\neg No - Vivo(x, 2018)\}.$$

Tenemos la siguiente prueba por resolución:

1. $\{\neg Muesrto(x, 2018)\}$, resolución de C_{14} con $C_{11}(x4/x, t3/2018)$.
2. $\{\neg Mortal(x), \neg Nacio(x, t1), \neg(2018 - t1 > 150)\}$ de 1 y $C_{10}(x3/x, t2/2018)$.
3. $\{\neg Nacio(Marcus, t4), \neg(2018 - t1 > 150)\}$ de 2 y $C_1(x/Marcus)$.
4. $\{\neg(2018 - 40 > 150)\}$ de C_7 y $3(t1/40)$.
5. $\{2018 - 40 > 150\}$ Axioma
6. $\square$ de 4 y 5.

Por lo tanto, $x = Marcus$, $\neg No - Vivo(Marcus, 2018)$, esto es, Marcus no está vivo en 2018. Note que en podemos hacer $x = Aurelius$ y hacer una resolución correspondiente, para concluir con $\square$. Por tanto, Aurelius no está vivo en 2018.

Los antiguos mexicanos reconocían la existencia de 13 cielos sobrepuestos, pero es difícil saber qué particularidades atribuían a cada uno. El primer cielo es el de las estrellas. El segundo está habitado por los Tzitzimime, monstruos de aspecto esquelético que se lanzarán sobre el mundo cuando, en la fecha fijada por los dioses, nuestro sol perezca. A partir de ese momento, el fuego nuevo que se prende cada 52 años no se podrá volver a encender, habrá temblores de tierra y los Tzitzimime devorarán a los vivos. En el tercer cielo se encuentran «cuatrocientos», es decir, innumerables seres creados por Tezcatlipoca y encargados de guardar los cielos: algunos son rojos (color del Este), otros son negros (Norte), otros blancos (Oeste), otros azules (Sur); otros, en fin, son amarillos, color del fuego y del centro.

El cuarto cielo es la morada de las «aves que descienden sobre la tierra». Por ello hay que entender, probablemente, las almas de los guerreros sacrificados, que se transforman en aves preciosas al cabo de cuatro años para volver a rondar por los campos de México. El quinto cielo es el de las «serpientes de fuego», es decir, de los meteoros y de los cometas. Como muchos pueblos antiguos, los mexicanos atribuían a estos cuerpos celestes un gran valor como presagios. Un cometa es una «estrella humeante», citlalin popoca. Anuncia un hambre, una guerra, la muerte de un rey. Su cauda brillante es de flechas de fuego. Si esas flechas alcanzan a un hombre o a un animal provocan, en el lugar tocado, una inflamación donde se desarrolla un gusano por una especie de generación espontánea.

El sexto cielo se hallan los vientos, en número de cuatro, uno para cada punto cardinal. El séptimo cielo es el del polvo. En el octavo habitan los dioses.

1.6 Árboles semánticos

En esta sección desarrollamos otro método para certificar que una fórmula no es satisfacible. Al igual que en el cálculo proposicional, los árboles semánticos resultan una herramienta para este fin. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ un $\mathcal{L}$-enunciado en FNS y S el conjunto de cláusulas de φ. Sabemos que si φ es satisfacible, ya sea φ o $E(\varphi)$ se satisface en una interpretación de Herbrand y dado que φ sólo tiene cuantificadores universales (de haber alguno), la semántica nos dice que S se debe satisfacer para todos los elementos del

universo de Herbrand asociado. En consecuencia, si φ no es satisfacible, deben existir elementos del universo de Herbrand que hagan fallar a φ o a $E(\varphi)$. Resulta conveniente encontrar un método que comience con S y transcurra como sigue.

1. Si φ no es satisfacible, termina después de una cantidad finita de etapas.

2. Si φ es satisfacible, el procedimiento no termina pero construye una interpretación de Herbrand que satisface φ.

Un ejemplo de tal procedimiento se conoce como árbol semántico. Permítanos describirlo.

Definición 1.6.1 (Árbol semántico)**.** Sean $S = \{C_1, \ldots, C_n\}$ un conjunto de cláusulas; $P_1, \ldots, P_l$ las fórmulas atómicas que aparecen en alguna C_i; y $H = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ el universo de Herbrand de S. Un árbol semántico T para S se define así:

1. La raíz de T es un punto arbitrario. Los nodos que parten de la raíz son dos y son las instancias básicas $P_1(\vec{a})$ y $\neg P_1(\vec{a})$, respectivamente. Cada nodo j tiene dos descendientes: una instancia básica $P_{j+1}(\vec{a})$ y una instancia básica $\neg P_{j+1}(\vec{a})$.

2. Cada rama de T que contenga las instancias básicas

$$P_r(a_{r_1}, \ldots, a_{r_o}), \ldots, P_k(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}),$$

representa la conjunción

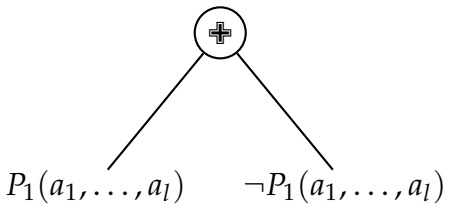
$$P_r(a_{r_1}, \cdots, a_{r_o}) \wedge \cdots \wedge P_k(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}).$$

3. La disyunción de las conjunciones en las ramas de T es lógicamente válida.

4. Si un nodo de T es $P_i(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$, el siguiente nodo no puede ser $\neg P_i(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$.

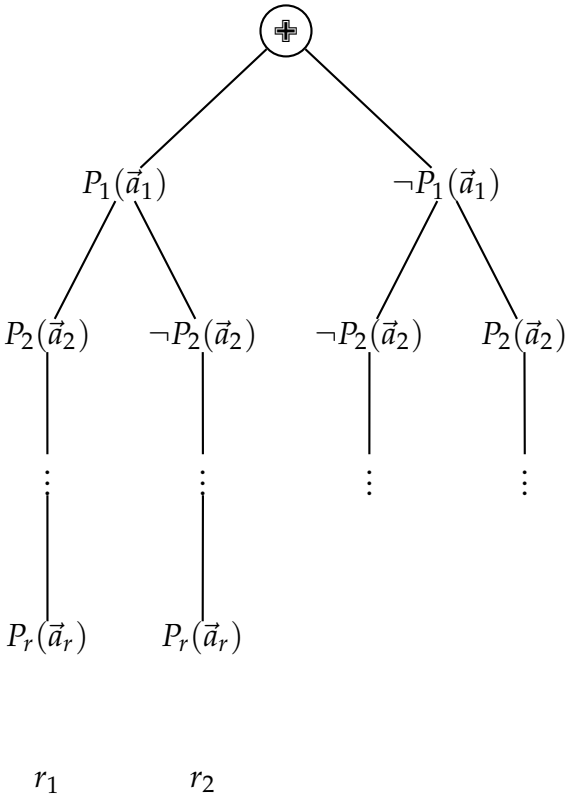
5. Si durante la construcción de T llegamos al nodo k que contradice una instancia básica de alguna C_i de S, entonces k es un nodo final y la rama es contradictoria.

La construcción del árbol semántico inicia gráficamente con un punto como raíz. Se ocupa la primera fórmula atómica de la enumeración P_1 y se obtiene una instancia básica con los elementos del universo de Herbrand $P_1(a_1, \ldots, a_n)$



Si alguna de las cláusulas de S contradice $\neg P_1(a_1, \ldots, a_n)$, la rama a la derecha es contradictoria, $\neg P_1(a_1, \ldots, a_n)$ es un nodo final y la construcción prosigue sólo a la izquierda. Si una de las cláusulas de S contradice $P_1(a_1, \ldots, a_n)$, entonces la rama izquierda es contradictoria, $P_1(a_1, \ldots, a_n)$ es un nodo final y la construcción sólo puede continuar a la derecha. Si no ocurre ninguno de estos casos la construcción continúa en ambas ramas. Si ocurren ambos casos, la construcción se detiene.

Supongamos que $P_k(a_{k_1}, \ldots, a_{k_l})$ no es un nodo final. Construimos el nodo $P_{k+1}(a_{s_1}, \ldots, a_{s_h})$ (la elección de este nodo es arbitraria):



La rama r_1 es la conjunción $P_1(\vec{a}_1) \wedge \cdots \wedge P_r(\vec{a}_r)$. Verificamos si alguna de las cláusulas de S contradice la rama r_1; si éste es el caso, r_1 es contradictoria. El objetivo es alcanzar los nodos finales usando, de ser necesario, todos los átomos de S.

Definición 1.6.2.

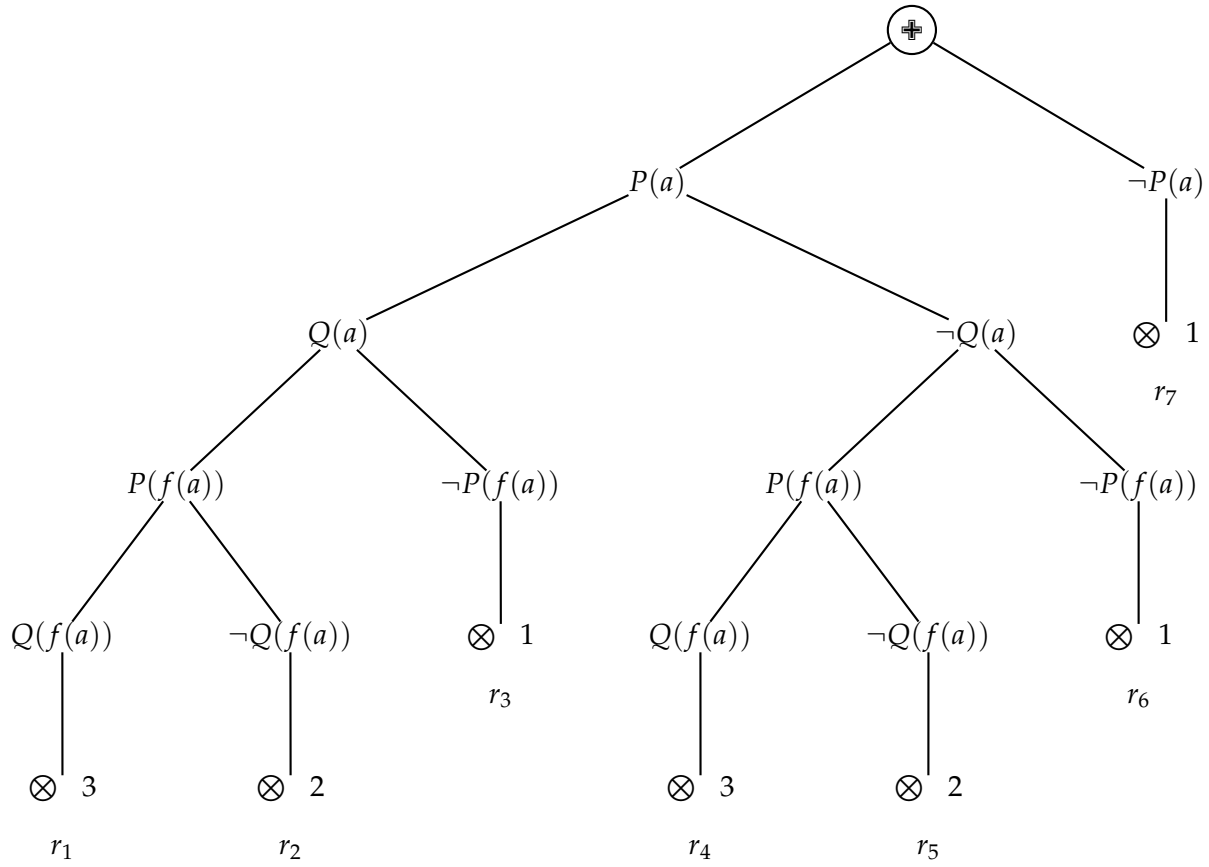
1. Un conjunto de fórmulas S es refutable por un árbol semántico si existe un árbol semántico para S cuyas ramas sean contradictorias.

2. Una rama r de un árbol semántico de una fórmula S está completa si para toda instancia básica $P(a_1, \ldots, a_n)$ de cada átomo de S, $P(a_1, \ldots, a_n)$ o $\neg P(a_1, \ldots, a_n)$ está en r.

Ejemplo 1.6.3. Supongamos que $\varphi \equiv \forall x[P(x) \wedge (\neg P(x) \vee Q(f(x)) \wedge \neg Q(f(x))]$. El conjunto de cláusulas asociado es

$$S = \{\underbrace{\{P(x)\}}_{1}, \underbrace{\{\neg P(x), Q(f(x))\}}_{2}, \underbrace{\{\neg Q(f(x))\}}_{3}\}.$$

El universo de Herbrand es $H = \{a, f(a), ff(a), fff(a), \ldots\}$.
Instancias básicas$= \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \ldots\}$.
El árbol semántico es



donde hemos señalado con $\otimes$ las ramas contradictorias y junto a este símbolo anotamos la cláusula de S que la hizo incurrir en esto.

Por ejemplo, r_4 es contradictoria porque representa la conjunción

$$P(a) \wedge \neg Q(a) \wedge P(f(a)) \wedge Q(f(a)), \qquad (*)$$

y la cláusula C_3 es $\neg Q(f(x))$. Según φ, C_3 debe ser cierta para todo elemento del universo, en particular para $f(a)$, lo que contradice $(*)$.

Para r_6, ésta representa la conjunción

$$P(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(f(a)), \qquad (*)$$

mientras que $C_1 = \{P(x)\}$, por lo que $P(x)$ debe ser cierta para cualquier x, en particular para $f(a)$. En (✻), $P(x)$ es cierta para $x = a$, no así para $x = f(a)$, por lo que r_6 es contradictoria.

Ejemplo 1.6.4. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles.

$$\begin{aligned}\varphi \equiv& \exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall y \exists x \neg P(y,x).\\ \psi \equiv& \exists x \forall y \forall z \exists w [P(x,y) \wedge \neg P(y,x)].\\ \theta \equiv& \forall x [A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))] \wedge \exists x [A(x) \wedge D(x)] \wedge \neg \exists x (D(x) \wedge C(x)).\end{aligned}$$

Primero obtenemos la FNS de las tres fórmulas.

1.

$$\begin{aligned}\varphi \equiv& \exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall z \exists w \neg P(z,w)\\ \equiv& \exists x \forall y \forall z \exists w [P(x,y) \wedge \neg P(z,w)].\\ S(\varphi) =& \forall x \forall z [P(c,y) \wedge \neg P(z, f(y,z))].\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\psi \equiv& \exists x \forall y \forall z \exists w [P(x,y) \wedge \neg P(y,x)]\\ S(\psi) =& \forall y \forall z [P(c,y) \wedge \neg P(y,c)].\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\theta \equiv& \forall x [A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))] \wedge \exists u [A(u) \wedge D(u)] \wedge \neg \exists w [D(w) \wedge C(w)]\\ \equiv& \forall x [\neg A(x) \vee (B(x) \wedge C(x))] \wedge \exists u [A(u) \wedge D(u)] \wedge \forall w [\neg D(w) \vee \neg C(w)]\\ \equiv& \forall x [\neg A(x) \vee (B(x) \wedge C(x))] \wedge \exists u [A(u) \wedge D(u)] \wedge \forall w [\neg D(w) \vee \neg C(w)]\\ \equiv& \forall x \exists u \forall w [(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(x)) \wedge A(u) \wedge D(u) \wedge\\ & (\neg D(w) \vee \neg C(w))]\\ S(\theta) =& \forall x \forall w [(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(x)) \wedge A(f(x)) \wedge\\ & D(f(x)) \wedge (\neg D(w) \vee \neg C(w))].\end{aligned}$$

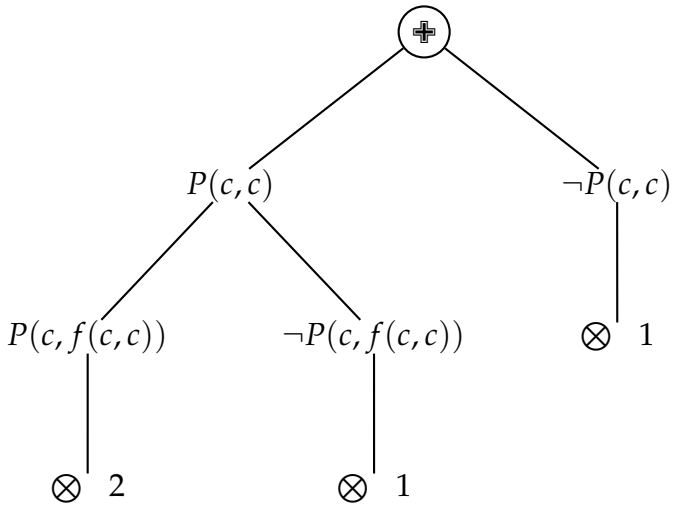
Ahora construimos su forma clausal.

1. $S_\varphi = \{\underbrace{\{P(c,y)\}}_{1}, \underbrace{\{\overline{P}(z,f(y,z))\}}_{2}\}$.
2. $S_\psi = \{\underbrace{\{P(c,y)\}}_{1}, \underbrace{\{\overline{P}(y,c)\}}_{2}\}$.

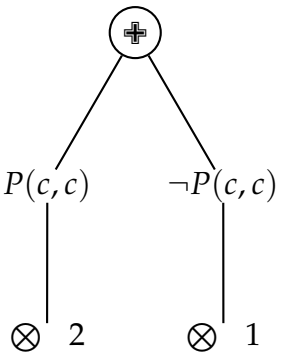
3.

$$S_\theta = \{\underbrace{\{\overline{A}(x), B(x)\}}_{1}, \underbrace{\{\overline{A}(x), C(x)\}}_{2}, \underbrace{\{A(f(x))\}}_{3}, \underbrace{\{D(f(x))\}}_{4}, \underbrace{\{\overline{D}(w), \overline{C}(w)\}}_{6}\}.$$

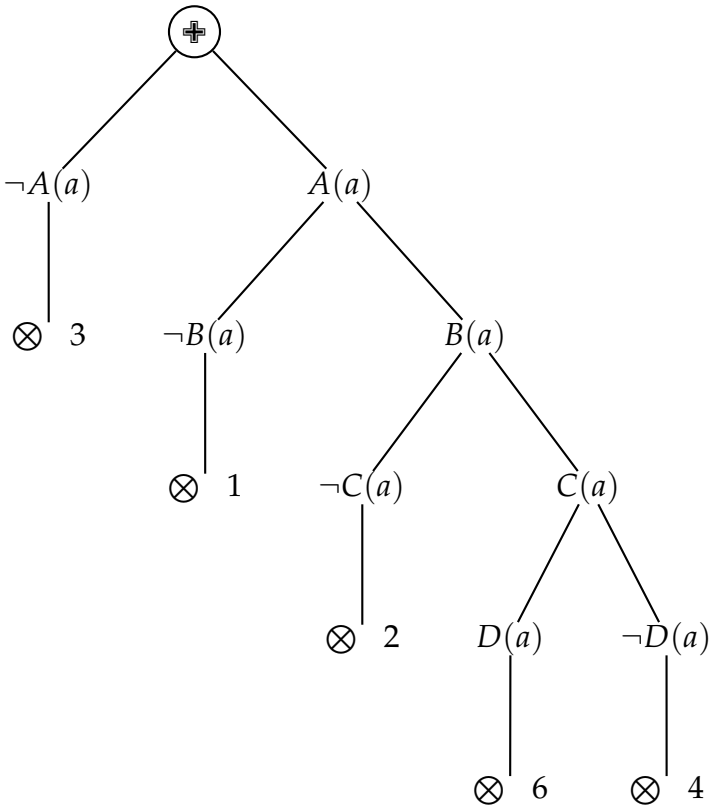
Después los árboles semánticos
1. $H_\varphi = \{c, f(c,c), f(f(c), f(c)), f(c_1, f(c,c)), f(f(c,c), c), \ldots\}$.



por lo que φ no es satisfacible.
2. $H_\psi = \{c\}$



así que ψ no es satisfacible.
3. $H_\theta = \{a, f(a), ff(a), fff(a), \ldots\}$

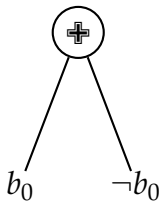


Tampoco en esta ocasión nuestra fórmula, θ, es satisfacible.

> «Imagen, sustituto». Decíase esto de un enviado real, o del hijo del rey cuando moría su padre, pues se había ido dejando como imagen suya a su hijo, que pasaba a sustituirlo.

Teorema 1.6.5 (Herbrand). *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ una $\mathcal{L}$-fórmula y S la forma clausal de φ. Si φ no es satisfacible, S es refutable mediante un árbol semántico.*

Demostración. Formamos el universo de Herbrand $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ y el conjunto de instancias básicas $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ de S. Comenzamos la construcción del árbol



y continuamos su formación usando las instancias básicas según se describió. Supongamos que S no es refutable por un árbol semántico. Por consiguiente, siempre existe un nodo en alguna rama que se puede continuar, es decir, añadir dos descendientes b_l y $\neg b_l$. Puesto que el árbol es entonces infinito, por el teorema de König debe tener una rama r infinita. Para cada instancia básica b_m, r contiene a b_m o a $\neg b_m$. Recuerde que una interpretación de Herbrand está totalmente determinada una vez que especificamos la interpretación de los símbolos de predicado en φ. Supongamos que tenemos la rama infinita r y que ésta nos sirve para construir una interpretación de Herbrand $\mathfrak{H}$ que satisface a S. Nuestra hipótesis es que S no es satisfacible. Esta contradicción muestra que no puede existir tal rama infinita r. Resta construir la interpretación $\mathfrak{H}$ suponiendo que contamos con una rama infinita r. Si R es un símbolo de n-predicado en φ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos básicos en H, definimos

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathfrak{H}} \quad \text{si y sólo si} \quad R^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n) \in r.$$

Es claro que esta interpretación es un modelo de S, con lo que alcanzamos la contradicción anunciada. □

De hecho, el teorema de Herbrand proporciona un algoritmo para determinar la satisfacibilidad de un enunciado o un conjunto de cláusulas usando métodos de lógica proposicional, por ejemplo resolución. Si S no es satisfacible, existe un conjunto finito de instancias básicas de las cláusulas de S que no es satisfacible (por compacidad). Este conjunto finito consiste en proposiciones y podemos usar resolución proposicional. Así, para todo conjunto de cláusulas S, comenzamos con las instancias básicas de las cláusulas. Conforme avanza este proceso, nos cercioramos mediante resolución si cada subconjunto finito de instancias básicas es satisfacible. Cuando S no es satisfacible, algún subconjunto finito de instancias básicas de sus cláusulas tampoco lo es. Si S es satisfacible, el proceso continúa en forma indefinida.

Ejemplo 1.6.6. Analicemos la fórmula

$$\varphi(x) \equiv \forall x \forall z((\neg P(x) \vee Q(f(x), x)) \wedge P(g(b)) \wedge \neg Q(x, z)).$$

La forma clausal de φ es

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}.$$

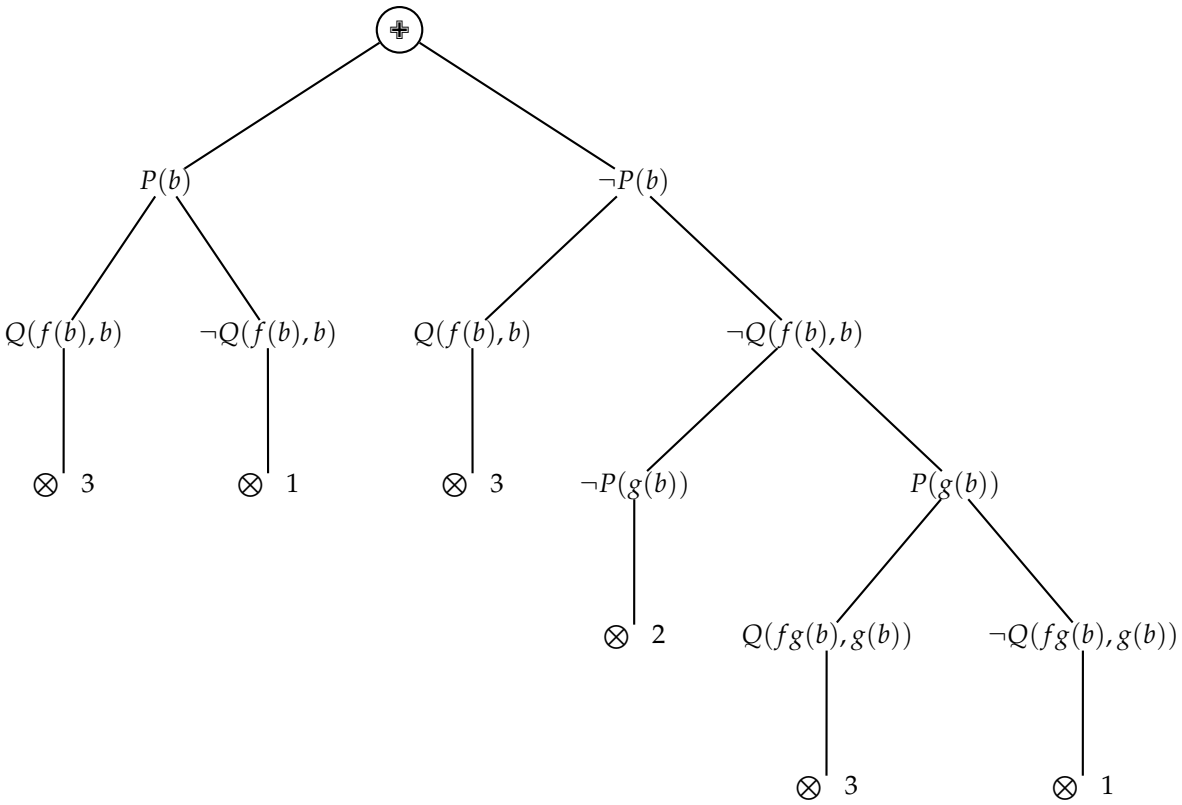
El universo de Herbrand para S es

$$H = \{b, g(b), f(b), g(g(b)), g(f(b)), \ldots\}.$$

Las instancias básicas de los átomos de φ son

$$\{P(b), Q(f(b), b), P(g(b), Q(f(g(b)), g(b)), P(f(b)), \ldots\}.$$

Construimos el árbol semántico



Por lo tanto, S no es satisfacible y nos proporciona un subconjunto de instancias básicas de cláusulas de S que no es satisfacible. Estas instancias básicas son precisamente aquellas que se usan para decidir que una rama es contradictoria. Por ejemplo,

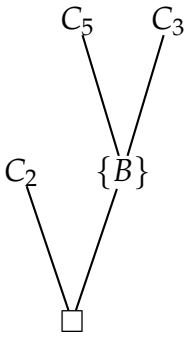
$$\{\{\neg Q(f(b), b)\}, \{\neg Q(fg(b), g(b))\}, \{P(g(b))\}$$
$$\{\neg P(b), Q(f(b), b)\}, \{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}\}.$$

Las dos primeras vienen de la cláusula 3 de S, la tercera de la cláusula 2 y las dos últimas de la cláusula 1. Sean

$$A = Q(f(b), b) \qquad B = Q(fg(b), g(b))$$
$$C = P(g(b)) \qquad D = P(b).$$

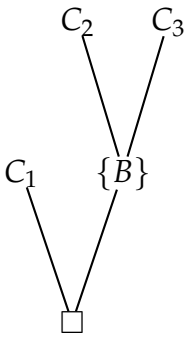
Sea

$$S' = \{\underbrace{\{\overline{A}\}}_{1}, \underbrace{\{\overline{B}\}}_{2}, \underbrace{\{C\}}_{3}, \underbrace{\{\overline{D}, A\}}_{4}, \underbrace{\{\overline{C}, B\}}_{5}\}.$$



Note que este algoritmo no proporciona el conjunto no satisfacible más pequeño posible: en nuestro ejemplo,

$$S_1 = \{\underbrace{\{\overline{B}\}}_{1}, \underbrace{\{C\}}_{2}, \underbrace{\{\overline{C}, B\}}_{3}\}.$$



Hemos visto varios métodos de prueba: tablas semánticas, el método de Herbrand, árboles semánticos y resolución. Todos ellos tienen ventajas y desventajas. No podemos decir que alguno de ellos sea mejor que el resto; depende de la situación o de lo que se quiera demostrar.

En la época azteca, se llamaba a Tláloc, «el que hace germinar», o Tlalocantecuhtli, el «Señor de Tlalocan», el principal dios de la lluvia. Según los mexicanos, Tláloc se reflejaba, se dividía, por así decirlo, en una multitud de pequeños dioses que moraban, todos, en las cumbres de las montañas,

los Tlaloque. La potencia terrible de Tláloc, amo de la germinación, le da las características de un mago, de un hechicero. Se dice que vierte agua, a su voluntad, de cuatro jarras inagotables, que contienen otras tantas especies diferentes de lluvia, bienhechoras las unas, nefastas las otras. Provisto de su «sonajero de niebla», ayochicahuaztli, llama a las pesadas nubes de la estación de lluvias, que se apilan alrededor de las cumbres. La gran pirámide de Tenochtitlán sostenía dos santuarios: el de Huitzilopochtli, el dios nacional, y el de Tláloc. Asimismo, en la cumbre de la jerarquía sacerdotal se encontraban dos sumos sacerdotes, el de Huitzilopochtli y el de Tláloc.

La compañera de Tláloc era la diosa del agua, Chalchiuhtlicue. «La que lleva una falda de piedras preciosas».

1.7 Correctud y completud de tablas semánticas en lógica de primer orden

En esta sección continuamos el estudio de las tablas semánticas que se inició en la sección 1.1. Es importante observar que una tabla semántica puede no terminar a menos que lleguemos a una contradicción. En el caso de la lógica de primer orden, se vuelve más delicado establecer las nociones de nodo reducido y tabla terminada. Suponga que encontramos un nodo de la forma $\exists x\varphi(x) \quad V$ (o $\forall x\varphi(x) \quad F$), lo cual significa simplemente que φ es verdadera (o falsa) para algún elemento del universo. Para representar esto, introducimos una nueva constante c y el nuevo nodo $\varphi(c) \quad V$ (o $\varphi(c) \quad F$). Aquí exigimos que c sea un nuevo símbolo de constante, ya que $\exists x\varphi(x) \quad V$ (o $\forall x\varphi(x) \quad F$) afirman que algún elemento del universo hace cierta (falsa) a φ pero nada indica alguna característica adicional de este elemento. No hay motivo para suponer que este elemento sea alguno de los que ya han sido usados. En cambio, si el nodo $\forall x\varphi(x) \quad V$ (o $\exists x\varphi(x) \quad F$) aparece la situación es exactamente al revés. Cualquier elemento del universo debe satisfacer (hacer falsa) a φ. Por consiguiente, podemos utilizar cualquier símbolo de constante, incluso los ya considerados. Sin embargo, si tenemos $\forall x\varphi(x) \quad V$ (o $\exists x\varphi(x) \quad F$) aunque hayamos introducido $\varphi(c_1) \quad V$, $\varphi(c_2) \quad V, \ldots, \varphi(c_n) \quad V$ (o $\varphi(c_1) \quad F, \ldots, \varphi(c_n) \quad F$) en nuestra tabla, no por ello hemos representado toda la información original, ni podemos decir que hayamos terminado con $\forall x\varphi(x) \quad V$ (o $\exists x\varphi(x) \quad F$).

Es conveniente considerar estas ideas para la definición siguiente. Como en el caso proposicional, con frecuencia requerimos una demostración por tablas de una fórmula φ a partir de premisas Σ. Por ello, describimos el procedimiento cuando tenemos premisas y cuando no las tenemos. Sean $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$ un lenguaje numerable, $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ un conjunto numerable de nuevos símbolos de constante y $\boldsymbol{\mathcal{L}}(C) = \{\mathcal{C} \cup C, \mathcal{F}, \mathcal{R}\}$ una expansión de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Podemos enumerar los términos básicos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}(C)$ como $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$.

Definición 1.7.1. Sean $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ una tabla (a partir de Σ), P una trayectoria en T, N un nodo en P y w la i-ésima aparición de N en P (es decir, el i-ésimo nodo en P con etiqueta N).

(i) Decimos que w está reducido en P si

1. N no es de la forma $\forall x\varphi(x) \quad V$ ni $\exists x\varphi(x) \quad F$ y para algún j, T_{j+1} se obtiene de T_j aplicando la regla ② de la definición 1.1.1 a N y a una trayectoria en T_j que sea un

segmento inicial de P. En este caso decimos que N aparece en P como la raíz de una tabla atómica;

o

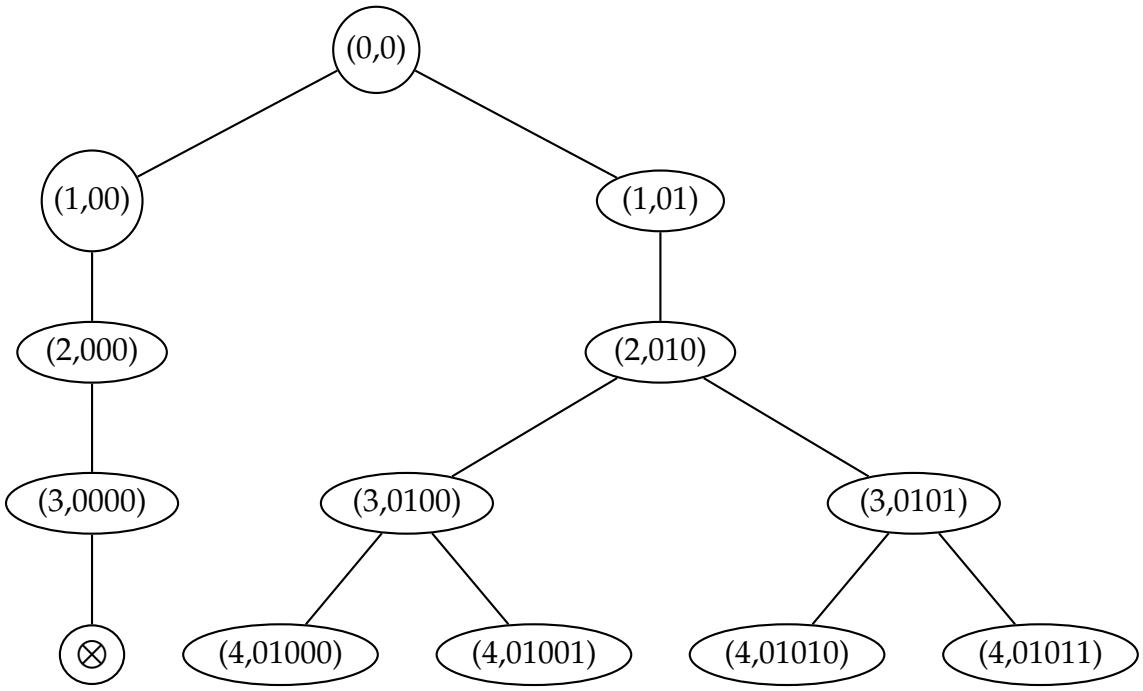
2. N es de la forma $\forall x\varphi(x)\ \ V$ o $\exists x\varphi(x)\ \ F$, y $\varphi(t_i)\ \ V$ o $\varphi(t_i)\ \ F$, respectivamente, es un nodo en P y existe una $(i+1)$-ésima aparición de N en P.

(ii) T está terminada si cada nodo en T está reducido en cada trayectoria no contradictoria que lo contenga (y $\varphi\ \ V$ aparece en cada trayectoria no contradictoria de T para cada $\varphi \in \Sigma$). En otro caso, T no está terminada.

Con esta definición, obligamos a que cada nodo $\forall x\varphi(x)\ \ V$ dé lugar a un caso particular $\varphi(t_i)\ \ V$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y algo similar para $\exists x\varphi(x)\ \ F$. La definición también nos permite describir cómo construir una tabla terminada (a partir de Σ) con cualquier raíz: construimos una tabla sistemática completa (TSC) (a partir de Σ). Para que todo funcione bien, debemos introducir un orden entre los nodos del árbol que nos permita reducir cada nodo en una trayectoria no contradictoria y obtener una tabla terminada.

Definición 1.7.2. Suponga que T es un árbol binario numerable. Sean n_1, n_2 nodos de T. Decimos que $n_1 \rhd n_2$ si n_1 está en un nivel inferior a n_2 o si ambos están en el mismo nivel pero n_1 está a la izquierda de n_2.

Hemos supuesto que la construcción del árbol da lugar a un orden entre los distintos niveles y entre los nodos de un nivel, de acuerdo a la siguiente figura



Definición 1.7.3. Construimos la tabla semántica completa con raíz $\varphi \;\; K$ ($K \in \{V, F\}$) por recursión.

❶ Comenzamos por la tabla atómica T_0 correspondiente a $\varphi \;\; K$. En los casos 7a y 8b usamos t_1 y en los casos 7b y 8a usamos t_i para i el menor posible.

En la etapa n contamos con la tabla T_n y la extendemos a T_{n+1}. Si toda aparición de cada nodo de T está reducida, terminamos la construcción. De lo contrario, sea w el $\rhd$-menor nodo de T_n que tiene una ocurrencia de un nodo N sin reducir en una trayectoria no contradictoria P de T_m. Para continuar atendemos alguno de los siguientes casos.

❷ Si N no es de la forma $\forall x\varphi(x) \;\; V$ ni $\exists x\varphi(x) \;\; F$, añadimos una tabla atómica con raíz N al extremo de todas las trayectorias no contradictorias en T que contengan a w. Si N tiene la forma $\exists x\varphi(x) \;\; V$ o $\forall x\varphi(x) \;\; F$ usamos t_j con j el menor índice que no se haya utilizado en la tabla.

❸ Si N es de la forma $\forall x\varphi(x) \;\; V$ o $\exists x\varphi(x) \;\; F$ y w es la i-ésima aparición de N en P, añadimos

$$\begin{array}{l} N \\ | \\ \varphi(c_i) \;\; V \end{array}$$

o

$$\begin{array}{l} N \\ | \\ \varphi(c_i) \;\; F \end{array}$$

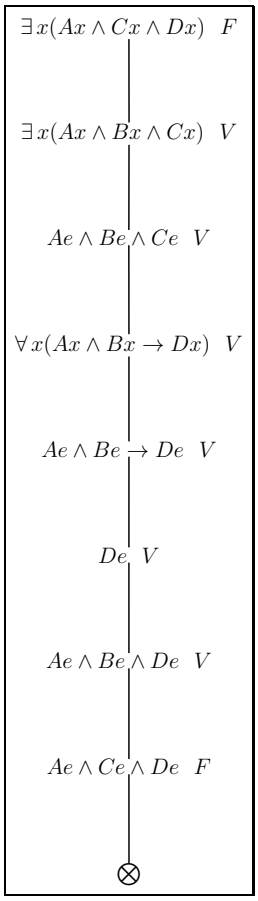
respectivamente, en el extremos de cada trayectoria no contradictoria en T que contenga a w.

La TSC a partir de un conjunto de premisas Σ se define como recién se describió con un cambio significativo: debemos introducir cada elemento de Σ. En las etapas pares ($n = 2k$) procedemos como en ❶, ❷ y ❸. En las impares ($n = 2k + 1$) añadimos $\psi_k \;\; V$ a cada trayectoria no contradictoria en T_n para obtener T_{n+1}, donde ψ_k es el k-ésimo elemento de Σ.

La construcción de la TSC no habrá terminado a menos que todos los elementos de Σ se hayan introducido en cada trayectoria no contradictoria en la forma descrita y que toda aparición de cada nodo esté reducida en cada trayectoria no contradictoria que lo contenga.

Ejemplo 1.7.4. A continuación un ejemplo de una TSC; esta tabla se refiere a la prueba por tablas de

$$\{\forall x(Ax \wedge Bx \to Dx), \exists x(Ax \wedge Bx \wedge Cx)\} \vdash \exists x(Ax \wedge Cx \wedge Dx).$$



Proposición 1.7.5. *Si T es una TSC, entonces está terminada.*

Demostración. Tenemos una tabla T semántica completa. Sea w una aparición no reducida de un nodo N en $T_k \subseteq T$ en una trayectoria no contradictoria P de T. (Cuando no podamos encontrar tal w, significa que T está terminada). Supongamos que hay n nodos $\rhd$-menores que w en T. De la definición de TSC se desprende que debemos reducir w en P al formar T_{k+n+1}, así que toda ocurrencia de cada nodo en una trayectoria no contradictoria en T está reducida.

Ahora supongamos que la TSC T se obtiene a partir de premisas Σ. Procedemos de la misma forma. Por definición cada ψ_k aparece en la etapa $2k+1$, por lo que T está terminada. ❐

Todo está listo para probar los teoremas de correctud y completud. En lo sucesivo, $\mathcal{L}$ es un lenguaje y Σ un conjunto a lo más numerable de $\mathcal{L}$-enunciados. En caso de no contar con premisas suponemos $\Sigma = \varnothing$.

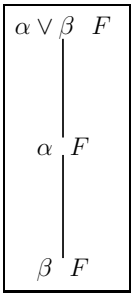
Lema 1.7.6. *Si $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ es una tabla con premisas Σ y raíz $\mu \quad F$, entonces cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ modelo de $\Sigma \cup \{\neg\mu\}$ se puede transformar en un modelo que sea modelo de cada nodo en alguna trayectoria P en T.*

Demostración. Primero debemos interpretar los nuevos símbolos de constante de $\mathcal{L}(C)$ en $\mathfrak{A}$ que aparecen en P.

Definimos P y $c_i^{\mathfrak{A}}$ por recursión en la sucesión T_n. En cada etapa n tenemos una trayectoria P_n en T_n y una expansión $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{A}$ (con el mismo universo) que interpreta las c_i en P_n y es modelo de cada nodo de P_n. Es claro que esto basta para probar el lema. T_{n+1} se obtuvo al añadir, al extremo de P_n, una tabla atómica con raíz N, un nodo de P_n o un elemento $\psi_k \in \Sigma$. En el último caso extendemos P_n en la única forma posible añadiendo ψ_k. No necesitamos expander $\mathfrak{A}_n$ pues es modelo de ψ_k (por lo tanto, de cada nodo de P_{k+1}) por hipótesis.

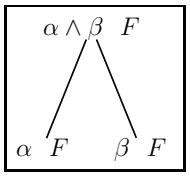
Consideremos el caso en el que se añade una tabla atómica T' con raíz N. Por hipótesis de inducción, podemos suponer que $\mathfrak{A}_n$ es modelo de N. Queremos extender $\mathfrak{A}_n$ a $\mathfrak{A}_{n+1}$ y encontrar una trayectoria P_{n+1} que extienda P_n en T_{n+1} y que $\mathfrak{A}_{n+1}$ sea modelo de cada uno de sus nodos. El caso base de nuestra recursión es la tabla atómica T_0 cuya raíz $\mu \quad F$ tiene como modelo $\mathfrak{A}$ por hipótesis. El análisis del caso base es exactamente como en la etapa recursiva: se desea extender $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}_0$ y encontrar una trayectoria P_0 en T_0 tal que $\mathfrak{A}_0$ sea modelo de cada nodo. Debemos tomar en cuenta cada tipo de tabla atómica.

✯ Si



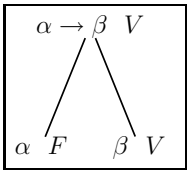
no tenemos que expandir $\mathfrak{A}_n$. Sabemos que $\mathfrak{A}_n \not\models \mu \vee \nu$, así que $\mathfrak{A}_n \not\models \mu$ y $\mathfrak{A}_n \not\models \nu$. Extendemos P_n con esta trayectoria (de hecho, no hay otra).

✯ Si



tampoco expandimos $\mathfrak{A}_n$; por hipótesis, $\mathfrak{A}_n \not\models \mu \wedge \nu$ así que $\mathfrak{A}_n \not\models \mu$ o $\mathfrak{A}_n \not\models \nu$. Extendemos P_n en forma correspondiente de acuerdo con lo que se cumpla en $\mathfrak{A}_n$: $\mathfrak{A}_n \not\models \mu$ o $\mathfrak{A} \not\models \nu$. Si se cumplen ambas, pues escogemos la de la izquierda.

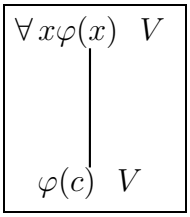
✯ Si



sabemos que $\mathfrak{A} \models \mu \to \nu$, así que $\mathfrak{A} \not\models \mu$ o $\mathfrak{A} \models \nu$. Otra vez dejamos quieta a $\mathfrak{A}_n$ y extendemos P_n según lo que se cumpla en $\mathfrak{A}_n$.

El resto de los conectivos se trata en forma similar.

✯ Si añadimos



o

$$\begin{array}{|l|l|}\hline \exists x\varphi(x) & F \\ \vdots & \\ \varphi(c) & F \\ \hline \end{array}$$

Sabemos que $\mathfrak{A}_n \models \forall x\varphi(x)$ o $\mathfrak{A}_n \not\models \exists x\varphi(x)$, así que $\mathfrak{A}_n \models \varphi(c)$ o $\mathfrak{A}_n \not\models \varphi(c)$. Aún no hemos interpretado c, pero de acuerdo con esto, cualquiera que sea su interpretación, funciona.

✯ Si añadimos

$$\begin{array}{|l|l|}\hline \exists x\varphi(x) & V \\ \vdots & \\ \varphi(c) & V \\ \hline \end{array}$$

o

$$\begin{array}{|l|l|}\hline \forall x\varphi(x) & F \\ \vdots & \\ \varphi(c) & F \\ \hline \end{array}$$

El símbolo c es necesariamente un nuevo símbolo de constante (así que no aparece en Σ o en algún nodo de P_n); tenemos que definir $c^{\mathfrak{A}}$. Por hipótesis de inducción inferimos que $\mathfrak{A}_n \models \exists x\varphi(x)$ (o $\mathfrak{A}_n \models \neg\forall x\varphi(x)$), así que interpretamos c como aquel elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{A}_n \models \varphi(a)$ (o $\mathfrak{A}_n \not\models \varphi(a)$) ($A = A_n$ por construcción).

Con esto hemos analizado todos los casos posibles y terminamos la prueba. ❐

Teorema 1.7.7 (Correctud). *Si existe una prueba por tablas T de μ a partir de Σ, entonces $\Sigma \models \mu$.*

Demostración. Suponga que $\Sigma \models \mu$ no es cierto. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{A} \models \neg\mu$. De acuerdo con el lema 1.7.6, existe una trayectoria P en T y una expansión $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ que modela cada nodo de P. Puesto que P es contradictoria, por hipótesis llegamos a una contradicción. ∎

Toca el turno al teorema de completud. Aquí utilizamos la idea de Herbrand: construir un modelo cuyo universo sean objetos sintácticos; de hecho, los objetos que aparecen en una cierta trayectoria de una TSC. Primero construimos una interpretación de Herbrand $\mathfrak{A}$ para una trayectoria P no contradictoria en una TSC con premisas Σ y raíz μ F. Sea $A = H$ el universo de Herbrand de $\mathcal{L}(C)$. La interpretación de los símbolos de constante y función en $\mathfrak{A}$ es la interpretación correspondiente de Herbrand.

Resta, como en cualquier modelo de Herbrand, interpretar los símbolos de relación $R \in \mathcal{R}$:

$$R^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \quad \Leftrightarrow \quad R(t_1, \ldots, t_n) \ \ V \text{ aparece en } P. \tag{†}$$

Ya tenemos definida $\mathfrak{A}$ como $\mathcal{L}(C)$-estructura.

Lema 1.7.8. *(i) Si ν F aparece en P, entonces ν es falsa en $\mathfrak{A}$.*
(ii) Si ν V aparece en P, entonces ν es verdadera en $\mathfrak{A}$.

Demostración. Por definición de TSC, cada ocurrencia de un nodo de P está reducida en P. Procedemos por inducción en la construcción de ν.

- ✣ Si ν es atómica, ν es de la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$. Si ν V aparece en P, entonces $(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathfrak{A}}$. Si ν F aparece en P, dado que P no es contradictoria, ν V no aparece en P, por lo que $(t_1, \ldots, t_n) \notin R^{\mathfrak{A}}$ por definición.

- ✣ Supongamos que $\nu \equiv \nu_1 \vee \nu_2$. Ya que T está terminada, sabemos que si el nodo ν V aparece en P, ν_1 V o ν_2 V aparece en P. Por hipótesis de inducción, si ν_1 V aparece en P, $\mathfrak{A} \models \nu_1$ (algo similar para ν_2). Así que alguna de las dos es cierta en $\mathfrak{A}$, por lo que $\mathfrak{A} \models \nu_1 \vee \nu_2$.

  Si $\nu_1 \vee \nu_2$ F ocurre en P, podemos asegurar que ν_1 F y ν_2 F ocurren en P. De la hipótesis de inducción se sigue que $\mathfrak{A} \not\models \nu_1$ y $\mathfrak{A} \not\models \nu_2$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \not\models \nu_1 \vee \nu_2$.

- ✣ Si $\nu \equiv \neg\mu$ y lo que tenemos en P es ν V, es decir, $\neg\mu$ V, se sigue que μ F pertenece a P y por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \not\models \mu$, así que $\mathfrak{A} \models \neg\mu$, esto es, $\mathfrak{A} \models \nu$.

  Si ν F es lo que P ostenta, μ V es un elemento de P y por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \models \mu$, de donde se sigue que $\mathfrak{A} \not\models \neg\mu$, así $\mathfrak{A} \not\models \nu$.

- ✣ Si $\nu \equiv \forall v\varphi(v)$ y w es la i-ésima ocurrencia de $\forall v\varphi(v)$ V en P, se sigue que $\varphi(t_i)$ V aparece en P. Por consiguiente, $\varphi(t)$ V aparece en P para todo $\mathcal{L}(C)$-término básico t. Como estos términos constituyen el universo A, $\mathfrak{A} \models \forall v\varphi(v)$.

Concedamos que P contiene $\forall v\varphi(v)\ \ F$, como T está terminada $\varphi(t)\ \ F$ aparece en P para algún $\mathcal{L}(C)$-término t. Por hipótesis de inducción, $\varphi(t)$ es falsa en $\mathfrak{A}$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \not\models \forall v\varphi(v)$.

□

Lema 1.7.9. *Suponga que P es una trayectoria no contradictoria en una TSC T con premisas Σ y raíz $\mu\ \ F$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ en la que μ es falsa y $\mathfrak{A} \models \Sigma$.*

Demostración. Construimos $\mathfrak{A}$ con universo e interpretaciones de Herbrand, como recién se describió. Los símbolos de relación $R \in \mathcal{R}$ se interpretan según (✝). De acuerdo con el lema 1.7.8, como $\mu\ \ F$ es la raíz de T, $\mu\ \ F$ aparece en P, por lo que $\mathfrak{A} \not\models \mu$. Puesto que cada $\psi_k \in \Sigma$ aparece como verdadera en P, deducimos que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. □

Teorema 1.7.10 (Completud)**.** *Si $\Sigma \models \mu$, existe una demostración por tablas de μ con premisas Σ.*

Demostración. Supongamos que no hay tal demostración por tablas. Entonces tenemos un TSC T cuya raíz es $\mu\ \ F$ y hay una trayectoria no contradictoria P. De acuerdo con el lema 1.7.9, podemos construir una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ modelo de Σ y $\mathfrak{A} \not\models \mu$. Puesto que por hipótesis tenemos $\Sigma \models \mu$, la contradicción muestra que efectivamente hay una demostración por tablas de μ con premisas Σ. □

Corolario 1.7.11. *Para todo enunciado μ y cualquier conjunto de enunciados Σ:*

1. *La TSC con premisas Σ y raíz $\mu\ \ F$ es una prueba por tablas de μ con premisas Σ;*

o

2. *Existe una trayectoria no contradictoria en la TSC que da lugar a una interpretación de Herbrand $\mathfrak{H}$ que es modelo de Σ y $\mathfrak{H} \not\models \mu$.* □

Teorema 1.7.12 (Löwenheim-Skolem)**.** *Si un conjunto numerable de enunciados Σ es satisfacible (tiene un modelo), entonces tiene un modelo numerable.*

Demostración. Considere la TSC de Σ con una contradicción $\mu \wedge \neg\mu$ como raíz. Según el lema 1.7.7, no puede haber una demostración por tablas de $\mu \wedge \neg\mu$ a partir de Σ pues en tal caso $\Sigma \models \mu \wedge \neg\mu$ y sabemos que Σ tiene un modelo. Por lo tanto, debe existir una trayectoria no contradictoria P en la tabla. Puesto que sólo hay una cantidad numerable de $\mathcal{L}(C)$-términos básicos, la estructura de Herbrand es numerable y es el modelo que buscamos. □

Teorema 1.7.13. *Sea Σ un conjunto numerable de enunciados. Entonces Σ es inconsistente si y sólo si Σ no es satisfacible.*

Demostración. Supongamos que Σ es inconsistente. Podemos derivar una contradicción $\varphi \wedge \neg\varphi$, es decir, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Por el teorema de completud, $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$ así que Σ no puede tener un modelo, de aquí que sea no satisfacible.

Asuma que Σ no es satisfacible. Podemos entonces afirmar que

$$\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$$

para cualquier enunciado φ. Se sigue que $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, mostrando que Σ es inconsistente. □

Lema 1.7.14. *Si toda trayectoria en una TSC es contradictoria, entonces se trata de una tabla finita.*

Demostración. Por construcción de una TSC, nunca se prolonga una trayectoria contradictoria, por lo que toda trayectoria contradictoria es finita. Del teorema de König se concluye que la tabla debe ser finita. □

Teorema 1.7.15 (Compacidad)**.** *Sea Σ un conjunto de enunciados. Entonces Σ es satisfacible si y sólo si cada subconjunto $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito es satisfacible (es decir, Σ es finito satisfacible).*

Demostración. Es trivial que si Σ es satisfacible, cada subconjunto suyo (finito o no) es satisfacible.

Suponga que Σ es finito satisfacible. Construimos la TSC T con premisas Σ y raíz $\mu \wedge \neg\mu \quad F$. Si T es contradictoria, es finita.

Si la tabla es infinita, tenemos una trayectoria no contradictoria, así que por el corolario 1.7.11, existe una $\mathcal{L}$-estructura en la que cada $\psi_i \in \Sigma$ es verdadera.

Si T es contradictoria, entonces es finita y $\mu \wedge \neg\mu$ es una consecuencia lógica de un subconjunto $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito donde Σ_0 se conforma de los elementos de Σ que aparecen en T. Entonces Σ_0 no puede tener modelo pues $\Sigma_0 \models \mu \wedge \neg\mu$, así que Σ no es finito satisfacible. □

Después de la muerte, los hombres quedan sometidos a destinos diferentes, según lo que hayan hecho durante su vida y, sobre todo, según la manera en que hayan muerto. El otro mundo no es común a todos; tampoco hay moradas distintas para los «buenos» y los «malos». La vida que se da a cada quien después de la muerte depende, ante todo, de la elección de los dioses, que han destinado a cada hombre un género específico de muerte; la suerte más envidiable está reservada a quienes han perecido cumpliendo con los deberes que se les habían encargado al nacer.

Los niños que nacían muertos se dirigían al cielo decimotercero, de donde procedían; existe en este cielo un «árbol de leche»que les da un alimento eterno durante su infancia. Los guerreros que han muerto en el campo de batalla o sobre la piedra de los sacrificios se vuelven «acompañantes del águila», o sea del sol. Forman un cortejo alrededor del dios resplandeciente, del Este al cenit, a lo largo del prolongado camino que él sigue en el cielo, en medio de hermosos árboles. Al cabo de cuatro años, son transformados en colibríes, y vuelven a la tierra para vivir allí entre las flores de las regiones cálidas.

El destino de las mujeres muertas de parto es análogo al de los guerreros. Un destino excepcional se reserva a los humanos, hombres y mujeres, que han cumplido totalmente con sus servicios hacia los dioses, que han muerto por el sol y la tierra (no, por cierto, porque así lo hayan querido, sino porque desde su nacimiento todo estaba orientado a ello).

1.8 Resolución SLD

El método de resolución, tal como se presentó en la sección 1.5, difícilmente suscitará grandes expectativas en cuanto a su implementación, a menos que se pueda utilizar una computadora como auxiliar. Apelar a árboles semánticos para facilitar la resolución tampoco es motivo de serias reflexiones en cuanto a su viabilidad.

Resolución tiene gran importancia porque es adecuada para implementarse en una computadora. Sin embargo, para que esto sea factible es necesario restringir la forma de resolver, pues como lo hemos venido haciendo se requiere elegir dos cláusulas de entre una cantidad finita, susceptibles de resolverse una con otra. Esta elección es poco atractiva si se requiere desarrollar un programa de cómputo que realice en forma automática la resolución.

La solución a este dilema es «adecuar» el método de resolución, de tal suerte que se elimine la forma imprevisible de continuar. Esto se puede lograr, como a continuación veremos, pero se puede perder la completud del método, al menos en su formulación general, no así en ciertos casos particulares.

Recuerde que una fórmula φ no es satisfacible si y sólo si $\square \in Res^*(\varphi)$. Llevar esto a la práctica requiere efectuar varias resoluciones entre las cláusulas de φ hasta encontrar $\square$.

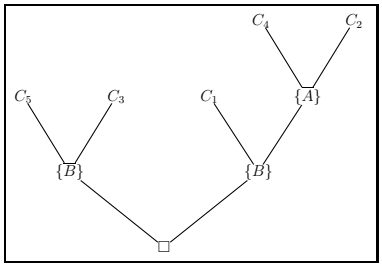
Primero probaremos que no requerimos efectuar resoluciones arbitrarias, sino sólo con cierto tipo de cláusulas.

Definición 1.8.1. N-resolución se efectúa entre dos cláusulas C_1, C_2, donde una de ellas debe contener sólo literales negativas.

De cualquier sapo hace mole. Dícese de aquel a quien no se encomiendan cosas difíciles y a él le parecen difíciles en extremo.

Ejemplo 1.8.2. Sea $\varphi = \{\underset{1}{\{A, B\}}, \underset{2}{\{\overline{A}, C\}}, \underset{3}{\{\overline{B}, D\}}, \underset{4}{\{\overline{C}\}}, \underset{5}{\{\overline{D}\}}\}$.

Usaremos N-resolución para verificar que φ no es satisfacible.



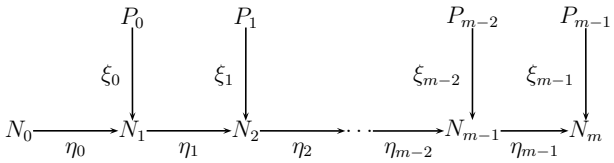
Revise que sólo se haya utilizado N-resolución.

A continuación desarrollaremos resolución con cláusulas de Horn. Posteriormente introduciremos otros tipos de resolución susceptibles de implementarse en forma eficiente. Trataremos con resolución en lógica de primer orden.

Definición 1.8.3. Sea Δ un conjunto de cláusulas de Horn.

- Una sucesión $N_0, N_1, \ldots, N_m$ es una H-resolución a partir de Δ si existen $P_0, \ldots, P_{m-1} \in \Delta^+$ tales que
  1. $N_0, \ldots, N_m$ son cláusulas de Horn negativas.
  2. $N_0 \in \Delta^-$.
  3. N_{i+1} es una U-resolvente de N_i y P_i para $i < m$.
- Una cláusula de Horn negativa N es H-derivable a partir de Δ si existe una H-resolución $N_0, \ldots, N_m$ a partir de Δ con $N = N_m$.

Si una H-resolución vía $P_0, \ldots, P_{m-1}$ usa cambios de nombre ξ_i y sustituciones η_i para lograr la U-resolvente N_{i+1}, representamos este proceso como



Tenemos la siguiente relación entre H-derivación y U-derivación:

Lema 1.8.4. *Sea Δ un conjunto de cláusulas de Horn y N una cláusula básica negativa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

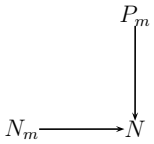
(i) N es H-derivable a partir de $E(\Delta)$.

(ii) N es una instancia básica de una cláusula que se puede U-derivar de Δ.

En particular, $\square$ es H-derivable a partir de $E(\Delta)$ si y sólo si $\square$ es U-derivable a partir de Δ.

Demostración. (i)⇒(ii). Procedemos por inducción en la longitud m de la H-resolución de N a partir de $E(\Delta)$.

Si $m = 0$, $N \in E(\Delta^-)$, lo que significa que N es una instancia básica de una cláusula en Δ^-, es decir, una instancia básica de una cláusula que es U-derivable a partir de Δ. En la etapa inductiva, sea $N_0, \ldots, N_m, N$ una H-resolución en $E(\Delta)$ que termina con



donde P_m es una instancia básica de alguna cláusula $C \in \Delta^+$. Por hipótesis de inducción, existe una cláusula negativa N' que es U-derivable a partir de Δ, de tal suerte que N_m es una instancia básica de N'. En particular, N es una H-resolvente de una instancia básica de N' y una instancia básica de C. Por consiguiente, por el teorema 1.5.3(a), N es una instancia básica de una U-resolvente, digamos N'', de N' y C. Puesto que N'' es U-derivable a partir de Δ, obtenemos (ii).

La otra dirección se prueba en forma similar usando 1.5.3(b). ∎

En el ámbito de la programación lógica, es relevante responder a preguntas de la forma

$$¿\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_n)?$$

donde Φ es un conjunto de enunciados universales de Horn positivos. El siguiente teorema muestra que en el caso en que $\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$, el método de H-resolución proporciona «todas» las soluciones $\vec{t} \in Term_0(\mathcal{L})$.

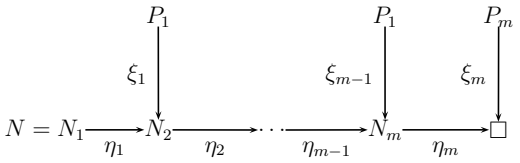
Teorema 1.8.5 (Programación lógica). *Sean Φ un conjunto de enunciados universales de Horn positivos y $\exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ un enunciado con $\psi_0, \ldots, \psi_k$ atómicos. Hacemos*

$$N = \{\neg\psi_0, \ldots, \neg\psi_k\}.$$

Entonces se cumple lo siguiente,

(a) $\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ si y sólo si $\square$ es H-derivable a partir de $E(\Phi) \cup \{N\}$.

(b) Si



es una H-resolución a partir de $E(\Phi) \cup \{N\}$*, entonces*

$$\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)\eta_1 \cdots \eta_m.$$

(c) *Si para* $t_1, \ldots, t_m \in Term_0(\mathcal{L})$ *se cumple*

$$\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(\vec{x}/\vec{t}),$$

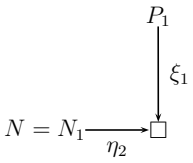
entonces existe una H-resolución de $\square$ *a partir de* $E(\Phi) \cup \{N\}$ *de la forma dada en (b) y una sustitución* ν *con*

$$t_i = x_i\eta_1 \cdots \eta_m\nu \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Si en el inciso (b) aparecen exactamente las variables $z_1, \ldots, z_s$ *en la fórmula* $(\psi_0 \wedge \cdots \psi_k)\ \eta_1 \cdots \eta_m$*, entonces* $\Phi \models \forall z_1 \cdots \forall z_s(\psi_0 \wedge \cdots \psi_k)\eta_1 \cdots \eta_m$*; por consiguiente,* $\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)\ \eta_1 \cdots \eta_m\ \nu$ *para toda sustitución* ν*. En consecuencia, (b) y (c) muestran que los términos básicos* $\vec{t}$ *tales que* $\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(\vec{x}/\vec{t})$ *son exactamente las instancias de «soluciones»* $x_1\eta_1 \cdots \eta_m$*, ...,* $x_n\ \eta_1 \cdots \eta_m$ *dadas por la H-resolución.*

Demostración. (a) Se obtiene del teorema 1.5.6, pues $\Phi \models \exists \vec{x}(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ si y sólo si $\Phi \cup \{\forall \vec{x}(\neg\psi_0 \vee \cdots \vee \neg\psi_k)\}$ no es satisfacible.

(b) Procedemos por inducción en m. Para $m = 1$ tenemos



por lo que $\overline{N}\eta_1 = P_1\xi_1\eta_1$, así que debe existir un enunciado $\forall \vec{y}\psi \in \Phi$ con ψ sin cuantificadores tal que $P_1 = \{\psi\}$ y $\psi\xi_1\eta_1 = \psi_i\eta_1$ para $i = 0, \ldots, k$. Ya que $\Phi \models \forall \vec{y}\psi$, tenemos $\Phi \models \psi\xi_1\eta_1$, de donde se sigue que $\Phi \models \psi_i\eta_1$ para $i = 0, \ldots, k$, es decir, $\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)\eta_1$.

Para la etapa inductiva sea $m > 1$ y, digamos,

$$N_2 = \{\neg\theta_0, \ldots, \neg\theta_r\} \qquad (N_2 \neq \varnothing).$$

La hipótesis de inducción, sobre la resolución que comienza con N_2 y P_2, propicia

$$\Phi \models (\theta_0 \wedge \cdots \wedge \theta_r)\eta_2 \cdots \eta_m. \tag{$\ast$}$$

Sea $i \leq k$. Probaremos que

$$\Phi \models \psi_1\eta_1 \cdots \eta_m, \tag{$\dagger$}$$

de donde se obtiene la afirmación $\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_k)\eta_1 \cdots \eta_m$. Distinguimos dos casos: si $\neg\psi_i\eta_1 \in N_2$, ($\dagger$) se sigue de ($\ast$). Supongamos que $\neg\psi_i\eta_1 \notin N_2$. En tal caso no aparece $\neg\psi_i\eta_1$ en la resolución que conduce a N_2. Por lo tanto, debe existir un enunciado $\forall y_1 \cdots \forall y_l(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s \to \varphi)$ en Φ tal que $P_1 = \{\neg\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \varphi\}$ y

$$\varphi\xi_1\eta_1 = \psi_i\eta_1 \tag{$\ast$}$$
$$\neg\varphi_j\xi_1\eta_1 \in N_2 \quad 1 \leq j \leq s, \tag{$\ast$}$$

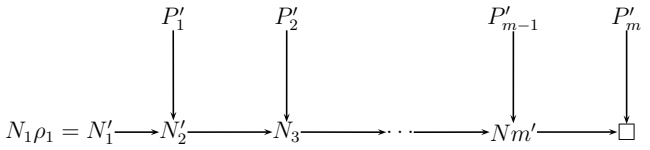
de modo que, por ($\ast$) y ($\ast$)

$$\Phi \models \varphi_j\xi_1\eta_1\eta_2 \cdots \eta_m \quad 1 \leq j \leq s. \tag{$\clubsuit$}$$

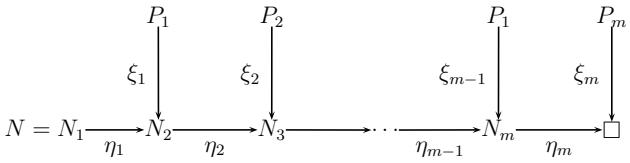
Ya que $\Phi \models \forall y_1 \cdots \forall y_l(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_2 \to \varphi)$, logramos $\Phi \models (\neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_s \vee \varphi)\xi_1\eta_1 \cdots \eta_m$, de suerte que por ($\clubsuit$) $\Phi \models \varphi\xi_1\eta_1\eta_2 \cdots \eta_m$ y con ($\ast$) concluimos que ($\dagger$).

(c) Para $\vec{t} \in Term_0(\mathcal{L})$ hacemos $\rho_1 = \vec{x}/\vec{t}$ y $N_1 = N$ $(= \{\neg\psi_0, \ldots, \neg\psi_k\})$.

Suponga que $\Phi \models (\psi_0 \wedge \cdots \psi_k)\rho_1$ y que $N' = N_1\rho_1$ es una cláusula básica. Por el teorema 1.4.1, $E(\Phi) \cup \{N_1\rho_1\}$ no es satisfacible, así que $\square$ es H-derivable a partir de $E(\Phi) \cup \{N_1\rho_1\}$, digamos de la siguiente forma:



Aquí P'_j y N'_j son cláusulas básicas y, digamos, $P'_j = P_j sub_j$ para ciertas cláusulas $P_j \in E(\Phi)$. Mostraremos que para todo conjunto finito X de variables existe una H-resolución a partir de $\Phi \cup \{N\}$ como se muestra a continuación, de tal suerte que existe una sustitución ν con $x\eta_1 \cdots \eta_m\nu = x\rho_1$ para $x \in X$.

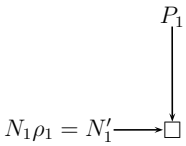


Entonces, para $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ obtenemos

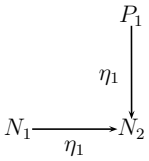
$$x_i\eta_1 \cdots \eta_m\nu = t_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

y terminamos.

Probaremos la existencia de una H-resolución por inducción en m. Para $m = 1$ tenemos la resolución



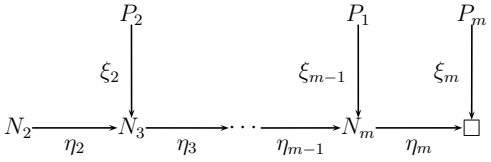
La afirmación se sigue en forma directa del corolario 1.5.4. Para la etapa inductiva, sea $m \geq 2$. Para esta etapa de la H-resolución en la figura y por 1.5.4, escogemos ξ_1, η_1, N_2 y ρ_2 tales que



y

$$x\eta_1\rho_2 = x\rho_1 \quad \text{para } x \in X, \tag{✗}$$

así como $N_2' = N_2\rho_2$. Aplicamos la hipótesis de inducción a la parte de la H-resolución que comienza con N_2' y P_2' y a $Y =$ el conjunto de variables en $\{x\eta_1 : x \in X\}$. Entonces conseguimos una U-resolución:



y una sustitución ν para la cual

$$y\eta_2 \cdots \eta_m \nu = y\rho_2 \qquad \text{para } y \in Y,$$

por lo que, por (✗) y de la definición de Y,

$$x\eta_1\eta_2 \cdots \eta_m \nu = x\eta_1\rho_2 = x\rho_1 \qquad \text{para } x \in X.$$

□

Pero también podemos decir algo sobre la N-resolución.

Teorema 1.8.6. *Sea φ un enunciado en FNS. Entonces φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar mediante N-resolución a partir de φ.*

Demostración. Si $\square$ se puede derivar mediante N-resolución, $\square \in Res^*(\varphi)$, por lo que φ no es satisfacible.

Ahora supongamos que φ no es satisfacible y quisiéramos probar que podemos derivar $\square$ a partir de las cláusulas de φ mediante N-resolución.

La idea es efectuar la demostración en lógica proposicional y trasladar el resultado a lógica de predicados auxiliados por el teorema 1.5.3.

Supongamos que $\square$ se puede deducir de φ mediante N-resolución. De acuerdo con el teorema 1.5.3, podemos «subir» esta derivación a una derivación de $\square$ a partir de φ. Por «subir» entendemos que podemos obtener la primera resolución a partir de la segunda mediante sustitución.

Note que una cláusula C contiene sólo literales negativas si y sólo si $Csub$ también (para cualquier sustitución sub). Así que una derivación por N-resolución en lógica proposicional se transforma en una derivación por N-resolución en lógica de primer orden.

Suponga entonces que φ no es satisfacible, que está en FNC y que estamos en lógica proposicional. Sabemos por tanto que $\square \in Res^*(\varphi)$ ([FeVi09]). Usando la misma prueba, mostraremos que $\square$ se puede derivar mediante N-resolución.

Sea $\varphi = \{C_1, \ldots, C_k\}$. Suponga que ninguna de las C_i es una tautología (si alguna lo fuera, podemos simplemente eliminarla sin modificar la no satisfacibilidad de φ y probar que $\square$ se puede derivar del resto de cláusulas).

Procedemos por inducción en la cantidad n de subfórmulas atómicas que aparecen en φ.

Si $n = 1$, sea A la única fórmula atómica que ocurre en φ. Tenemos tres tipos posibles de cláusulas en φ (recuerde que $\square \in Res^*(\varphi)$): las cláusulas en φ son de la forma $\{A\}, \{\neg A\}$ y $\{A, \neg A\}$. La última la excluimos porque es una tautología. Entonces φ debe ser de la forma $\{\{A\}, \{\neg A\}\}$ y es cierto que somos capaces de derivar $\square$ mediante N-resolución a partir de φ.

Ahora asuma que $A_1, \ldots, A_{n+1}$ son las subfórmulas atómicas de φ y que se puede derivar $\square$ mediante N-resolución a partir de cualquier fórmula ψ no satisfacible que se pueda construir a partir de $A_1, \ldots, A_n$.

Sea $\tilde{\varphi}_0$ la conjunción de las C_i en φ que no contienen a $\neg A_{n+1}$, mientras que $\tilde{\varphi}_1$ es la conjunción de las C_i en φ que no contienen a A_{n+1}.

A_{n+1} y $\neg A_{n+1}$ no pueden estar en una misma cláusula, pues sería un a tautología. Así que $\tilde{\varphi}_0 \cup \tilde{\varphi}_1 = \varphi$. Definimos

$$\begin{aligned}\varphi_0 =&\{C_i - \{A_{n+1}\} : C_i \in \tilde{\varphi}_0\}\\ \varphi_1 =&\{C_i - \{\neg A_{n+1}\} : C_i \in \tilde{\varphi}_1\}.\end{aligned}$$

Esto es, φ_0 se conforma eliminando A_{n+1} de cada cláusula $\tilde{\varphi}_0$. Algo similar genera φ_1.

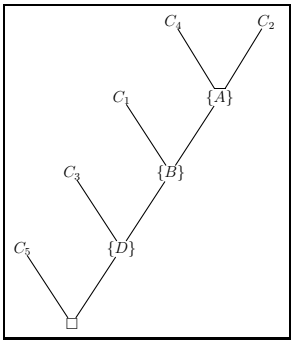
Observe que φ_0 es la fórmula que se obtiene al remplazar A_{n+1} en φ por una contradicción y φ_1 la que se logra al sustituir A_{n+1} en φ por una tautología. Dado que A_{n+1} debe ser V o F, se sigue que $\varphi = \varphi_0 \vee \varphi_1$. Ya que φ no es satisfacible, φ_0 y φ_1 deben ser no satisfacibles. Las fórmulas φ_0 y φ_1 sólo usan las fórmulas atómicas $A_1, \ldots, A_n$. Por hipótesis de inducción, podemos derivar $\square$ a partir de φ_0 y φ_1 mediante N-resolución.

La observación crucial es que φ se forma de $\tilde{\varphi}_0$ eliminando A_{n+1} de cada cláusula. Sabemos que podemos derivar $\square$ a partir de φ_0 mediante N-resolución, así que podemos derivar $\square$ o $\{A_{n+1}\}$ a partir de φ_0 mediante N-resolución (insertando de nuevo $\{A_{n+1}\}$ en cada cláusula de φ_0). De igual forma podemos derivar $\square$ o $\{\neg A_{n+1}\}$ a partir de $\tilde{\varphi}_1$ mediante N-resolución. En cualquier caso, estamos habilitados para deducir $\square$ mediante N-resolución a partir de $\varphi = \tilde{\varphi}_0 \cup \tilde{\varphi}_1$.

$\square$

Definición 1.8.7 (Resolución lineal)**.** La resolución lineal requiere que una de las cláusulas por resolver provenga de la resolución previa. Las dos cláusulas que dan inicio al procedimiento pueden ser arbitrarias.

Ejemplo 1.8.8. Con las cláusulas del ejemplo 1.8.2 podemos lograr una resolución lineal,



Definición 1.8.9. Decimos que un conjunto S de enunciados es mínimo no satisfacible cuando S no es satisfacible y cualquier subconjunto $S' \subsetneq S$ es satisfacible.

Lema 1.8.10. *Sea S un conjunto de enunciados no satisfacible. Entonces S tiene un subconjunto mínimo no satisfacible.*

Demostración. Si S es infinito, por el teorema de compacidad debe existir un subconjunto finito $S' \subset S$ que no sea satisfacible. Por consiguiente, probaremos el resultado para conjuntos finitos de enunciados.

Por inducción en n mostraremos que todo conjunto S de n enunciados tiene un subconjunto mínimo no satisfacible. Si $n = 1$, S mismo es mínimo no satisfacible. Supongamos cierta la afirmación para conjuntos de n enunciados y demostrémosla para $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Considere los subconjuntos $S_j \subseteq S$ formados como $S_j = S - \{\alpha_j\}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$. Si todos ellos son satisfacibles, entonces S mismo es mínimo no satisfacible y terminamos.

De lo contrario, colectamos

$$\{S_{j_1}, \ldots, S_{j_l}\},$$

aquellos S_j que no son satisfacibles. Puesto que cada S_{j_i} no es satisfacible y contiene n elementos, nuestra hipótesis de inducción indica que existen $S'_{j_i} \subseteq S_{j_i}$ conjuntos mínimos no satisfacibles. Cualquiera de ellos sirve para nuestra afirmación. ☐

Se sigue que cualquier conjunto finito de enunciados que no sea satisfacible contiene un subconjunto mínimo no satisfacible.

Lema 1.8.11. *Sea Φ un conjunto mínimo no satisfacible de proposiciones (es decir, estamos en lógica proposicional) en FNC. Para cualquier $C \in \Phi$, podemos derivar $\square$ a partir de Φ mediante resolución lineal comenzando con C.*

Demostración. Puesto que Φ no es satisfacible, por compacidad podemos suponer que existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito y no satisfacible. Pero sabemos que Φ es mínimo satisfacible, así que $\Phi \subseteq \Phi'$, es decir, $\Phi = \Phi'$ y Φ es finito.

Procedemos por inducción en la cantidad n de subfórmulas atómicas de Φ. Si $n = 1$, entonces $\Phi = \{\{A\}, \{\neg A, \neg A\}\}$ (¿por qué no puede contener Φ la cláusula $\{A, \neg A\}$?), para algún átomo A. En este caso, la conclusión del lema es inmediata.

Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$, Φ contiene $n+1$ subfórmulas atómicas. Nuestra hipótesis de inducción es que el lema se cumple para cualquier fórmula en FNC que contenga a lo sumo n subfórmulas atómicas.

Si l es una literal en C, mediante ella podemos descomponer Φ de la siguiente forma:

- $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_i\}$ el conjunto de cláusulas en Φ que contiene a l.
- $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_j\}$ el conjunto de cláusulas en Φ que contiene a $\overline{l}$.
- $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_r\}$ el conjunto de cláusulas en Φ que no contiene a l o a $\overline{l}$.

Cualquier cláusula que contenga a l y a $\overline{l}$ es una tautología. Puesto que Φ es mínimo no satisfacible, no puede contener cláusulas que sean tautologías. En consecuencia, toda cláusula en Φ está exactamente en alguno de los conjuntos $\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{E}$ y $C \in \mathcal{C}$. Podemos suponer que $C_1 = C$.

Caso 1. $C = \{l\}$.

Para cualquier cláusula $D \in \Phi$, podemos encontrar una resolvente de C y D si y sólo si $D \in \mathcal{D}$. Si $D \in \mathcal{D}$, sea D' la resolvente de C y D. Esto es, D' es la fórmula que se obtiene al eliminar $\overline{l}$ de D. Como Φ no es satisfacible, podemos derivar $\square$ mediante resolución. Pero Φ es mínimo no satisfacible, así que la cláusula C y cada cláusula de Φ se requieren en la derivación. Se sigue que debe existir la cláusula $D_1 \in \mathcal{D}$. Sea Φ_l el conjunto $\{D_1', \ldots, D_j', E_1, \ldots, E_k\}$.

Note que Φ_l es equivalente a la fórmula que se obtiene de Φ al remplazar l con una tautología y $\overline{l}$ con una contradicción.

l o $\overline{l}$ es una literal que aparece en Φ pero no en Φ_l. Si Φ contiene $n+1$ subfórmulas atómicas, Φ_l contiene n subfórmulas atómicas. Nuestra hipótesis de inducción se aplica a cualquier subconjunto mínimo no satisfacible de Φ_l.

Afirmación 1. Existe un subconjunto de Φ_l mínimo no satisfacible que contiene a D_1'.

Demostración de la afirmación 1. Primero mostramos que Φ_l no es satisfacible; con este fin suponga lo contrario, que Φ_l es satisfacible. Entonces existe una asignación $\mathcal{A}$ definida en los átomos de Φ_l pero no en l. Sea $\mathcal{A}'$ una extensión de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}'(l) = V$. En consecuencia, $\mathcal{A}'$ es modelo de Φ, una contradicción. Así que Φ_l no es satisfacible. Por el lema 1.8.10, Φ_l contiene un subconjunto mínimo no satisfacible. Removemos D_1' de Φ_l y comprobamos que el conjunto resultante $\Phi_l - \{D_1'\}$ es satisfacible. Con este fin en mente, considere el conjunto $\{C_1, D_2, \ldots, D_j, E_1, \ldots, E_k\}$. Como éste es un subconjunto propio de Φ (pues no contiene a $D_1 \in \Phi$), el conjunto debe ser satisfacible. Sea $\mathcal{A}$ un modelo de este conjunto. Ya que $\mathcal{A}$ es modelo de C y D_2, también modela su resolvente

D'_2. De igual forma, $\mathcal{A}$ modela cada fórmula de $\Phi_l - \{D'_1\}$ y este conjunto resulta satisfacible. Se infiere que cualquier subconjunto mínimo no satisfacible de Φ_l debe contener a D'_1 como se afirmó. (1)

Por hipótesis de inducción, $\square$ se puede derivar de Φ_l mediante resolución lineal, comenzando con D'_1. El lema afirma que $\square$ se puede derivar de Φ mediante resolución lineal, empezando con C. Comenzamos esta derivación tomando C y D_1 como padres de la resolvente D'_1.

Ahora dediquemos nuestra atención al conjunto $\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_j, E_1, \ldots, E_k\}$. Percátese de que éste se obtiene de Φ_l reinsertando $\overline{l}$ en las cláusulas $D'_2, \ldots, D'_j$. Ya que $\square$ se puede derivar de Φ_l mediante resolución lineal comenzando con D'_1, entonces $\square$ o $\overline{l}$ se puede derivar después de reinsertar l a esas cláusulas. Si se deriva $\square$, hemos terminado. Si se deriva $\overline{l}$, entonces $\square$ se obtiene a partir de $\overline{l}$ y C terminando con éxito la resolución lineal.

Caso 2. C contiene literales distintas de l.

Costaría trabajo no atender, en estas circunstancias, al conjunto $\Phi_{\overline{l}}$ definido como

$$\Phi_{\overline{l}} = \{C'_1, \ldots, C'_i, E_1, \ldots, E_k\},$$

donde cada C'_s se obtiene eliminando l de $C_s \in \mathcal{C}$. Reflexione un poco para deducir que $\Phi_{\overline{l}}$ es equivalente a la fórmula que se obtiene de Φ remplazando $\overline{l}$ por una tautología y l por una contradicción. Al igual que Φ_l, el conjunto $\Phi_{\overline{l}}$ contiene n subfórmulas atómicas y podemos recurrir a la hipótesis de inducción para subconjuntos mínimos no satisfacibles de $\Phi_{\overline{l}}$.

Afirmación 2. Existe un subconjunto de $\Phi_{\overline{l}}$ mínimo no satisfacible que contiene C'_1.

Demostración de la afirmación 2. El conjunto $\Phi_{\overline{l}}$ no es satisfacible por la misma razón que Φ_l no fue satisfacible. Cualquier asignación que sea modelo de $\Phi_{\overline{l}}$ se puede extender a una asignación que sea modelo de Φ. Dado que Φ no es satisfacible, no puede existir tal asignación.

Supongamos que eliminamos C'_1 de $\Phi_{\overline{l}}$ y probemos que el conjunto resultante $\Phi_{\overline{l}} - \{C'_1\}$ es satisfacible.

Dado que Φ es mínimo no satisfacible, existe una asignación $\mathcal{A}$ que modela toda fórmula de Φ distinta de C. Se sigue que $\mathcal{A} \models \neg C$. Como $l \in C$, debe ocurrir $\mathcal{A} \models \overline{l}$. Pero $\mathcal{A} \models C_2$ y $\mathcal{A} \not\models l$, así que $\mathcal{A}$ debe ser modelo de C'_2 que se obtuvo al eliminar l de C_2. Se sigue que cualquier subconjunto de $\Phi_{\overline{l}}$ mínimo no satisfacible debe contener a C'_1 como se afirma. (2)

Por hipótesis de inducción, $\square$ se puede derivar a partir de $\Phi_{\overline{l}}$ mediante resolución lineal comenzando con C'_1.

El conjunto

$$\{C_1, \ldots, C_i, E_1, \ldots, E_k\} \qquad (*)$$

se obtiene de $\Phi_{\overline{l}}$ reinsertando l en alguna de las cláusulas. Inferimos que $\square$ o l se puede derivar de este subconjunto de Φ mediante resolución lineal comenzando con $C = C_1$.

Si se deriva $\square$, terminamos. De lo contrario, se deriva l. Tomemos en cuenta el conjunto

$$\{l, D_1, \ldots, D_j, E_1, \ldots, E_k\}. \qquad (\text{❀})$$

Si eliminamos l de este conjunto, obtenemos un subconjunto propio de Φ que debe ser satisfacible. Pero el tener a l como miembro lo hace no satisfacible. Cualquier asignación que sea modelo de l debe ser modelo de cada cláusula de $\mathcal{C}$. Dado que Φ no es satisfacible, tampoco lo es el conjunto (❀). Por lo tanto, existe un subconjunto mínimo no satisfacible de (❀) que contiene a l. Por el caso 1, se puede derivar $\square$ a partir de este conjunto mediante resolución lineal comenzando con l. Esto completa la resolución lineal y la demostración. ❐

Proposición 1.8.12. *Sea φ un enunciado en FNS. Entonces φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar de φ mediante resolución lineal.*

Demostración. Sólo una de las direcciones de esta proposición no es trivial.

Supongamos que φ no es satisfacible y probemos que podemos derivar $\square$ de φ mediante resolución lineal. Por el teorema 1.5.3, basta probar esto para el cálculo proposicional. Así que suponga que φ es un conjunto de enunciados de la lógica proposicional en FNC. Por el lema 1.8.10, φ contiene un subconjunto φ' mínimo no satisfacible. Por el lema 1.8.11, para cualquier $C \in \varphi'$ se puede derivar $\square$ mediante resolución lineal comenzando con C. ❐

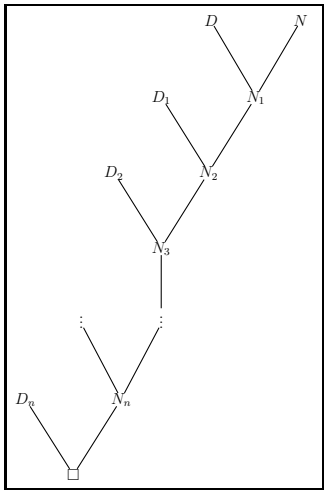
Después de tan larga demostración lo que hemos conseguido es probar que si φ no es satisfacible, podemos exhibir esto usando resolución lineal o N-resolución. Seamos exigentes, pidamos efectuar N-resoluciones lineales, que llamaremos LN-resoluciones, aun sin saber si siempre son posibles.

Ejemplo 1.8.13. Nuestra multicitada fórmula $\varphi = \{\{A, B\}, \{\overline{A}, C\}, \{\overline{B}, D\}, \{\overline{C}\}, \{\overline{D}\}\}$ es un buen ejemplo de que, a pesar de que no se satisface con nada, no podemos exhibir su mal comportamiento mediante LN-resolución. Apelamos a la paciencia del lector para que éste intente efectuar tal resolución, que no terminará con éxito.

Se complica nuestra pretensión de introducir un nuevo tipo de resolución. ¿Qué tal si restringimos el ámbito de aplicación de la LN-resolución? Es decir, bien mirado el asunto, con nuestra φ no funcionó, pero eso no quita que sí trabaje para otro tipo de fórmulas. Note que en el ejemplo, φ no consiste enteramente en cláusulas de Horn.

Teorema 1.8.14. *Sea φ un enunciado en FNS. Si φ consiste en cláusulas de Horn, φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede deducir de φ mediante LN-resolución.*

Demostración. Supongamos que φ no es satisfacible y es de Horn. Por el teorema 1.5.3, podemos suponer además que φ es un enunciado de la lógica proposicional. Sea φ' un subconjunto de φ mínimo no satisfacible. Sabemos que existe una N-derivación de $\square$ a partir de φ'. En particular, φ' debe contener una cláusula negativa N. También sabemos que existe una derivación lineal de $\square$ comenzando con N. Así que



Para ciertas cláusulas $D_1, D_2, \ldots, D_n$ y $N_1, \ldots, N_n$. Como φ es de Horn, D contiene a lo sumo una literal positiva. Se sigue que N_1 contiene sólo literales negativas. En forma similar, cada N_i es negativa y ésta es una LN-resolución. $\square$

Las cláusulas que consisten exactamente en una literal positiva se conocen como definidas. Observe que cada D_i en la demostración del teorema 1.8.14 es necesariamente definida. La literal positiva en D_i se cancela con alguna de las literales negativas en N_i, generando la resolvente N_{i+1}. Para cada N_i pueden existir varias posibilidades para D_i, dependiendo de qué literal en N_i se quiera eliminar.

Antes de continuar con un nuevo refinamiento de resolución, es conveniente notar que si se quiere implementar resolución en una computadora, la resolución no podrá ocurrir

como lo hemos venido haciendo teóricamente. Por ejemplo, para la computadora las cláusulas siguientes son diferentes, aunque en teoría sean iguales:

$$C = \{A, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\} \qquad D = \{\overline{B}, \overline{C}, A, \overline{D}\}.$$

¿Por qué? Esto se debe a que la computadora de inmediato establece un orden entre los elementos de cada conjunto. Ya sea que este orden se determine por la aparición de las literales en la cláusula de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En este sentido, para una computadora cada cláusula está ordenada.

Considere las cláusulas ordenadas $C_1 = \{\overline{A_0}, \ldots, \overline{A_n}\}$ y $C_2 = \{B, \overline{B_0}, \ldots, \overline{B_m}\}$. Si las resolvemos, digamos sobre $\overline{A_i}$ y B, es muy probable que debamos hacer una sustitución antes para unificar y poder resolver. Una vez hecha la unificación, la computadora simplemente elige una literal en cada cláusula que puede eliminar por resolución. Bien puede ocurrir que tras la sustitución aparezcan varias literales iguales, lo cual no toma en cuenta la computadora. Por ello es importante saber que la computadora considera el orden mencionado en cada cláusula.

¿Qué cosa es una piedra roja que va dando brincos? La pulga.

Sin embargo, este orden impuesto tiene sus ventajas. Para efectuar la resolución de dos cláusulas, no sería extraño que tuviésemos varias posibles elecciones para decidir sobre qué literales se efectuará la resolución. Por supuesto, no podemos dejar que la computadora haga esta elección, apelando a sus buenos sentimientos, a menos que le digamos cómo elegir cada vez.

Para este fin se introducen reglas de selección. La regla de selección que se utiliza con frecuencia es resolver siempre en la primera literal posible, es decir, la literal más a la izquierda. A esto se le llama SLD-resolución (suponiendo que se trate de una LN-resolución). En general, se pueden considerar otras reglas de selección R, digamos, una función que escoja una literal de cada cláusula.

Definición 1.8.15. Una regla de selección R es simplemente una función que escoge una literal $R(C)$ de cada cláusula no vacía y ordenada C. Una SLD-derivación vía R es una

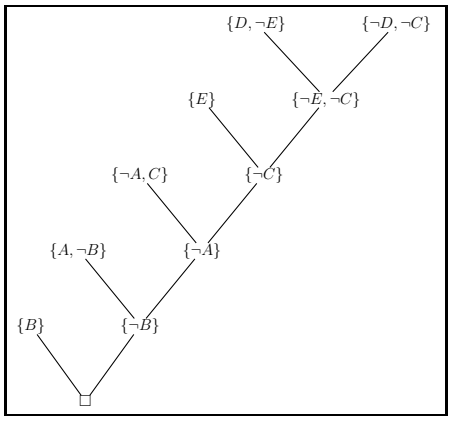
LN-derivación en la que $R(C_i)$ es la literal que se resuelve en la etapa i de la derivación. Si no se menciona la R, supondremos que se escoge la literal más a la izquierda.

Definición 1.8.16. Una regla de selección R es invariante si, para toda cláusula ordenada C y cada sustitución sub, $R(Csub) = (R(C))sub$.

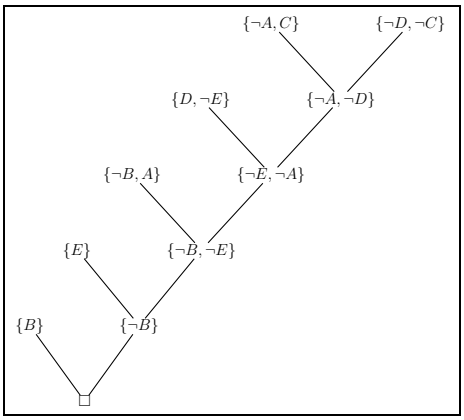
En lo sucesivo supondremos que nuestras reglas de selección son invariantes. Por cierto, la regla de selección natural (la literal más a la izquierda) es invariante.

Definición 1.8.17. SLD-resolución es una LN-resolución con una regla de selección R.

Ejemplo 1.8.18. Sea $\varphi = \{\{\overline{A}, C\}, \{A, \overline{B}\}, \{B\}, \{\overline{A}, \overline{C}\}, \{D, \overline{E}\}, \{E\}\}$. Primero usamos la regla de selección «natural» (izquierda).

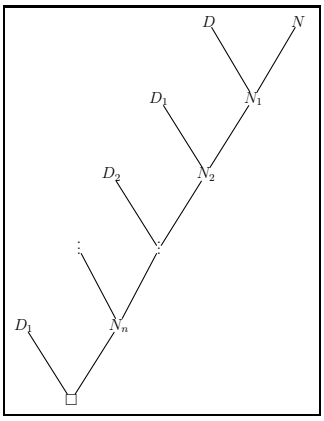


y después usamos la regla de selección «derecha»:



Teorema 1.8.19. *Sea φ un enunciado en FNS. Si φ es de Horn, entonces φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar a partir de φ mediante SLD-resolución para cualquier regla de selección invariante R.*

Demostración. Puesto que la regla de selección es invariante, podemos aplicar el teorema 1.5.3 y suponer que φ es un enunciado de la lógica proposicional. Sabemos que podemos derivar $\square$ de φ mediante LN-resolución como sigue,

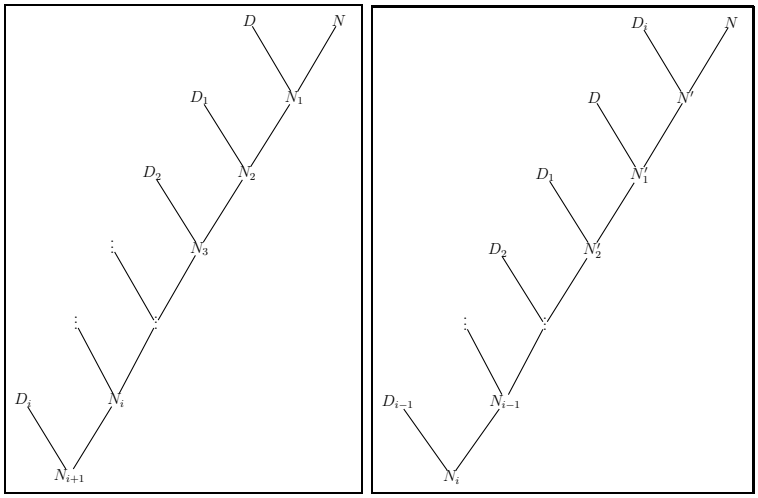


En esta derivación, N es una cláuslua negativa de φ y $D_1, \ldots, D_n$ son cláusulas definidas de φ. Procedemos por inducción en n. Si $n = 0$, entonces N consiste en una literal l. R no tiene otra cosa que hacer que elegir la literal l de N. En este caso, la LN-resolución en realidad es una SLD-resolución.

Ahora supongamos que en esa derivación, $n = m + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces existen $m + 2$ etapas en esta derivación. Supongamos, además, que si $\square$ se puede demostrar mediante LN-resolución en $m + 1$-etapas, se sigue que se puede derivar mediante SLD-resolución, lo que constituye nuestra hipótesis de inducción

Sea l una literal de N elegida por R. Entonces $\overline{l}$ debe ocurrir en D o en alguna D_i. Si por casualidad D se vanagloria de poseer a $\overline{l}$, entonces la SLD-resolución comienza con la misma resolvente N_1 que la LN-resolución que tenemos. Desde este momento, $\square$ se deriva en $m + 1$ etapas a partir de N_1 en la multicitada LN-derivación. Por hipótesis de inducción, $\square$ se puede alcanzar mediante SLD-resolución.

Si, por el contrario, $\overline{l}$ pertenece a una quisquillosa D_i, para alguna $i = 1, \ldots, n$, la SLD-resolución comienza por encontrar la resolvente N' de D_i y N. Considere las siguientes LN-derivaciones:



La derivación a la izquierda es la misma que la de antes. Como la derivación a la derecha también comienza con N e involucra exactamente las mismas cláusulas definidas (en un orden diferente): la resultante N_i' es la misma que la resultante N_{i+1} de la derivación a la izquierda. Ésta se puede continuar como antes para conseguir $\square$. Puesto que $N_i' = N_{i+1}$, podemos finalizar la derivación a la derecha en exactamente la misma forma. Por lo tanto, en esta nueva derivación llegamos a $\square$ con la misma cantidad $m+2$ de etapas que antes. Si comenzamos esta deducción en la segunda etapa, se observa que, usando LN-resolución, se puede llegar a $\square$ a partir de $\{N', D, D_1, \ldots, D_n\}$ en $m+1$ etapas. Otra vez nuestra estimada hipótesis de inducción viene en nuestro auxilio y nos ayuda a derivar $\square$ usando SLD-resolución.

$\square$

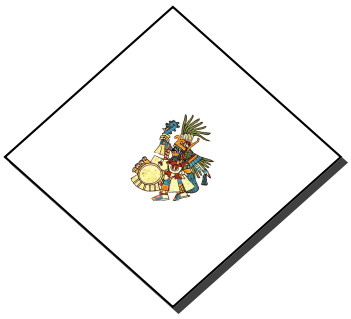
¿Qué cosa es, parada en su cabeza de piedra negra, atento el oído a la región de los muertos? El pinacate.

¿Qué cosa es que trae un huipil apretado? El tomate.

Respuesta que algunos sabios mexicas dieron a los doce franciscanos que, llegados en 1524, habían hecho pública condenación de las creencias y formas de vida indíogena:

Dejadnos pues ya morir,
dejadnos ya perecer,
puesto que ya nuestros dioses han muerto...
Y ahora, nosotros,
¿destruiremos la antigua forma de vida,
la de los chichimecas, toltecas,
acolhuas y tepanecas?
Oíd, señores nuestros, no hagáis algo a nuestro pueblo
que le acarre la desgracia, que lo haga perecer.
Es ya bastante que hayamos perdido,
que se nos haya quitado,
que se nos haya impedido, nuestro gobierno.
Si en el mismo lugar permaneceremos,
sólo quedaremos cautivos...

Libro de los coloquios y doctrinas cristianas, de Bernardino de Sahagún.



1.9 ➠ Ejercicios

1. Suponga que existen los armadillos verdes y que usted ha atrapado al mayor. Traduzca la siguiente información a un lenguaje formal, pero en forma de cláusulas de Horn.

   a) Cualquier armadillo verde que viva en los pinos es infeliz.

   b) Cualquier animal que encuentra a una buena persona es feliz.

   c) Las personas que no visitan los pinos son buenas personas.

   d) Los animales que viven en los pinos encuentran a las personas que visitan los pinos.

2. Traduzca lo siguiente en forma de fórmulas de Horn:

   a) Si x es la mamá de y, entonces x es mujer y un ancestro de y.

   b) x es papá de y, si x es hombre y ancestro de y.

   c) x es humano si sus ancestros son humanos.

   d) x es humano si su papá es humano.

   e) Nadie es su propio ancestro.

3. Determine la forma clausal de los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned}\sigma \equiv & \exists x \forall y \exists z[(P(x,y) \vee \neg Q(x) \vee R(z)) \wedge (\neg P(x,y) \vee \\ & \neg Q(x)) \wedge (\neg P(x,y) \vee R(z))].\\ \sigma' \equiv & \neg \forall x \exists y[P(x,y) \rightarrow Q(y)].\\ \varphi \equiv & \neg[\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z)].\end{aligned}$$

4. Considere el siguiente lenguaje $\mathcal{L} = \{*, P\}$ para la teoría de grupos, donde P es un 3-predicado que se puede interpretar como $P(x,y,z) \Leftrightarrow x * y = z$.

   a) Exprese los tres axiomas de la teoría de grupos en este lenguaje.

   b) Exprese que un grupo es abeliano en este lenguaje.

   c) Encuentre la FNS de los incisos previos.

5. Sean

$$S_1 = \{\{P(a)\}, \{P(x), P(f(x))\}\}$$
$$S_2 = \{\{P(x), Q(x)\}, \{R(z)\}, \{T(y), \neg W(y)\}\}.$$

Determine los conjuntos de Herbrand $H_1, H_2, \ldots, H_5$ para estos conjuntos de cláusulas.

6. Determine los conjuntos de Herbrand H_0, H_1 para el conjunto de cláusulas

$$S = \{\{P(f(x), a, g(f(x), b))\}\}.$$

Encuentre las instancias básicas de S en H_0 y H_1.

7. Demuestre las siguientes fórmulas mediante tablas semánticas:

a) $[\exists\, xP(x) \to \forall\, xQ(x)] \to \forall\, x[P(x) \to Q(x)]$.

b) $\neg\forall\, xP(x) \leftrightarrow \exists\, x(\neg P(x))$.

c) $\forall\, x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall\, xP(x) \wedge \forall\, xQ(x))$.

d) $\exists\, x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists\, xP(x) \vee \exists\, xQ(x)$.

e) $\exists\, x\forall\, yP(x, y) \to \forall\, y\exists\, xP(x, y)$.

8. Bosqueje tablas semánticas que ilustren que las siguientes fórmulas no son demostrables:

a) $\sigma \equiv \forall\, x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall\, xP(x) \vee \forall\, xQ(x)$.

b) $\varphi \equiv \exists\, xP(x) \wedge \exists\, xQ(x) \to \exists\, x(P(x) \wedge Q(x))$.

Encuentre dos interpretaciones en las que σ y φ no son ciertas, respectivamente.

9. Determine una refutación de los siguientes conjuntos de cláusulas mediante árboles semánticos.

a) $S_1 = \{\{P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x, a)\}, \{\neg Q(y, a)\}\}$.

b) $S_2 = \{\{P(x), Q(f(x))\}, \{\neg P(a), R(x, y)\}, \{\neg R(a, x)\}, \{\neg Q(f(a))\}\}$.

10. Construya árboles semánticos y determine las instancias básicas no satisfacibles correspondientes para las siguientes fórmulas:

$$\sigma \equiv \exists\, x\forall\, yP(x, y) \wedge \forall\, y\exists\, x\neg P(y, x).$$
$$\varphi \equiv \exists\, x\forall\, y\forall\, z\exists\, w[P(x, y) \wedge \neg P(y, x)].$$
$$\tau \equiv \exists\, x\forall\, y\forall\, z\exists\, w[P(x, y) \wedge \neg P(z, w)].$$

11. Determine instancias básicas no satisfacibles para los siguientes conjuntos de cláusulas:

$$S_1 = \{\{P(x,a,g(x,b))\},\{\neg P(f(y),z,g(f(a),b))\}\}.$$
$$S_2 = \{\{P(x)\},\{\neg P(x),Q(f(x))\},\{\neg Q(f(a))\}\}.$$
$$S_3 = \{\{P(x)\},\{Q(x,f(x)),\neg P(x)\},\{\neg Q(g((y)),z)\}\}.$$

12. Averigüe si los siguientes conjuntos de cláusulas son unificables. De serlo, determine su umg.

a) $S = \{\{P(f(a),g(x))\},\{P(y,y)\}\}$.

b) $S = \{\{P(a,x,h(g(z)))\},\{P(z,h(y),h(y))\}\}$.

c) $S = \{\{Q(f(w),a,z)\},\{Q(w,b,f(z))\}\}$.

d) $S = \{\{roba(w,f(y))\},\{roba(Vicente,Presupuesto)\}\}$.

e) $S = \{\{R(w,y),Q(w,f(z),z),\neg R(w,w)\},\{R(w,z),\neg Q(f(w),w,z)\}\}$.

f) $S = \{\{P(f(x),a)\},\{P(y,f(w))\}\}$.

g) $S = \{\{P(f(x),z)\},\{P(y,a)\}\}$.

13. Determine si los siguientes conjuntos de cláusulas son unificables. Si lo son, encuentre su umg.

a) $S = \{\{Q(a)\},\{Q(b)\}\}$.

b) $\{\{Q(a,x)\},\{Q(a,a)\}\}$.

c) $\{\{Q(a,x,f(x))\},\{Q(a,y,y)\}\}$.

d) $\{\{Q(x,y,z)\},\{Q(u,h(v,v),u)\}\}$.

e) $\{\{P(x,g(x),y,h(x,y),z,f(x,y,z))\}\{P(u,v,e(v),w,k(v,w),s)\}\}$.

14. Suponga que S es un conjunto de cláusulas y que θ es un unificador general. Demuestre que θ es el umg de S si y sólo si para todo unificador τ de S, se cumple $\tau = \tau\theta$.

15. Determine instancias básicas no satisfacibles del conjunto de cláusulas:

$$S = \{\{P(x,a,g(x,b))\},\{\neg P(f(y),z,g(f(a),b))\}\}.$$

16. Considere los siguientes predicados:

$T(x,y,u,v)$: $xyuv$ es un trapecio, donde x,y,u y v son los vértices superior izquierdo, superior derecho, inferior derecho e inferior izquierdo, respectivamente:

$P(x,y,u,v)$: las secciones xy y vu son paralelas.

$E(x,y,z,u,v,w)$: el ángulo en xyz es igual al ángulo en uvw, y los enunciados

$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y \forall u \forall v[T(x,y,u,v) \to P(x,y,u,v)]$ Definición de trapecio.
$\varphi_2 \equiv \forall x \forall y \forall u \forall v[P(x,y,v,u) \to E(x,y,v,u,v,y)]$
Si xy, vu son paralelas, el ángulo xyv es igual al ángulo uvy.
$\varphi_3 \equiv T(a,b,c,d)$ $abcd$ es un trapecio.

Mediante resolución, pruebe que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \vdash E(a,b,d,c,d,b)$.

17. Pruebe lo siguiente mediante resolución y tablas semánticas:

a) $\{\forall x[A(x) \to (B(x) \wedge C(x)))], \exists x[A(x) \wedge D(x)]\} \models \exists x[D(x) \wedge C(x)]$.

b) Si

$$\Sigma = \{\exists x[P(x) \wedge \forall y(T(x,y) \to Q(x,y))], \forall x[P(x) \to \forall y(W(y) \to \neg Q(x,y))]\},$$

muestre que

$$\Sigma \models \forall x[T(x) \to \neg W(x)].$$

18. En los siguientes incisos φ, ψ son fórmulas ya sea sin variables libres o sólo con x como tal. Dé una demostración por tablas de las siguientes fórmulas.

a) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$.

b) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$.

c) $(\varphi \vee \forall x\psi(x)) \to \forall x(\varphi \vee \psi(x))$, x no es libre en φ.

d) $(\varphi \wedge \exists x\psi(x)) \to \exists x(\varphi \wedge \psi(x))$, x no es libre en ψ.

e) $\exists x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \exists x\psi(x))$, x no es libre en φ.

f) $\exists x(\varphi \wedge \psi(x)) \to (\varphi \wedge \exists x\psi(x))$, x no es libre en φ.

g) $\neg\exists x\varphi(x) \to \forall x\neg\varphi(x)$.

h) $\forall x\neg\varphi(x) \to \neg\exists x\varphi(x)$.

i) $\exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$.

j) $\exists x(\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x\varphi(x) \to \psi)$, x no es libre en ψ.

k) $(\exists x\varphi(x) \to \psi) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi)$, x no es libre en ψ.

19. Sean φ, ψ fórmulas con variables libres x, y y z; sea w una variable que no aparece en φ o en ψ. Dé una prueba por tablas de las siguientes fórmulas.

a) $\forall x\exists y\neg\varphi(x,y,z) \leftrightarrow \forall x\exists y\exists z\neg\varphi(x,y,z)$.

b) $\exists x\forall y(\forall z\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\forall y\forall w(\varphi_z(w) \vee \psi)$.

c) $\forall x \exists y(\varphi \vee \exists z \psi) \leftrightarrow \forall x \exists y \exists w(\varphi \vee \psi_z(w))$.

d) $\forall x \exists y(\varphi \rightarrow \forall z \psi(z)) \rightarrow \forall x \exists y \forall w(\varphi \rightarrow \psi_z(w))$.

20. Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y $c_1, \ldots, c_n$ símbolos de constante que no pertenecen a $\mathcal{L}$. Muestre que $\forall x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es demostrable por tablas si y sólo si $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ lo es. Argumente sintácticamente para probar que, dada una prueba de una de las fórmulas, se puede construir una prueba de la otra.

21. Dé una prueba semántica del ejercicio 20. Muestre que el enunciado

$$\forall x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

es demostrable por tablas si y sólo si $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$lo es, mediante una demostración de que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es válida si y sólo si $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ es válida. Aplique entonces el teorema de completud para tablas semánticas.

22. Encuentre la FNS de los siguientes enunciados:

a) $\forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee Q(x, y))$.

b) $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y P(x, y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x, y) \vee \exists x \forall y P(x, y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x, y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x, y)$.

23. Suponga que $\mathcal{L}$ consiste en la constante c y el símbolo de 1-predicado R.

a) ¿Cuál es el universo de Herbrand de $\mathcal{L}$?

b) ¿Cuáles son las posibles interpretaciones de Herbrand para $\mathcal{L}$?

c) Sea $S = \{R(c), \exists x \neg R(x)\}$. Note que S no consiste exclusivamente en fórmulas universales, por lo que no está en forma clausal. Muestre que S es satisfacible, pero no tiene modelo de Herbrand.

24. (Programación lógica) A continuación, algo de notación en programación lógica.

✎ Las literales son fórmulas atómicas o sus negaciones. Las fórmulas atómicas son literales positivas, mientras que las literales negativas son negaciones de fórmulas atómicas.

✎ Una cláusula es un conjunto finito de literales.

✎ Una cláusula es de Horn si contiene a lo sumo una literal positiva.

✎ Una cláusula de programa es una cláusula con exactamente una literal positiva. Si una cláusula de programa contiene literales negativas, es una regla; en otro, caso es un hecho.

✎ Una cláusula meta es una cláusula sin literales positivas.

✎ Una fórmula es un conjunto de cláusulas.

Uno de los lenguajes más populares para programación lógica es PROLOG (del cual hay varias versiones gratuitas en internet). La siguiente notación suele utilizarse en PROLOG:

✍ El hecho $\{p(\vec{x})\}$ aparece en un programa como

$$p(\vec{x}).$$

✍ La regla $C = \{p(\vec{x}), \neg q_1(\vec{x},\vec{y}), \ldots, \neg q_n(\vec{x},\vec{y})\}$ aparece en un programa PROLOG como

$$p(\vec{x}) : -q_1(\vec{x},\vec{y}), \ldots, q_n(\vec{x},\vec{y}).$$

✍ Para una regla C como en el inciso anterior, $p(\vec{x})$ es la meta o cabeza de C. Decimos que $q_1(\vec{x},\vec{y}), \ldots, q_n(\vec{x},\vec{y})$ son las submetas o el cuerpo de C.

✍ Un programa en PROLOG es una fórmula (conjunto de cláusulas) que contiene sólo cláusulas de programa (es decir, reglas y hechos).

✍ Para que un programa en PROLOG se inicie, el cursor aparece como ?, y entonces se escribe una meta, digamos $M(X)$. PROLOG usa resolución para determinar si se cumple $M(X)$ y para cuál X. Si la encuentra, contesta yes y da la X. De lo contrario contesta NO. Si la respuesta fue YES, se puede introducir «;» para que busque otra posible X.

Cada cláusula se interpreta como la cerradura universal de la disyunción de sus elementos. Una fórmula se interpreta como la conjunción de sus cláusulas.

a) Escriba un programa PROLOG para describir las siguientes relaciones en una familia: hermano, hermana, primo, prima, sobrino, sobrina, tío, tía, bisabuelo, abuelo, bisabuela, abuela.

b) Escriba un program PROLOG con los estados de la república y sus respectivas capitales como base de datos. Escriba en PROLOG las preguntas adecuadas para determinar la capital de un estado dado o viceversa.

c) Construya una base de datos de personas con nombre, sexo y altura. Para esta base, defina en PROLOG las relaciones $mas - alto(x,y)$, $normal(x)$, $alto(x)$ y $bajo(x)$.

d) Describa que ocurre con el siguiente programa PROLOG:

$$
\begin{aligned}
&A(a,b)\\
&B(X) :- C(X,Y)\\
&C(b,a) :- A(a,b)\\
&C(X,Y) :- A(X,Y)\\
&?\ B(X)
\end{aligned}
$$

e) Pruebe que todo conjunto P de cláusulas de programa, es decir, todo programa P tiene un modelo de Herbrand mínimo, de hecho el menor posible. [Sugerencia: Pruebe que la intersección de todos los modelos de Herbrand para P (verifique que hay alguno) es un modelo de Herbrand].

f) Sea $\mathfrak{A}_P$ un modelo de Herbrand mínimo para un programa P en un lenguaje $\mathcal{L}$. Pruebe que para cada $\mathcal{L}$-fórmula atómica φ, $\mathfrak{A}_P \models \varphi$ si y sólo si $P \models \varphi$.

g) Sea P un programa y $G = \neg\theta(\vec{x})$ una cláusula meta. Pruebe que si $P \models \exists\vec{x}\theta(\vec{x})$ (o lo que es equivalente, si $P \cup \{G\}$) no es satisfacible), entonces existen términos de Herbrand $\vec{t}$ tales que $P \models \theta_{\vec{x}}(\vec{t})$. [Sugerencia: Si $P \models \exists\vec{x}\theta(\vec{x})$, considere el modelo mínimo $\mathfrak{A}_P$ y use el ejercicio previo.]

h) Del teorema de Herbrand deduzca la siguiente consecuencia: si $\varphi(\vec{x})$ es una fórmula sin cuantificadores en un lenguaje $\mathcal{L}$ con al menos un símbolo de constante, entonces $\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ es válida si y sólo si existen términos básicos $\vec{t}_i$ de $\mathcal{L}$ tales que $\varphi(\vec{t}_1) \vee \cdots \vee \varphi(\vec{t}_n)$ es una tautología. [Sugerencia: Primero note que $\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ es válido si y sólo si $\forall\vec{x}\neg\varphi(\vec{x})$ no es satisfacible si y sólo si $\neg\varphi(\vec{x})$ no es satisfacible. Por el teorema de Herbrand, $\neg\varphi(\vec{x})$ no es satisfacible si y sólo si existe una cantidad finita de $\mathcal{L}$-términos básicos $\vec{t}_i$ tales que se cumple lo que queremos.]

i) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje sin símbolos de función. Describa un procedimiento que, dado un enunciado $\psi \equiv \forall x_1 \cdots x_n \exists y_1 \cdots y_m \varphi$, con φ libre de cuantificadores, decide si ψ es válida o no. [Sugerencia: Use el ejercicio 20 para reducir la validez de ψ a la de $\exists y_1 \cdots y_m \varphi(c_1, \ldots, c_n, y_1, \ldots, y_m)$ para nuevos símbolos de constante $c_1, \ldots, c_n$. Entonces use el inciso previo.]

j) Sea S un conjunto de cláusulas en un lenguaje $\mathcal{L}$. El éxito de S es el conjunto de instancias básicas $(t_1, \ldots, t_n)$ en $\mathcal{L}$ de los predicados de $\mathcal{L}$ tales que existe una refutación (lograr $\square$) mediante resolución de $S \cup \{\neg A(t_1, \ldots, t_n)\}$. Muestre que si P es un programa PROLOG, una fórmula atómica básica $A(t_1, \ldots, t_n)$ está en el exito de S si y sólo si es verdadera en todo modelo de Herbrand de P.

k) Suponga que describimos una gráfica como antes, donde $borde(n, m)$ representa la 2-relación implícita. Defina, mediante un programa PROLOG, el predicado $conectado(x, y)$ de tal forma que $conectado(x, y)$ sea una consecuencia lógica del programa si y sólo si existe una trayectoria de x a y.

l) Considere el programa PROLOG consistente en

$$p(X,Z) : -q(X,Y), p(Y,Z).$$
$$p(X,X).$$
$$q(a,a).$$

Dibuje una SLD-derivación de lo que ocurre cuando se introduce

$$? - p(X,Y).$$

con la regla de selección natural y cuando la regla de selección es la derecha.

m) Considere el siguiente programa:

$$p(X,Y) : -s(X), t(X).$$
$$p(X,Y) : -q(X, f(X)), r(X, f(Y)).$$
$$q(b,Y).$$
$$q(a,Y) : -r(a, f(a)).$$
$$r(a, f(a)).$$
$$r(b, f(b)).$$
$$s(a).$$
$$s(b).$$
$$t(a).$$

Dibuje una SLD-derivación usando la regla de selección natural cuando se introduce

$$? - p(X,Y).$$

n) Considere el siguiente programa:

$$tc(X,Y) : -r(X,Y).$$
$$tc(X,Y) : -r(X,Z), tc(Z,Y).$$

y se introduce

$$? - tc(a,b).$$

Se tendrá éxito exactamente cuando la pareja (a,b) esté en la cerradura transitiva de r. ¿Es cierto?

25. Sean $\varphi(x,y)$ una fórmula y f un símbolo de 1-función que no aparece en φ. Muestre que el enunciado $\forall x \varphi(x, f(x)) \to \forall x \exists y \varphi(x,y)$ es válido pero su recíproco, $\forall x \ \exists y \ \varphi(x,y) \to \forall x \ \varphi(x, f(x))$, no lo es.

26. Aplique el algoritmo de unificación a cada uno de los siguientes conjuntos y encuentre el umg o pruebe que no son unificables.

    a) $\{P(h(y), a, z), P(hf(w), a, w), P(hf(a), a, u)\}$.

    b) $\{P(h(y), a, z), P(hf(w), a, w), P(hf(a), a, b)\}$.

27. Traduzca las siguientes afirmaciones, construya su forma clausal y pruebe lo que se pide mediante resolución.

    a) Suponga que todos los peluqueros afeitan a todo aquel que no se rasura a sí mismo. Más aún, ningún peluquero afeita a nadie que se rasure a sí mismo. Concluya que no hay peluqueros.

    b) Suponga que Juan aprecia a todo aquel que no se aprecia a sí mismo. Concluya que no es el caso que Juan aprecie a nadie que se aprecie a sí mismo.

28. Traduzca los siguientes argumentos y dé una prueba de su validez por tablas semánticas, árboles semánticos y resolución.

    ❶ Todos los físicos son matemáticos. Jorge no es matemático. Por lo tanto, Jorge no es físico.

    ❷ Los únicos animales que tienen plumas son los pájaros. Todos los pájaros cantan. Por lo tanto, ningún animal que no cante tiene plumas.

    ❸ Sólo los fantasmas viven en la casa embrujada. Ningún fantasma feliz es inteligente. Ningún fantasma es feliz. En consecuencia, cualquiera que viva en una casa embrujada es inteligente o es infeliz.

    ❹ Hombres que son atletas son fanáticos del futbol y del beisbol. Los atletas que son fanáticos del beisbol son fanáticos del futbol. Cualquiera que no sea atleta es un hombre que es fanático del beisbol. Por lo tanto, todos los hombres son fanáticos del beisbol y viceversa.

    ❺ Cualquier mujer que acompaña a un niño a la reunión es una madre. Luisa acompaña a Alejandro a cuanta reunión hay. Por consiguiente, si Luisa es una mujer, Alejandro es un niño y m es una reunión, Luisa es una madre.

    ❻ Cualquiera que aprecie a los abogados es extrovertido. Sólo los introvertidos aprecian a todo extrovertido. Los abogados aprecian a los abogados y los extrovertidos aprecian a los extrovertidos. Por consiguiente, todos los abogados son introvertidos.

29. Suponga que R es un 2-predicado. Interpretar R en un conjunto A se convierte en una relación binaria en A, cuyos elementos son parejas (a, b) con $a, b \in A$. El dominio de R es la colección $\{(a, b)\exists\, b((a, b) \in R\}$, mientras que la imagen de R es el conjunto $\{(b \in A : \exists\, a((a, b) \in R\}$. Suponga que $D(x) \equiv x$ está en el dominio de R y que el dominio de R está contenido en su imagen.

- R es reflexiva en D si y sólo si $\forall x(D(x) \to R(x,x))$.
- R es irreflexiva en D si y sólo si $\forall x(D(x) \to \neg R(x,x))$.
- R es simétrica en D si y sólo si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \to R(y,x))$.
- R es asimétrica en D si y sólo si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \to \neg R(y,x))$.
- R es antisimétrica en D si y sólo si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y))$.
- R es transitiva en D si y sólo si $\forall x \forall y \forall z(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \to (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$.
- R es una relación de equivalencia en D si R es reflexiva, simétrica y transitiva en D.
- R es un orden parcial en D si y sólo si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva en D.
- R es conexa en D si y sólo si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \vee R(y,x) \vee x = y))$.
- R es un orden lineal en D si y sólo si R es conexa y es un orden parcial en D.

Dé una prueba por tablas semánticas de las siguientes afirmaciones (suponga que las variables viven en D):

① Si R es asimétrica en D, entonces R es irreflexiva en D.

② Si R es transitiva e irreflexiva en D, entonces es asimétrica en D.

③ Si R es un orden lineal en D, y x, y son elementos distintos de D, entonces $R(x,y)$ o $R(y,x)$ pero no ambos.

④ Si R es reflexiva en D y S es una relación binaria en D tal que

$$\forall x \forall y \forall z(S(x,y) \to (R(x,z) \to R(y,z)),$$

entonces

$$\forall x \forall y(S(x,y) \to R(y,x)).$$

⑤ Si E es una relación de equivalencia en D, entonces

$$\forall x \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(x,z) \to E(y,z).$$

⑥ Si R es conexa en D y E es una relación de equivalencia en D tal que

$$\forall x \forall y(E(x,y) \wedge R(x,y) \to R(y,x),$$

entonces

$$\forall x \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge x \neq z \to R(x,z).$$

⑦ Si R es reflexiva en D, S es una relación binaria en D y f es una función de D en D tal que

$$\forall x \forall y \forall z[S(x,y) \rightarrow (R(f(x),z) \leftrightarrow R(f(y),z)],$$

entonces

$$\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow R(f(x),f(y))).$$

30. Muestre que los siguientes conjuntos de enunciados son inconsistentes dando una prueba de una contradicción mediante tablas semánticas.

❶ $\{\forall x(Q(x) \rightarrow P(x)), \forall x(\neg Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x \neg R(x), \neg \forall x P(x)\}$.

❷ $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)), \forall x(S(x) \rightarrow \neg R(x)), \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x))\}$.

❸ $\{\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x) \vee R(x)), \forall x(Q(x) \leftrightarrow \neg S(x)), \forall x(R(x) \leftrightarrow \neg T(x)), \forall x (P(x) \leftrightarrow S(x) \wedge T(x))\}$.

❹ $\{\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow R(x,y)), P(b), Q(a), \neg R(a,b)\}$.

❺ $\{P(a) \wedge S(a), Q(f(a)) \wedge R(a,f(a)), \forall x[S(x) \rightarrow \forall y(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow \neg R(x,y))]\}$.

❻ $\{\forall x[P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow R(x,y))], \forall x(T(x) \rightarrow Q(x)), \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)), P(a) \wedge S(b) \wedge T(c) \wedge \neg R(a,b), \forall x(S(x) \rightarrow R(c,x))\}$.

❼ $\{\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(x,y) \rightarrow R(x,y)), \forall x(S(x) \rightarrow P(x)), \forall x[S(x) \rightarrow \forall y (Q(x,y) \rightarrow T(x,y)], \forall x(R(x,b) \rightarrow \neg T(x,b)), S(a) \wedge Q(a,b)\}$.

❽ $\{\forall x[\forall y(P(y) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow Q(a) \wedge \neg S(x,a)], \forall x \forall y(P(y) \rightarrow R(x,y)), \forall x \forall y (Q(y) \rightarrow S(x,y))\}$.

❾ $\{\forall x \forall y[P(y) \wedge Q(x,y) \rightarrow \forall z(S(z) \wedge \neg R(x,z))], P(a), Q(b,a), R(b,a)\}$.

31. Repita el ejercicio 30, pero esta vez para probar que los conjuntos dados son inconsistentes muestre que no son satisfacibles mediante resolución.

32. Dé una prueba por tablas y por resolución de los siguientes argumentos válidos:

① Premisas: $\forall x(A(x) \wedge B(x) \rightarrow C(x))$, $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$;
conclusión $\exists x(\neg A(x))$.

② Premisas: $\forall x(\neg A(x) \rightarrow B(x)), \forall x(\neg B(x) \vee C(x))$, $\exists x(\neg C(x)) \wedge \exists x C(x)$; conclusión $C(a) \vee \exists x A(x)$.

③ Premisas: $\forall x(P(x) \vee Q(x) \vee R(x))$, $\forall x(P(x) \rightarrow \neg S(x))$, $\neg R(a) \wedge S(a)$; conclusión $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$.

④ Premisas: $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(x,y))$, $\exists x(A(x) \wedge C(a,x))$, $\exists x (B(x) \wedge \neg C(a,x))$; conclusión $\exists x(\neg A(x))$.

⑤ Premisas: $\exists x A(x)$, $\exists x B(x)$, $\forall x[A(x) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow C(x,y))]$; conclusión $\exists x \exists y C(x,y)$.

⑥ Premisas: $\exists x[P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow R(x,y))]$, $\forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \rightarrow S(y))$, $\forall x(S(x) \rightarrow Q(x))$; conclusión $\forall x(Q(x) \leftrightarrow S(x))$.

⑦ Premisas: $\forall x \forall y(J(x) \wedge \neg K(y) \rightarrow L(x,y))$, $\exists x[J(x) \wedge \forall y(M(y) \rightarrow \neg L(x,y)]$; conclusión $\forall x(M(x) \rightarrow K(x))$.

⑧ Premisas: $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge R(x,y) \rightarrow Q(y,a)]$, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x,a))$, $\exists x$ $(\neg P(x) \wedge Q(x,a))$; conclusión $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg R(x,y))$.

33. Traduzca y demuestre mediante tablas semánticas los siguientes argumentos válidos.

❶ Venados y ovejas graznan. Los animales que graznan no son de rapiña. Ningún animal de rapiña come carne. Por lo tanto, ningún venado come carne.

❷ Todas las funciones que son diferenciables son continuas. No todas las funciones integrables son continuas. Por consiguiente, no todas las funciones integrables son diferenciables.

❸ Existe un doctor que aborrece a todos los administradores. Cualquiera que aborrezca a los doctores es un hipocondriaco. En consecuencia, todos los administradores son hipocondriacos.

❹ Cualquier hombre que quiere a una mujer tiene una mujer que lo quiere. Cualquier hombre que tiene una mujer que lo quiera, se quiere a sí mismo. Ningún hombre se quiere a sí mismo. Por lo tanto, ningún hombre quiere a una mujer.

❺ Una matriz simétrica es positivo-definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos. Algunas matrices no son simétricas. Algunas matrices tienen valores propios que no son positivos. Toda matriz simétrica positivo-definida tiene un determinante positivo. Por consiguiente, toda matriz simétrica cuyos valores propios son positivos tiene un determinante positivo.

❻ Un conjunto es abierto si y sólo si contiene una vecindad de cada uno de sus puntos. Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto. El complemento de un conjunto es un conjunto. En consecuencia, cualquier conjunto cuyo complemento contiene una vecindad de cada uno de sus puntos es cerrado.

❼ Las rectas paralelas que no son idénticas no se intersecan. Si dos rectas son paralelas, no tienen puntos en común o todos sus puntos son comunes. Dos rectas que tienen todos sus puntos en común se intersecan. Por lo tanto, dos rectas paralelas que no son idénticas no tienen puntos en común.

❽ Las funciones tienen una gráfica suave si y sólo si no hay rompimiento o bordes agudos en sus gráficas. Si la gráfica de una función no tiene un rompimiento, la función es continua. Por consiguiente, las funciones que tienen gráfica suave son continuas.

34. Para cada uno de los siguientes argumentos, si es válido, demuéstrelo por resolución; de lo contrario, encuentre una estructura que atestigüe su invalidez.

① Cualquiera que resuelva las preguntas más difíciles de un examen también resuelve la pregunta más sencilla del examen. En algún examen Óscar resolvió la pregunta más difícil. En consecuencia, Óscar resolvió la pregunta más sencilla en algún examen.

② Los genios resuelven cada problema en un examen. Cualquiera que resuelva un problema en un examen es un estudiante. Matilde resuelve cada problema en cada examen. Por lo tanto, si Matilde es un genio, es una estudiante.

③ Premisas: $\forall x(A(x) \to C(x))$, $\forall x(B(x) \to D(x))$, $\exists x(A(x))$, $\exists x \neg D(x)$; conclusión $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$.

④ Premisas: $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$, $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x) \wedge D(x))$; conclusión $\exists x$ $(A(x) \wedge D(x))$.

⑤ Premisas: $\exists x[E(x) \wedge \forall y(F(y) \to G(x,y))]$, $\forall x \forall y[E(x) \to (G(x,y) \leftrightarrow H(y)]$; conclusión $\forall x(F(x) \leftrightarrow H(xx))$.

⑥ Premisas: $\forall x[A(x) \to (B(x) \to C(x))]$, $\exists x(A(x) \wedge C(x))$, $\forall x[B(x) \to (A(x) \to \neg C(x))]$; conclusión $\exists x(A(x) \wedge B(x))$.

⑦ Premisas: $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$, $\forall x R(x,x)$, $\forall x \forall y \exists z(R(x,z) \wedge R(y,z))$; conclusión $\forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$.

35. Use una resolución para probar que los siguientes enunciados son tautologías.

a) $(\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \forall x(Q(x,x) \to \exists y R(y,x))) \to \exists y \exists x R(x,y)$.

b) $(\exists x \forall y R(x,y)) \leftrightarrow (\neg \forall x \exists y \neg R(x,y))$.

c) $(\forall x((P(x) \to Q(x)) \to \forall y R(x,y)) \wedge \forall y(\neg R(a,y) \to \neg P(a))) \to R(a,b)$.

36. Sean $\mathcal{L} = \{E\}$, E un símbolo de 2-predicado y Φ el conjunto de los siguientes tres enunciados: $\forall x E(x,y)$, $\forall x \forall y(E(x,y) \to E(y,x))$, $\forall x \forall y \forall z((E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)))$. Mediante resolución, derive $\forall x(E(x,y) \leftrightarrow E(x,z))$ a partir de

$$\Phi \cup \{\exists x(E(x,y) \wedge E(x,z))\}.$$

37. Refiérase a la prueba del lema 1.8.11.

(a) Pruebe que si $C = \{l\}$, $\mathcal{C} = \{C\}$.

(b) Demuestre que si $C = \{l\}$, Φ_l es es mínimo no satisfacible.

38. Un refinamiento de resolución se conoce como P-resolución y requiere que uno de los padres contenga sólo literales positivas. Sea φ un enunciado en FNS. Pruebe que φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar de φ mediante P-resolución.

39. Otro refinamiento de resolución es una T-resolución que requiera que ninguno de los padres sea una tautología. Sea φ un enunciado en FNS. Muestre que φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar a partir de φ mediante una T-resolución.

40. Sean φ una fórmula de la lógica proposicional en FNC y $\mathcal{A}$ una asignación definida en las subfórmulas de φ. Por $\mathcal{A}$-resolución entendemos el refinamiento de resolución que requiere $\mathcal{A}(C) = F$ para alguno de los padres. Muestre que φ no es satisfacible si y sólo si $\square$ se puede derivar de φ mediante $\mathcal{A}$-resolución.

41. Para la siguiente fórmula σ, encuentre σ_E y muestre que es satisfacible dando un modelo de Herbrand para σ_E.

$$\sigma \equiv \forall x \forall y(x * y = y * x) \wedge \forall x(f(x) * x = a) \rightarrow \forall x \exists y(x * y = a).$$

42. Para las siguientes fórmulas, si son satisfacibles haga lo mismo que en el ejercicio previo; de lo contrario, muestre que no son satisfacibles mediante el método de Herbrand.

    a) $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge \exists x(A(x) \wedge x = a) \rightarrow \exists x(B(x) \wedge x = a))$.

    b) $\exists y \forall x(F(x) \leftrightarrow x = y) \wedge \exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$.

    c) $\forall x \forall y(f(x) = y) \rightarrow \forall x \forall y(x = y)$.

    d) $\exists x \exists y(x \neq y) \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \rightarrow \exists x \exists y(P(y) \wedge \neg Q(y) \wedge x \neq y)$.

    e) $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \leftrightarrow x = y)] \leftrightarrow \exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow x = y)$.

    f) $\forall x \forall y(x * y = b \rightarrow y = g(x)) \rightarrow \forall x \exists y(x * y = b)$.

43. Sea $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{f\}$, donde f es un símbolo de 1-función. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Φ_n el enunciado

$$\exists x_1 \cdots x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right),$$

que asegura la existencia de al menos n elementos.

Sea φ_1 el enunciado

$$\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y)),$$

cual asegura que f es inyectiva. Por último, considere el enunciado φ_2

$$\forall y \exists x(f(x) = y),$$

que declara que f es sobre.

    a) Mediante tablas semánticas, demuestre que $\{\varphi_1, \neg\varphi_2, \Phi_n\} \vdash \Phi_{n+1}$.

    b) Muestre que φ_1 tiene un modelo de Herbrand, pero no lo tienen φ_2 ni la FNS de φ_2.

44. Considere un lenguaje consistente en un símbolo de 2-relación R y uno de 1-

función f. Tenemos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \equiv &\forall v_0(\exists v_1 R(v_0, v_1) \to R(v_0, f(v_0))).\\ \varphi_2 \equiv &\forall v_0 \exists v_1 r(v_0, v_1).\\ \varphi_3 \equiv &\exists v_0 r(ff(v_0), v_0).\\ \varphi_4 \equiv &\exists v_0 \exists v_1 \exists v_2 (R(v_0, v_1) \wedge R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_0)).\end{aligned}$$

Mediante resolución, muestre que φ_4 es una consecuencia, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

45. El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en tres símbolos de 1-relación P, R y S, un símbolo de 2-relación binaria Q y un símbolo de 1-función f. Aplique una resolución en dos formas diferentes a las dos siguientes cláusulas:

$$\begin{aligned}&S(v_0) \to (P(v_0) \vee R(v_0))\\ &(P(v_0) \wedge P(f(v_1))) \to Q(v_0, v_1).\end{aligned}$$

46. En el lenguaje del ejercicio previo, añada funciones de Skolem al lenguaje, transforme las siguientes fórmulas y use resolución para probar que el conjunto no es satisfacible:

$$\begin{aligned}&\exists v_0 \forall v_1 (P(v_0) \wedge (R(v_1) \to Q(v_0, v_1))\\ &\forall v_0 \forall v_1 (\neg P(v_0) \vee \neg S(v_1) \vee \neg Q(v_0, v_1))\\ &\exists v_1 (R(v_1) \wedge S(v_1)).\end{aligned}$$

47. Sea S un conjunto de 7 cláusulas tales que al menos tres variables proposicionales distintas ocurren en cada una de ellas. Muestre que S es satisfacible.

48. Demuestre la proposición 1.4.13 y los corolarios 1.4.14 y 1.4.15 directamente de los resultados de la lógica proposicional. [Sugerencia: Note que $\mathfrak{H}^{\Phi}$ es la estructura de Herbrand asociada con la asignación $\mathcal{A}^{\Delta}$ para $\Delta = \iota[E(\Phi)]$.]

49. Suponga que $\forall \vec{x}\psi$ es un $\mathcal{L}$-enunciado con ψ sin cuantificadores. Demuestre que para toda $\mathcal{L}$-estructura de Herbrand $\mathfrak{A}$,

    a) $\mathfrak{A} \models \forall \vec{x}\psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos.

    b) $\mathfrak{A} \models \exists \vec{x}\psi$ si y sólo si existen $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-términos tales que $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{x}/\vec{t})$.

50. Consideremos los siguiente hechos.

    ❀ Sara es la madre de Marga.

    ❀ Sara está viva.

    ❀ Si x es la madre de y, entonces x es uno de los padres de y.

    ❀ Si x es uno de los padres de y y x está viva, entonces x es más vieja que y.

Mediante resolución averigüe ¿Quién es más joven que Sara? y ¿Quién es más viejo que quién?

2

Sistemas axiomáticos

En el capítulo 1 se revisaron varios métodos de prueba suceptibles de aplicarse en una computadora o al menos más próximos a un algoritmo. En este capítulo presentamos dos sistemas axiomáticos; los sistemas axiomáticos son más cercanos al quehacer matemático cotidiano, pero es un apartado quizá difícil pero necesario, al menos para quienes tienen la intención de entender a cabalidad la noción de prueba. No obstante, es importante señalar que aquellos lectores interesado en teoría de modelos de primer orden, pueden prescindir de la lectura de los sistemas de prueba, pues los teoremas fundamentales de la lógica mencionados se pueden demostrar sin recurrir a esta teoría . Por otro lado, cuando nos movemos un poco mas de allá de la lógica de primer orden por ejemplo en lógicas infinitarias y, en general, en lógicas abstractas, aparece en forma natural la necesidad de emplear sistemas de prueba. También es importante señalar que es conveniente que el lector cuente con experiencia previa en el sistema de Hilbert en la lógica proposicional, si pretende estudiar este sistema.

Trataremos los sistemas de Hilbert y de deducción natural. Primero analizamos los sistemas de Hilbert y presentamos algunas pruebas formales en este sistema; después demostramos la correctud del sistema, mientras que su completud se exhibe con base en la deducción natural. Para finalizar describimos los teoremas, que junto con el de completud, constituyen los resultados más importantes de la lógica de primer orden: los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad. En este capítulo supondremos que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ indica, como siempre, que $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de la fórmula φ, aunque realmente no aparezcan todas, y que $x_1, \ldots, x_n$, en caso de aparecer, sólo lo hacen como variables libres; esto, por supuesto, para cualquier fórmula φ.

He aquí el relato que solían decir los viejos: «En un cierto tiempo que ya nadie puede contar, del que ya nadie puede ahora acordarse... quienes aquí vinieron a sembrar a los abuelos, a las abuelas, éstos, se dice, llegaron, vinieron, siguieron el camino, vinieron a terminarlo, para gobernar aquí en esta tierra, que con un solo nombre era mencionada, como si se hubiera hecho esto un mundo pequeño».

Por el agua en sus barcas vinieron, en muchos grupos, y allí arribaron a la orilla del agua, a la costa norte, y allí donde fueron quedando sus barcas, se llama Panutla, quiere decir, por donde se pasa encima del agua, ahora se dice Panutla (Pánuco). En seguida siguieron la orilla del agua, iban buscando los montes, algunos los montes blancos y los montes que humean, llegaron a Quauhtemalla (Gautemala), siguiendo la orilla del agua.

Además no iban por su propio gusto, sino que sus sacerdotes los guiaban, y les iba mostrando el camino su dios. Después vinieron, allá llegaron, al lugar que se llama Tamoanchan, que quiere decir «nosotros buscamos nuestra casa».

Y en el lugar llamado Tamoanchan largo tiempo hubo señorío: después pasó el señorío al lugar llamado Xomiltepec y allí en Xomiltepec se convocaron los señores, los ancianos, los sacerdotes. Dijeron: «El dueño del cerca y del junto nos ha llamado, ha llamado a cada uno de los que lo tienen por dios». Dijeron «Porque no viviremos aquí, no permaneceremos aquí, vamos a buscar una tierra. Allá vamos a conocer al que es Noche y Viento, al Dueño del cerca y del junto».

2.1 El sistema de Hilbert $\mathfrak{H}$

El sistema de Hilbert $\mathfrak{H}$ para la lógica de primer orden consiste en axiomas y reglas de inferencia. En lo sucesivo, $\mathcal{L}$ es un lenguaje formal. Primero los axiomas. Para cualesquier fórmulas φ, ψ, γ, variable x y término t tenemos los siguientes axiomas.

- Axioma 1 $\vdash_{\mathfrak{H}} (\varphi \to (\psi \to \varphi))$.
- Axioma 2 $\vdash_{\mathfrak{H}} ((\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$.
- Axioma 3 $\vdash_{\mathfrak{H}} (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.
- Axioma 4 $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \varphi_x(t)$ para todo $\mathcal{L}$-término t tal que $sust(\varphi, t, x)$, es decir, al sustituir t por toda aparición libre de x en φ, ninguna variable de t se vuelve acotada en φ. Note que $t = x$ es aceptable, por lo que tenemos axiomas de la forma $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$.
- Axioma 5 $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\psi(x))$ siempre que x no sea libre en φ.

Las reglas de inferencia.

- Modus Ponens (MP) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$.
- Generalización (Gen) $\varphi(t) \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$.

Es importante notar la diferencia entre el axioma 4 y la regla de generalización. El axioma 4 implica que cualquier aparición de $\forall x\varphi(x)$ se puede remplazar por $\varphi(t)$ para cualquier $\mathcal{L}$-término t siempre que $sust(\varphi, t, x)$, en cambio, la generalización justifica que si $\varphi(t)$ aparece en una fórmula, podemos acotar toda aparición de t mediante un cuantificador. La justificación radica en la semántica de $\forall$, puesto que $\forall x\varphi(x)$ requiere que se cumpla φ para toda x y dado que la interpretación de t puede cambiar, ser, en cierto sentido, arbitraria, podemos remplazar $\varphi(t)$ por $\forall x\varphi(x)$. Hemos enunciado la regla Gen de esta forma, porque es ligeramente más intuitiva. Sin embargo, puede ocurrir un inconveniente con la regla de generalización en presencia de hipótesis. Suponga que se aplica generalización a $\varphi(c) \vdash \varphi(c)$, para obtener $\varphi(c) \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$. Ahora considere el lenguaje $\mathcal{L} = \{P, c\}$, donde P es un 1-predicado y c un símbolo de constante. Sea $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, P^{\mathfrak{Z}}, 2\rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura, donde $P^{\mathfrak{Z}}(x) \equiv x$ es par. Es claro que $\mathfrak{Z} \models P(c)$, pero $\mathfrak{Z} \not\models \forall xP(x)$. En consecuencia, si no tenemos cuidado o ponemos restricciones, la generalización no es correcta. La regla de generalización con hipótesis se debe modificar como sigue:

Generalización (Gen). Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(c)$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$ siempre que c no aparezca en Φ.

Definición 2.1.1. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas (que puede ser vacío) y φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Una prueba de φ a partir de Φ, en símbolos $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$, es una sucesión $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ (una sucesión finita) de $\mathcal{L}$-fórmulas tales que $\theta_n \equiv \varphi$ (de hecho, permitiremos que existan θ_l, $l > n$, en la sucesión, siempre y cuando aparezca φ como alguna θ_j) y cada θ_i ($i \leq n$) es un axioma, o $\theta_i \in \Phi$ o se infiere de θ_j, θ_k ($j, k < i$) mediante MP o Gen. Si existe una prueba de φ a partir de Φ, decimos que φ es demostrable a partir de Φ, lo cual denotamos mediante $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.

Nuestro primer paso en el sistema de Hilbert es mostrar que podemos aplicar la regla de deducción. Para ello requerimos algunos preparativos.

Definición 2.1.2. Sea Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, $\psi \in \Gamma$ y supongamos que tenemos una prueba $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a partir de Γ. Decimos que θ_i depende de ψ en esta prueba, si ocurre lo siguiente.

1. θ_i es ψ y la justificación de θ_i es que pertenece a Γ, o
2. θ_i se justifica por MP o Gen en fórmulas previas θ_j, θ_k en la sucesión, donde al menos una de estas θ_j, θ_k depende de ψ en el sentido de (1).

Ejemplo 2.1.3.

$$\{\psi, \forall x\psi \to \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi.$$

θ_1 ψ Hipótesis.

θ_2 $\forall x\psi$	θ_1 Gen.
θ_3 $\forall x\psi \to \varphi$	Hipótesis.
θ_4 φ	MP θ_2, θ_3.
θ_5 $\forall x\varphi$	θ_4 Gen.

Aquí θ_1 depende de ψ, θ_2 depende de ψ, θ_3 depende de $\forall x\psi \to \varphi$, θ_4 depende de ψ y $\forall x\psi \to \varphi$, θ_5 depende de ψ y $\forall x\psi \to \varphi$.

Proposición 2.1.4. *Si φ no depende de ψ en una prueba de $\{\Gamma, \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.*

Demostración. Sea $\theta_1, \ldots, \theta_n$ una prueba de φ a partir de Γ y ψ en la que φ no depende de ψ. Podemos suponer que $\theta_n \equiv \varphi$. Procedemos por inducción en n y como hipótesis de inducción suponemos que el resultado es cierto para toda prueba de longitud menor que n. Si $\varphi \in \Gamma$ o es un axioma, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$. Si φ es una consecuencia de una o dos fórmulas previas θ_i, θ_j mediante Gen o MP, como φ no depende de ψ, tanto θ_i como θ_j son independientes de ψ. Por hipótesis de inducción, θ_i, θ_j se pueden demostrar a partir de Γ. En consecuencia, φ se demuestra a partir de Γ. ∎

 **Teorema 2.1.5.** *[Deducción] Suponga que $\{\Gamma, \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ y que en una demostración de este hecho, siempre que apliquemos generalización sobre una fórmula γ que depende de ψ, esto es: $\gamma(t) \vdash_{\mathfrak{H}} \forall y\gamma(y)$, se cumple que y no es libre en ψ. Entonces*

$$\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \varphi.$$

Demostración. Sea $\theta_1, \ldots, \theta_n$ una prueba de φ a partir de Γ y ψ que cumple con las hipótesis del teorema. Podemos suponer que $\theta_n \equiv \varphi$. Probaremos por inducción que $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$ para cada $i \leq n$. Si θ_i es un axioma o pertenece a Γ, entonces $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$, ya que $\theta_i \to (\psi \to \theta_i)$ es un axioma. Si $\theta_i \equiv \psi$, como $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \psi$ es un teorema (cálculo proposicional [FeVi09]), deducimos $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$. En caso de existir $j, k < i$ tales que $\theta_k \equiv \theta_j \to \theta_i$, por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_j$ y $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to (\theta_j \to \theta_i)$. Por el axioma A2, $\vdash_{\mathfrak{H}} (\psi \to (\theta_j \to \theta_i)) \to ((\psi \to \theta_j) \to (\psi \to \theta_i))$. Usamos MP dos veces para obtener $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$. Finalmente, suponga que existe $j < i$ tal que θ_i es $\forall z\theta_j$. Por hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_j$ y por las hipótesis del teorema, θ_j no depende de ψ o z no es libre en ψ. En el caso en que θ_j no dependa de ψ, por la proposición 2.1.4, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \theta_j$ así que por Gen $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \forall z\theta_j$, de donde se deduce $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \theta_i$. Por el axioma A1, $\vdash_{\mathfrak{H}} \theta_i \to (\psi \to \theta_i)$, así que $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$ por MP. Por otra parte, si z no es libre en ψ, por el axioma A5,

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall z(\psi \to \theta_j) \to (\psi \to \forall z\theta_j).$$

Como $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_j$, por Gen $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \forall z(\psi \to \theta_j)$ y por MP $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \forall z\theta_j$, esto es, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \theta_i$, lo que completa la inducción y ofrece el resultado cuando $i = n$. ∎

Corolario 2.1.6. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Presupongamos que $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$ y que para la derivación de ψ a partir de $\Phi \cup \{\varphi\}$ no se usa generalización sobre variables libres de φ, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \psi$.* ❐

Corolario 2.1.7. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ un $\mathcal{L}$-enunciado, ψ una $\mathcal{L}$-fórmulas y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Presuma que $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \psi$.* ❐

Es importante notar que en los tres últimos resultados, la prueba de $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \psi$ involucra una aplicación de generalización a una fórmula que depende de una fórmula $\sigma \in \Phi$ sólo si teníamos una aplicación de generalización en la prueba $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$ que implique la misma variable cuantificada y se aplique a una fórmula que dependa de σ. En la prueba del teorema 2.1.5, se debe observar que θ_j depende de una premisa γ de Φ en la prueba original si y sólo si $\varphi \to \theta_j$ depende de γ en la prueba nueva.

Ejemplo 2.1.8. Demuestre

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \varphi \to \forall y \forall x \varphi.$$

1. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \varphi$ Hipótesis.
2. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \varphi \to \forall y \varphi$ Axioma 4.
3. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y \varphi$ MP 1,2.
4. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y \varphi \to \varphi$ Axioma 4.
5. $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ MP 3,4.
6. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi$ Gen 5.
7. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y \forall x \varphi$ Gen 6.

En 1-7 tenemos $\forall x \forall y \varphi \vdash_{\mathfrak{H}} \forall y \forall x \varphi$ y no hemos usado generalización sobre una variable libre de $\forall x \forall y \varphi$. Así que según el corolario 2.1.6, concluimos

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \varphi \to \forall y \forall x \varphi.$$

Del axioma 4 y de MP se deduce que si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi(x)$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t)$ para cualquier $\mathcal{L}$-término t.

Ejemplo 2.1.9. Verifique que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t) \to \exists x \varphi(x).$$

1. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \neg \varphi(x) \to \neg \varphi(t)$ Axioma 4.
2. $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)$ Contrapositiva (proposicional [FeVi09])) 1.
3. $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$ Definición de $\exists$.

Ejemplo 2.1.10. Compruebe que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi(x) \to \exists x \varphi(x).$$

1. $\forall x \varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi(x)$ Hipótesis.
2. $\forall x \varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t)$ Axioma 4.
3. $\forall x \varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$ Ejemplo 2.1.9.
4. $\forall x \varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \varphi(x)$ MP 2,3.
5. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi(x) \to \exists x \varphi(x)$ Deducción.

Ejemplo 2.1.11. Cerciórese de que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)).$$

1. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi(x)$ Hipótesis.
2. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t)$ Axioma 4.
3. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$ Hipótesis.
4. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t) \to \psi(t)$ Axioma 4.
5. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi(t)$ MP 2,4.

6. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi(x)$ — Gen[1] en 5.
7. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x)$ — Deducción.
8. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$ — Deducción.

Ejemplo 2.1.12. Del ejemplo 2.1.11 se sigue directamente que si $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(x) \to \psi(x)$, entonces $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x)$.

Ejemplo 2.1.13. Constate que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\forall y\varphi(x,y) \to \forall y\exists x\varphi(x,y).$$

1. $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(a,b) \to \exists x\varphi(x,b)$ — Ejemplo 2.1.9.
2. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y\varphi(a,y) \to \forall y\exists x\varphi(x,y)$ — Gen 1 y ejemplo 2.1.11.
3. $\vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall y\exists x\varphi(x,y) \to \neg\forall y\varphi(a,y)$ — Contrapositiva 2.
4. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\neg\forall y\exists x\varphi(x,y) \to \neg\forall y\varphi(x,y))$ — Gen 3.
5. $\vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall y\exists x\varphi(x,y) \to \forall x\neg\forall y\varphi(x,y)$ — Axioma 5.
6. $\vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg\forall y\varphi(x,y) \to \forall y\exists x\varphi(x,y)$ — Contrapositiva 5.
7. $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\forall y\varphi(x,y) \to \forall y\exists x\varphi(x,y)$ — Definición de $\exists$.

Ejemplo 2.1.14. Compruebe que

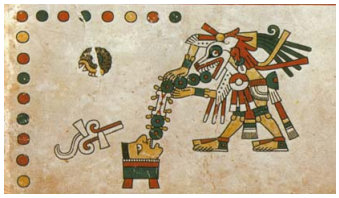
$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi(x)),$$

cuando x no es libre en φ.

1. $\{\varphi \to \forall x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \forall x\psi(x)$ — Hipótesis
2. $\{\varphi \to \forall x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi(x) \to \psi(t)$ — Axioma 4.

[1]Sobre una variable que no es libre en $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$.

3. $\{\varphi \to \forall x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \psi(t)$ Transitividad [FeVi09]) 1,2.
4. $\{\varphi \to \forall x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x))$ Gen 3.
5. $\vdash_{\mathfrak{H}} (\varphi \to \forall x\psi(x)) \to \forall x(\varphi \to \psi(x))$ Deducción
6. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \forall x\psi(x))$ Axioma 5.
7. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi(x))$ Definición de $\leftrightarrow$.



Ejemplo 2.1.15. Pruebe que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \exists x\psi(x)),$$

donde x no es libre en φ.

1. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi \vee \exists x\psi(x)$ Definición de $\vee$ en términos de $\to$.
2. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi \wedge \neg\exists x\psi(x))$ De Morgan.
3. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi \wedge \forall x\neg\psi(x))$ Definición de $\exists$
4. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi \wedge \exists x\neg\psi(x))$ Ejemplo 2.1.10.
5. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi \vee \neg\exists x\neg\psi(x)$ De Morgan
6. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \forall x\psi(x)$ Definición de $\vee$
7. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi(x))$ Ejemplo 2.1.14.
8. $\{\varphi \to \exists x\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\varphi \to \psi(x))$ Ejemplo 2.1.10.
9. $\{\exists x(\varphi \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg(\neg\varphi \vee \psi(x))$ Definición de $\exists$ y $\vee$.
10. $\{\exists x(\varphi \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x(\varphi \wedge \neg\psi(x))$
11. $\{\exists x(\varphi \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi \wedge \forall x\neg\psi(x))$ Axioma 5.
12. $\{\exists x(\varphi \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi \vee \neg\forall x\neg\psi(x)$

13. $\{\exists x(\varphi \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \exists x\psi(x)$
14. $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to \exists x\psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi(x))$ Definición de $\leftrightarrow$ y deducción.

Ejemplo 2.1.16. Confirme que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y).$$

1. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$ Axioma 4.
2. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y(\forall x\varphi(x) \to \varphi(y))$ Gen 1.
3. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \forall y\varphi(y)$ Axioma 5.
4. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall y\varphi(y) \to \forall x\varphi(x)$ En forma similar.
5. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)$ Definición de $\leftrightarrow$.

Ejemplo 2.1.17. Muestre que

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \to \psi),$$

donde x no es libre en ψ.

1. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi)$ Hipótesis.
2. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\neg\psi \to \neg\varphi(x))$ Axioma A4, contrapositiva y generalización.
3. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \forall x\neg\varphi(x)$ Axioma 5.
4. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg\varphi(x) \to \psi$ Contrapositiva 3.
5. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi(x) \to \psi$ Definición de $\exists$.

6. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\varphi(x) \to \psi)$ Deducción.
7. $\{\exists x\varphi(x) \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi(x) \to \psi$ Hipótesis.
8. $\{\exists x\varphi(x) \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg\varphi(x) \to \psi$ Definición de $\exists$.
9. $\{\exists x\varphi(x) \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \forall x\neg\varphi(x)$ Contrapositiva 8.
10. $\{\exists x\varphi(x) \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\neg\psi \to \neg\varphi(x))$ Ejemplo 2.1.14.
11. $\{\exists x\varphi(x) \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi)$ Axioma A4, contrapositiva y Gen.
12. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \to \psi)$ Deducción y definición. de $\leftrightarrow$.

Ejemplo 2.1.18. Si $sust(\varphi(x), t, x)$, cerciórese de que

$$\forall x\varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t).$$

1. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$ Hipótesis.
2. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$ Axioma 4.
3. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(t)$ MP 1,2.

Puesto que siempre tenemos $sust(\varphi(x), x, x)$, un caso particular del ejemplo 2.1.18 es

$$\forall x\varphi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi.$$

Ejemplo 2.1.19. Sea t un término tal que $sust(\varphi(x), t, x)$. Demuestre que

$$\varphi_x(t) \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi(x).$$

1. $\{\varphi_x(t)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(t)$ Hipótesis.
2. $\{\varphi_x(t)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\neg\varphi(x) \to \neg\varphi_x(t)$ Axioma 4.
3. $\{\varphi_x(t)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(t) \to \neg\forall x\neg\varphi(x)$ Contrap. 2.
4. $\{\varphi_x(t)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(t) \to \exists x\varphi(x)$ Definición de $\exists$.
5. $\{\varphi_x(t)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi(x)$ MP 1,5.

Como un caso particular del ejemplo 2.1.19, considere $t = x$; entonces

$$\varphi(x) \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \varphi(x).$$

Lema 2.1.20. *Corrobore que siempre se cumple*

$$\vdash_{\mathfrak{H}} (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi).$$

Demostración.

1.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$	Hipótesis
2.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi$	Hipótesis
3.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \leftrightarrow \psi$	Ejemplo 2.1.18 en 1.
4.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$	Ejemplo 2.1.18 en 2.
5.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$	3,4.
6.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi), \forall x \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \psi$	Gen. 5.
7.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$	Deducción.
8.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \psi \rightarrow \forall x \varphi$	En forma similar.
9.	$\{\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi$	Definición de $\leftrightarrow$.
10.	$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi)$	Corolario 2.1.6.

□

Proposición 2.1.21. *Si ψ es una subfórmula de φ, φ' se origina de φ al remplazar cero o más veces una aparición de ψ en φ por γ y si toda variable libre de ψ o γ que sea una variable acotada de φ está entre $y_1, \ldots, y_k$, entonces*

(a) $\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall y_1 \cdots y_k(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi')$.

(b) Si $\vdash_{\mathfrak{H}} \psi \leftrightarrow \gamma$, *entonces* $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

(c) Si $\vdash_{\mathfrak{H}} \gamma \leftrightarrow \psi$ *y* $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$, *entonces* $\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi'$.

Demostración. (a) Procedemos por inducción en la cantidad de conectivos y cuantificadores en φ. Vale la pena observar que cuando no se remplaza ψ por γ en φ, φ' es φ y hemos terminado en vista de la fórmula lógicamente válida $\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \leftrightarrow \sigma_2)$. Además, si ψ es idéntica a φ y esta ocurrencia de ψ se remplaza por γ, la fórmula a demostrar,

$$[\forall y_1 \cdots y_k(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi'),$$

es derivable (ejercicio). Así que podemos suponer que ψ es una subfórmula propia de φ y que al menos se remplaza una ocurrencia de ψ. Nuestra hipótesis de inducción es que el resultado se cumple para toda fórmula con menos conectivos y cuantificadores que φ.

Caso 1. φ es atómica. Entonces ψ no puede ser subfórmula propia de φ.
Caso 2. $\varphi \equiv \neg\sigma$. Sea $\varphi' \equiv \neg\sigma'$. Por hipótesis de inducción,

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma').$$

Mediante un caso particular de la tautología

$$(\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \leftrightarrow \sigma_3)) \rightarrow (\sigma_1 \rightarrow (\neg\sigma_2 \leftrightarrow \neg\sigma_3))$$

y MP obtenemos

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi').$$

Caso 3. $\varphi \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$. Sea $\varphi' \equiv \sigma_1 \rightarrow \sigma_2'$. Por hipótesis de inducción

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1')$$

y

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\sigma_2 \leftrightarrow \sigma_2').$$

Usamos un caso particular de la tautología

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3)) \wedge (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_4 \leftrightarrow \alpha_5)) \rightarrow \\ &(\alpha_1 \rightarrow [(\alpha_2 \rightarrow \alpha_4) \leftrightarrow (\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_5)])\end{aligned}$$

para obtener

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi').$$

Caso 4. $\varphi \equiv \forall x\sigma$. Sea $\varphi' \equiv \forall x\sigma'$. Por hipótesis de inducción

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall \vec{y}[(\psi \leftrightarrow \gamma) \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma')].$$

La variable x no es libre en $\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)$ porque si lo fuese, sería libre en ψ o γ y como es acotada en φ, sería alguna de las $y_1, \ldots, y_n$ y no sería libre en $\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)$. Si usamos el axioma 5 deducimos

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma) \rightarrow \forall x(\sigma \leftrightarrow \sigma').$$

Por el lema 2.1.20,

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\sigma \leftrightarrow \sigma') \rightarrow (\forall x\sigma \leftrightarrow \forall x\sigma').$$

Por una tautología y MP llegamos a

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)] \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \sigma').$$

(b) De $\vdash_{\mathfrak{H}} \psi \leftrightarrow \psi$ y después de aplicar varias veces Gen llegamos a $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall \vec{y}(\psi \leftrightarrow \gamma)$. Aplicamos (a) y MP para deducir

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$

(c) Mediante (b) y la definición de $\leftrightarrow$.

Sólo en pocas ocasiones hemos trabajado con el cuantificador $\exists$; por cierto, no hemos tratado si podemos elegir «testigos» una vez que sabemos que se cumple, digamos, $\exists x\varphi(x)$. Éste es nuestro próximo asunto. Presuma que hemos probado la fórmula $\exists x\varphi(x)$. por lo que es natural elegir un testigo de este hecho, $\varphi(t)$. Este razonamiento intuitivo puede usarse en una prueba y al final no depender de la elección arbitraria de t.

Por ejemplo, tenemos la intención de probar

$$\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\psi(x).$$

Lo podemos lograr como a continuación.

1. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\varphi(x) \to \psi(x))$ Hipótesis.
2. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$ Hipótesis.
3. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(b) \to \psi(b)$ 1 para alguna b.
4. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(b)$ 2, Ejemplo 2.1.18.
5. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi(b)$ MP 3,4.
6. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x), \forall x\varphi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\psi(x)$ 5 Ejemplo 2.1.19.

Puesto que puede resultar cuando menos dudosa, la elección arbitraria de b en (3), lo indicado es trabajar como a continuación:

1. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi(x)$ Hipótesis.
2. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\neg\psi(x)$ Hipótesis.
3. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(x)$ 1 Ejemplo 2.1.18.
4. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi(x)$ 2 Ejemplo 2.1.18.
5. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi(x) \to \psi(x))$ 3,4 Definición de $\to$.
6. $\{\forall x\varphi(x), \forall x\neg\psi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\neg(\varphi(x) \to \psi(x))$ 5 Gen.
7. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\neg\psi(x) \to \forall x\neg(\varphi(x) \to \psi(x))$ Deducción.
8. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \neg\forall x\neg\psi(x)$ 8 contrapositiva.
9. $\{\forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \exists x\psi(x)$ Definición de $\exists$.
10. $\{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\psi(x)$ MP 9 e hipótesis.

En general, cualquier fórmula que se pueda probar usando una cantidad finita de «elecciones», se puede demostrar también sin tales elecciones. La regla que permite pasar de $\exists x\varphi(x)$ a $\varphi(t)$ se conoce como regla C:

Definición 2.1.22.

$$\Phi \vdash^{C} \varphi$$

si y sólo si existe una sucesión de fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tales que γ_n es φ y se cumple

1. Para cada $i < n$,
   - *a*) γ_i es un axioma, o
   - *b*) $\gamma_i \in \Phi$, o
   - *c*) γ_i se infiere mediante MP o Gen de fórmulas previas en la sucesión, o
   - *d*) existe una fórmula previa $\exists x\psi(x)$ tal que γ_i es $\psi(d)$, donde d es un símbolo de constante nuevo (regla C).
2. Como axioma en 1(a) también se permiten axiomas que impliquen una nueva constante introducida en la sucesión mediante la regla C.
3. No se aplica Gen en una variable que sea libre en alguna fórmula $\exists x\psi(x)$ a la que se le haya aplicado previamente la regla C.
4. La fórmula φ no contiene ninguna de las nuevas constantes introducidas previamente mediante la regla C.

Para que esto funcione, podemos añadir a nuestro lenguaje una cantidad finita de nuevos símbolos de constante. Como justificación de (3) considere el siguiente ejemplo en el que, precisamente, no se atiende (3).

1. $\{\forall x\exists yQ(x,y)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\exists yQ(x,y)$ Hipótesis.
2. $\{\forall x\exists yQ(x,y)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists yQ(x,y)$ 1 Ejemplo 2.1.18.
3. $\{\forall x\exists yQ(x,y)\} \vdash_{\mathfrak{H}} Q(x,d)$ 2 Regla C.
4. $\{\forall x\exists yQ(x,y)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall xQ(x,d)$ 3 Gen.
5. $\{\forall x\exists yQ(x,y)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists y\forall xQ(x,y)$ 4 Ejemplo 2.1.18.

Para cerciorarse de lo erróneo de nuestro procedimiento, estudie el ejemplo a continuación: sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, de suerte que es claro que $\mathfrak{A} \models \forall x\exists yQ(x,y)$, pero $\mathfrak{A} \not\models \exists y\forall xQ(x,y)$. Requerimos el siguiente resultado para justificar la regla *C*.

Ejemplo 2.1.23. Demuestre

$$\vdash_{\mathfrak{H}} (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi),$$

donde x no es libre en ψ.

1. $\{\exists x\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi \to \psi$ Hipótesis
2. $\{\exists x\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \neg\exists x\varphi$ Contrapositiva
3. $\{\exists x\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \forall x\neg\varphi$.
4. $\{\exists x\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\neg\psi \to \neg\varphi)$.
5. $\{\exists x\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi)$.
6. $\{\forall x(\varphi \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi)$ Hipótesis
7. $\{\forall x(\varphi \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\neg\psi \to \neg\varphi)$.
8. $\{\forall x(\varphi \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \forall x\neg\varphi$.
9. $\{\forall x(\varphi \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\forall x\neg\varphi \to \psi$.
10. $\{\forall x(\varphi \to \psi)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi \to \psi$.
11. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi \to \psi) \to \exists x\varphi \to \psi$.
12. $\vdash_{\mathfrak{H}} (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$ Definición de $\leftrightarrow$.

Note que la definición 2.1.22 introduce un sistema distinto a $\mathfrak{H}$. No obstante, es evidente que todo lo que podamos demostrar en $\mathfrak{H}$, lo podemos probar en $\mathfrak{H} + C$. A continuación probaremos que no podemos demostrar más cosas en $\mathfrak{H} + C$ que en $\mathfrak{H}$.

Proposición 2.1.24. *Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados, φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Si $\Phi \vdash^{C} \varphi$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.*

Demostración. Sean $\exists y_1\psi_1(y_1), \ldots, \exists y_k\psi_k(y_k)$ las fórmulas a las que se aplica la regla C, según su orden de aparición, en la prueba de $\Phi \vdash^{C} \varphi$ y $d_1, \ldots, d_k$ las nuevas constantes, respectivamente. Entonces

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_k(d_k)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi.$$

Según la condición (3) de la definición 2.1.22 podemos aplicar el corolario 2.1.6, del cual deducimos

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_k(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi_k(d_k) \to \varphi.$$

Remplazamos d_k en todas partes por una variable z (nueva):

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_{k-1}(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi_k(z) \to \varphi,$$

y por Gen

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_{k-1}(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\psi_k(z) \to \varphi).$$

Así que (ejemplo 2.1.23),

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_{k-1}(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists y_k \psi_k(y_k) \to \varphi,$$

pero

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_{k-1}(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists y_k \psi_k(y_k).$$

En consecuencia, por MP,

$$\{\Phi, \psi_1(d_1), \ldots, \psi_{k-1}(d_{k-1})\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi.$$

Repetimos este procedimiento para eliminar $\psi_{k-1}(d_{k-1}), \ldots, \psi_1(d_1)$ y al final obtenemos

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi.$$

□

Ejemplo 2.1.25. Demostremos

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)).$$

1. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$ Hipótesis
2. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \varphi(x)$ Hipótesis
3. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(d)$ 2 Regla C.
4. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi(d) \to \psi(d)$ 1 Ejemplo 2.1.18.
5. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi(d)$ MP 3,4.
6. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \psi(x)$ 5 Ejemplo 2.1.19.

7. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x\varphi(x)\} \vdash^C ex\psi(x)$ 1-6.
8. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x\varphi(x)\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\psi(x)$ 7 Proposición 2.1.24.
9. $\{\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))\} \vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x)$ 1-8 Corolario 2.1.6.
10. $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x\varphi(x) \to \exists x\psi(x))$ 1-9 Corolario 2.1.6.

Una vez que hemos estudiado en detalle el sistema de Hilbert, es tiempo de preparar el nuevo sistema (que de paso nos servira para probar la completud de $\mathfrak{H}$): deducción natural.

A continuación presentamos una serie de derivaciones en $\mathfrak{H}$, por el momento, no es evidente lo que pretendemos, pero en la siguiente sección, una vez que introduzcamos deducción natural, quedará todo aclarado. En lo sucesivo tenemos un lenguaje $\mathcal{L}$ y las fórmulas implícitas son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Lema 2.1.26. *(i) Supongamos que $\varphi \in \Phi$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.*

(ii) Si $\varphi \equiv t = t$ para algún $\mathcal{L}$-término, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.

(iii) Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_2$.

(iv) Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1$.

(v) Supongamos que $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1$, $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_2$; entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

(vi) Suponga que $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ y $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi$; entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$.

(vii) Supongamos que $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ y $\Phi \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$; entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.

(viii) Suponga que $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi$; entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(t)$.

(ix) Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(y)$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\varphi$ ($y \notin Fr(\Phi) \cup var(\varphi)$).

(x) Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} r = s$ y $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(r)$, entonces $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_x(s)$, donde φ es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica.

(xi) Si $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ y $\Phi \subseteq \Phi'$, entonces $\Phi' \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$.

Demostración. (i) Por definición de $\vdash_{\mathfrak{H}}$.
(ii) Por los axiomas de igualdad.
(iii)

1. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2)$ Definición de $\to$.
2. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi_2 \to (\varphi_1 \to \neg\varphi_2)$ Axioma 1.

3. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2) \to \varphi_2$ Contrapositiva 2.

4. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_2$ MP 1,3.

(iv) Esto es (iii).
(v) Debemos probar que

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2),$$

por definición de $\wedge$.

1. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_1$ Hipótesis

2. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_2$ Hipótesis

3. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to (\varphi_2 \to \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2))$ [FeVi09].

4. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi_2 \to \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2)$ MP 1,3.

5. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\varphi_1 \to \neg\varphi_2)$ MP 2,4.

(vi)

1. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ Hipótesis

2. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi$ Hip.

3. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \to (\varphi \to \neg(\varphi \to \neg\varphi))$ Axioma.

4. $\Phi\neg(\varphi \to \neg\varphi)$ MP 1,2,3.

5. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \wedge \neg\varphi$ Definición de $\wedge$.

6. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \bot$ 5.

7. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \bot \to (\neg\psi \to \bot)$ Axioma.

8. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \bot$ MP.

9. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\bot \to \psi$ Contrapositiva

10. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$ $\neg\bot$ es tautología.

(vii)

1. $\{\Phi, \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ Hipótesis

2. $\{\Phi, \neg\psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ Hipótesis

3. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \to \varphi$ Deducción 1.

4. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \to \varphi$ Deducción

5. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} (\psi \to \varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \varphi)$ Teorema [FeVi09].

6. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} (\neg\psi \to \varphi) \to \varphi$ MP 3,5.

7. $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ MP 4,6.

(viii) Esto es el axioma 4.
(ix) Es una generalización.
(x) Esto se sigue de los axiomas de la igualdad.
(xi) Se sigue de la definición de $\vdash_{\mathfrak{H}}$. ❐

Nuestro próximo objetivo es describir la deducción natural, lo cual se efectúa en la siguiente sección.

En seguida se pusieron en movimiento, todos se pusieron en movimiento: los niñitos, los viejos, las mujercitas, las ancianas. Muy lentamente, muy despacio se fueron, allí vinieron a reunirse en Teotihuacán. Allí se dieron las órdenes, allí se estableció el señorío. Los que se hicieron señores fueron los sabios, los conocedores de las cosas ocultas, los poseedores de la tradición. Luego se establecieron allí los principados...

Y toda la gente hizo adoratorios (Pirámides), al Sol y a la Luna, después hicieron muchos adoratorios menores. Allí hacían su culto y allí se establecían los sumos sacerdotes de toda la gente. Así se decía Teotihuacán, porque cuando morían los señores, allí los enterraban. Luego encima de ellos construían pirámides, que aun ahora están. Una pirámide es como un pequeño cerro, sólo que hecho a mano. Por allí hay agujeros, de donde sacaron las piedras, con que hicieron las pirámides, y así las hicieron muy grandes, las del Sol y la de la Luna. Son como cerros y no es increíble que se diga que fueron hechas a mano, porque todavía entonces en muchos lugares había gigantes...

Y lo llamaron Teotihuacán, porque era el lugar donde se enterraban los señores. Pues según decían: «Cuando morimos, no en verdad morimos, porque vivimos, resucitamos, seguimos viviendo, despertamos. Esto nos hace felices».

Así se dirigían al muerto, cuando moría. Si era hombre, le hablaban, lo invocaban como ser divino, con el nombre de Faisán, si era mujer con el nombre de lechuza, le decían: «despierta, ya el cielo se enrojece, ya se presentó la aurora, ya cantan los faisanes color de llama, las golondrinas color de fuego, ya vuelan las mariposas».

Por esto decían los viejos, quien ha muerto, se ha vuelto un dios. Decían: «se hizo allí dios, quiere decir que murió».

2.2 Deducción natural

Para obtener los axiomas o reglas de inferencia de la deducción natural, quizá lo más adecuado sea extraerlos de la noción de satisfacibilidad.

Teorema 2.2.1. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados, φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas y s, t $\mathcal{L}$-términos. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*
1. (Regla de inicio) Si $\varphi \in \Phi$ o $\varphi \equiv s = s$, entonces $\Phi \models \varphi$.

2. (Regla $\wedge 1$) *Si $\Phi \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \models \varphi_1$.*
3. (Regla $\wedge 2$) *Si $\Phi \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \models \varphi_2$.*
4. (Regla $\wedge 3$) *Si $\Phi \models \varphi_1$ y $\Phi \models \varphi_2$, entonces $\Phi \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.*
5. (Regla por casos) *Si $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ y $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$, entonces $\Phi \models \varphi$.*
6. (Regla de contradicción) *Si $\Phi \models \varphi$ y $\Phi \models \neg\varphi$, entonces $\Phi \models \psi$ para cualquier enunciado ψ.*
7. (Caso particular) *Si $\Phi \models \forall x\varphi$, entonces $\Phi \models \varphi_x(s)$ si $sust(\varphi, x, s)$.*
8. (Generalización) *Si $\Phi \models \varphi_x(y)$ y $y \notin lib(\Phi) \cup var(\varphi)$, entonces $\Phi \models \forall x\varphi$.*
9. (Igualdad) *Si θ es un $\mathcal{L}$-enunciado, $\Phi \models r = s$ y $\Phi \models \theta_x(r)$, entonces $\Phi \models \theta_x(s)$.*
10. (Monotonía) *Si $\Phi \models \varphi$ y $\Phi \subseteq \Phi'$, entonces $\Phi' \models \varphi$.*

Demostración. Todos los incisos se desprenden de la definición de consecuencia lógica y de los axiomas de igualdad, pero vale la pena destacar dos incisos, a saber, el 5 y el 6; en el inciso 5 tenemos $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ y $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$, así que dada cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, ocurre $\mathfrak{A} \models \psi$ o $\mathfrak{A} \models \neg\psi$, en cualquier caso $\mathfrak{A} \models \varphi$ por hipótesis. Este inciso puede describirse como sigue. De $\{\Phi, \psi\} \models \varphi$ y $\{\Phi, \neg\psi\} \models \varphi$ se sigue $\{\Phi\} \models \varphi$.

En cuanto al inciso 6, las hipótesis son $\Phi \models \varphi$ y $\Phi \models \neg\varphi$, que nos indican la inconsistencia de Φ, por lo que podemos escribir $\Phi \models \psi$ para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado ψ, porque Φ no es satisfacible. Este inciso lo podemos representar como: $\{\Phi\} \models \varphi$ y $\{\Phi\} \models \neg\varphi$ implican $\{\Phi\} \models \psi$ para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado ψ. □

Definición 2.2.2. Sea $Y \subseteq Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L})$. Decimos que Y satisface las reglas de la deducción natural si se cumplen las reglas del teorema 2.2.1, donde cada expresión de la forma $\Phi \models \varphi$ se sustituye por $(\Phi, \varphi) \in Y$.

Note que si Γ satisface las reglas de la deducción natural, entonces $\Gamma \neq \varnothing$, de hecho, para cualquier $\Phi \subseteq Pot(Fml(\mathcal{L}))$, $(\Phi, \varphi) \in \Gamma$ para todo $\varphi \in \Phi$. Por ejemplo, presumamos que Γ satisface las reglas de la deducción natural: si $\varphi \in \Phi$, $(\Phi, \varphi) \in Y$. Si $(\Phi, \forall x\varphi) \in Y$, entonces $(\Phi, \varphi_x(s)) \in Y$. En el caso en que $(\Phi, \varphi_1 \wedge \varphi_2) \in Y$, se sigue que $(\Phi, \varphi_1) \in Y$; si $(\Phi, v_0 = v_1) \in Y$, $(\Phi, y = v_1) \in \Gamma$, entonces $(\Phi, y = v_0) \in \Gamma$. Si fijamos $\mathcal{L}$ podemos identificar de forma natural la relación de satisfacción con un subconjunto de $Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L})$.

Definición 2.2.3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje.

$$\models_N = \{(\Phi, \varphi) : \Phi \subseteq Fml(\mathcal{L}), \varphi \in Fml(\mathcal{L}), \Phi \models \varphi\}.$$

La siguiente afirmación es una consecuencia del teorema 2.2.1 y de la definición 2.2.2.

Lema 2.2.4. *La relación $\models_N$ satisface las reglas de deducción natural y, de hecho,*

$$\Phi \models_N \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi \models \varphi.$$

□

Definición 2.2.5. (a) $\vdash_N$ es el menor subconjunto (respecto a $\subseteq$) de $Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L})$ que satisface las reglas de deducción natural. En lugar de escribir $(\Phi, \varphi) \in \vdash_N$, anotamos $\Phi \vdash_N \varphi$.

(b) Decimos que φ se deriva o deduce de (o es derivable a partir de, o existe una derivación de φ a partir de) Φ cuando

$$\Phi \vdash_N \varphi.$$

Del lema 2.2.4 se sigue de inmediato la correctud de nuestra relación $\vdash_N$.

Teorema 2.2.6 (Correctud)**.**

$$\vdash_N \subseteq \models .$$

Una vez que hayamos dado la interpretación usual a $\vdash_N$ podremos concluir que el teorema de correctud afirma, ni más ni menos, que cualquier fórmula derivable φ a partir de Φ es una consecuencia lógica de Φ, es decir que las reglas de derivación de deducción natural preservan validez. El siguiente teorema, por más complejo que se vea, es la definición formal de prueba en nuestro sistema; una prueba es una sucesión finita de fórmulas donde la última es la fórmula por demostrar (otra vez, en ocasiones permitimos que después de la fórmula a demostar aparezcan otras fórmulas) y cada fórmula en la sucesión se obtiene de las previas mediante alguna de las reglas, o es una premisa.

Lema 2.2.7. *La expresión $\Phi \vdash_N \varphi$ es equivalente a lo siguiente. Existen un natural n y una sucesión $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ con $\Phi_i \subseteq \Phi$, $\varphi_j = \varphi$, $j \leq n$, y para cada $i \leq n$ $\Phi \subseteq Fml(\mathcal{L})$, Φ_i es finito, φ_i es una $\mathcal{L}$-fórmula, tales que para toda $i \leq n$ se cumple:*

1. *$\varphi_i \in \Phi_i$ o existe un $\mathcal{L}$-término s con $\varphi_i \equiv s = s$ (Regla de inicio), o*
2. *existen $j < i$ y ψ una $\mathcal{L}$-fórmula tales que $\Phi_j = \Phi_i$ y $\varphi_j \equiv \varphi_i \wedge \psi$ ($\wedge 1$), o*
3. *existen $j < i$ y una $\mathcal{L}$-fórmula ψ tales que $\Phi_j = \Phi_i$ y $\varphi_j \equiv \psi \wedge \varphi_i$ ($\wedge 2$), o*
4. *existen $j_1, j_2 < i$ tales que $\Phi_{j_1} = \Phi_i$, $\Phi_{j_2} = \Phi_i$ y $\varphi_i \equiv \varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2}$ ($\wedge 3$), o*
5. *existen $j_1, j_2 < i$ tales que $\Phi_{j_1} = \Phi_i$, $\Phi_{j_2} = \Phi_i$ y $\varphi_{j_2} \equiv \neg\varphi_{j_1}$ ($\neg 1$), o*
6. *existen $j_1, j_2 < i$ y una $\mathcal{L}$-fórmula ψ tales que $\Phi_{j_1} = \Phi_i \cup \{\psi\}$, $\Phi_{j_2} = \Phi_i \cup \{\neg\psi\}$, $\varphi_{j_1} \equiv \varphi_i$ y $\varphi_{j_2} \equiv \varphi_i$ ($\neg 2$), o*

7. *existen* $j < i$, *una* $\mathcal{L}$*-fórmula* φ *y un* $\mathcal{L}$*-término* s *tales que* $\Phi_j = \Phi_i$, $\varphi_j \equiv \forall x\varphi$, $sust(\varphi, s, x)$ *y* $\varphi_i \equiv \varphi_x(s)$ $(\forall 1)$, *o*

8. *existen* $j < i$, *una* $\mathcal{L}$*-fórmula* φ *y una variable* y *tales que* $\Phi_j = \Phi_i$, $\varphi_j \equiv \varphi_x(y)$, $y \notin lib(\Phi_i \cup var(\varphi))$ *y* $\varphi_i \equiv \forall x\varphi$ $(\forall 2)$, *o*

9. *existen* $j_1, j_2 < i$, *una* $\mathcal{L}$*-fórmula atómica* φ *y* $\mathcal{L}$*-términos* r, s *tales que* $\Phi_{j_1} = \Phi_i$, $\Phi_{j_2} = \Phi_i$, $\varphi_{j_1} \equiv r = s$, $\varphi_{j_2} \equiv \varphi_x(r)$ *y* $\varphi_i \equiv \varphi_x(s)$ *(Igualdad), o*

10. *existe* $j < i$ $(\Phi_j \subseteq \Phi_i$ *y* $\varphi_j \equiv \varphi_i)$ *(Monotonía).*

Tal sucesión $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ (necesariamente finita) se llama derivación de φ a partir de Φ o prueba formal de φ a partir de Φ. En el inciso 5, que corresponde a la prueba por contradicción del teorema 2.2.1, se indica que si a partir del mismo subconjunto finito Φ_i se prueba φ_{j_1} y $\neg\varphi_{j_1}$, entonces se puede probar φ_i (o cualquier otro enunciado). El inciso 6 corresponde a la prueba por casos del teorema 2.2.1, si φ_i se puede probar a partir de $\Phi_1 \cup \{\psi\}$ y a partir de $\Phi \cup \{\neg\psi\}$, entonces se puede demostrar a partir de Φ_i. Antes de demostrar el lema, es más que recomendable reflexionar sobre el contenido del mismo. De inicio tenemos Φ y φ; queremos expresar qué se entiende por $\Phi \vdash_N \varphi$; el teorema asegura o confirma la idea que tenemos de esta relación: es una sucesión finita de fórmulas φ_i $(i \leq n)$, y cada φ_i se obtiene de un subconjunto finito de fórmulas de nuestras premisas Φ mediante el uso de algunas de las reglas de deducción natural. La última fórmula φ_n o alguna φ_k, $k \leq n$, es la que queríamos deducir, es decir, φ.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} = \{(\Phi, \varphi) \in Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L}) :\ & \text{existe una derivación de} \\ & \varphi \text{ a partir de } \Phi\}. \end{aligned}$$

Debemos probar que $\mathrm{Y} = \vdash_N$, para lo que recurrimos a la definición de $\vdash_N$ como el menor subconjunto de $Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L})$ que satisface las reglas de deducción natural. Debemos cerciorarnos de lo siguiente.

1. Y satisface las reglas de deducción natural.

2. Si Y' satisface las reglas de deducción natural, entonces $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Y}'$.

Primero probamos (2). Sea $\mathrm{Y}' \subseteq Pot(Fml(\mathcal{L})) \times Fml(\mathcal{L})$ un conjunto que satisface las reglas de deducción natural. Probaremos que $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Y}'$. Con este fin mostramos, por inducción sobre n lo siguiente.

Si φ tiene una derivación a partir de Φ de longitud n, entonces $(\Phi, \varphi) \in \mathrm{Y}'$. (✪)

después de lo cual habremos logrado mostrar que $Y \subseteq Y'$. El caso $n = 0$ es inmediato pues tal derivación sólo puede usar 1 del teorema 2.2.7

Demostración de (❂). Sea $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ una derivación de φ a partir de Φ. Puesto que esta derivación (en particular en $i = n$) se construyó de acuerdo con lo dicho, (Φ_n, φ_n) satisface alguna subfórmula del enunciado del teorema (Inicio)-(Monotonía). Además, $\varphi_n = \varphi$ y $\Phi_n \subseteq \Phi$. Distinguimos los casos que satisface (Φ_n, φ_n). Si (Φ_n, φ_n) satisface (Inicio), entonces $\varphi = \varphi_n \in \Phi_n \subseteq \Phi$ o $\varphi \equiv s = s$ para algún $\mathcal{L}$-término s. Ya que Y' satisface la regla de inicio, se deduce que $(\Phi, \varphi) \in Y'$. Los otros casos se tratan en forma similar; por ejemplo, suponga que (Φ_n, φ_n) satisface $\wedge 3$. En estas circunstancias, sabemos que existen $j_1, j_2 < n$ tales que $\Phi_{j_1} = \Phi_n$, $\Phi_{j_2} = \Phi_n$ así como $\varphi = \varphi_n \equiv \varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2}$. Entonces, $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq j_1)$ es una derivación de φ_{j_1} a partir de Φ_n y $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq j_2)$ es una derivación de φ_{j_2} a partir de Φ_n, y por hipótesis de inducción, $(\Phi_n, \varphi_{j_1}) \in Y'$ y $(\Phi_n, \varphi_{j_2}) \in Y'$. Dado que Y' satisface la regla $\wedge 3$, se infiere que

$$(\Phi_n, \varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2}) \in Y'.$$

Además, Y' satisface la monotonía y como $\Phi_n \subseteq \Phi$, se sigue que $(\Phi, \varphi) \in Y'$.

Es nuestra siguiente responsabilidad probar (1), es decir, que Y satisface las reglas de deducción natural. Ya que $\varphi \in \Phi \cup \{s = s : s \text{ es un } \mathcal{L}\text{-término}\}$, tenemos la derivación $((\Phi \cap \{\varphi\}, \varphi) : i \leq n)$ de φ a partir de Φ, y Y satisface la regla de inicio. Otra vez, el resto de las reglas se prueban en forma similar. Mostraremos, por ejemplo, la regla de casos; se cumple $(\Phi \cup \{\psi\}, \varphi) \in Y$ y $(\Phi \cup \{\neg\psi\}, \varphi) \in Y$. Sea $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ una derivación de φ a partir de $\Phi \cup \{\psi\}$ y $((\Lambda_i, \psi_i) : i \leq m)$ una derivación de φ a partir de $\Phi \cup \{\neg\psi\}$. El enunciado del teorema, en particular en su parte de la regla de monotonía, nos permite suponer que $\Phi_n = \Phi' \cup \{\psi\}$ y $\Lambda_m = \Phi' \cup \{\neg\psi\}$ con $\Phi' \subseteq \Phi$ finito (observe que por definición de derivación en el teorema, $\Phi_n \subseteq \Phi \cup \{\psi\}$ y $\Lambda_m \subseteq \Phi \cup \{\neg\psi\}$ son conjuntos finitos). Definamos $((\Theta, \theta) : i \leq m + n + 2)$ mediante

$$(\Theta_i, \theta_i) = \begin{cases} (\Phi_i, \varphi_i), & \text{si } i \leq n \\ (\Phi', \varphi), & \text{si } i = n + m + 2. \end{cases}$$

Con esta definición $((\Theta_i, \theta_i) : i \leq m + n + 2)$ proporciona una derivación de φ a partir de Φ; de que las propiedades correspondientes para (Θ_i, θ_i) con $i < n + m + 2$ se satisfacen, se sigue que $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$, respectivamente $((\Lambda_i, \psi_i) : i \leq m)$ son derivaciones; ya

que

$$\begin{aligned}\Theta_n &= \Phi_n = \Phi' \cup \{\psi\}\\ &= \Theta_{n+m+2} \cup \{\psi\}\\ \Theta_{n+m+1} &= \Lambda_m\\ &= \Phi' \cup \{\neg\psi\}\\ &= \Theta_{n+m+2} \cup \{\neg\psi\}\\ \theta_n &= \varphi_n = \varphi = \theta_{n+m+2}\\ \theta_{n+m+1} &= \psi_m = \varphi = \theta_{n+m+2},\end{aligned}$$

se deduce por $(\wedge 2)$ del enunciado que la sucesión se formó de manera correcta. □

Corolario 2.2.8. *(a) Sea $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ una prueba formal. Entonces $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq j)$ para cada $j \leq n$ es una prueba formal de φ_j a partir de Φ_j. En particular, $\Phi_j \vdash_N \varphi_j$.*

(b) $\Phi \vdash_N \varphi$ si y sólo si existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito tal que $\Phi' \vdash_N \varphi$.

Demostración. (a) Se desprende directamente de la fórmula $\Phi \vdash_N \varphi$ que se define en el teorema.

(b) $\Rightarrow$) Sea $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ una derivación de φ a partir de Φ. Entonces $\Phi' = \Phi_n$ es un subconjunto finito de Φ y $\varphi_n = \varphi$. Por (a) se cumple además que $\Phi' \vdash_N \varphi$.

$\Leftarrow$) Se deriva de la regla de monotonía. □

Note que el corolario 2.2.8(a) nos regresa a la notación usada para pruebas formales descrita en renglones:

1. $\Phi_0 \vdash_N \varphi_0$.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$n+1$. $\Phi_n \vdash_N \varphi_n$.

Es conveniente resumir las reglas de inferencias disponibles en deducción natural.

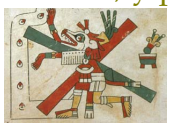
1. Inicio Si $\varphi \in \Phi$ o $\varphi \equiv s = s$ para algún $\mathcal{L}$-término s, entonces $\Phi \vdash_N \varphi$.
2. $\wedge 1$ Si $\Phi \vdash_N \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \vdash_N \varphi_1$.
3. $\wedge 2$ Si $\Phi \vdash_N \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $\Phi \vdash_N \varphi_2$.
4. $\wedge 3$ Si $\Phi \vdash_N \varphi_1$, $\Phi \vdash_N \varphi_2$, entonces $\Phi \vdash_N \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
5. $\neg 1$ Si $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_N \varphi$ y $\Phi \cup \{\neg\psi\} \vdash_N \varphi$, entonces $\Phi \vdash_N \varphi$.
6. $\neg 2$ Si $\Phi \vdash_N \phi$ y $\Phi \vdash_N \neg\varphi$, entonces $\Phi \vdash_N \psi$ para cualquier enunciado ψ.
7. $\forall 1$ Si $\Phi \vdash_N \forall x \varphi(x)$, entonces $\Phi \vdash_N \varphi_x(s)$ para cualquier $\mathcal{L}$-término s, donde $\varphi_x(s)$ significa que en φ cada aparición de x se remplaza por s.

8. $\forall 2$ Si $\Phi \vdash_N \varphi_x(y)$ para cualquier variable y que no aparece entre las fórmulas de Φ o de φ como variable libre, entonces $\Phi \vdash_N \forall x\varphi$.

9. $=$ Si θ es un enunciado, $\Phi \vdash_N r = s$ y $\Phi \vdash_N \theta_x(r)$, entonces $\Phi \vdash_N \theta_x(s)$.

10. Monotonía Si $\Phi \vdash_N \varphi$ y $\Phi \subseteq \Phi'$, entonces $\Phi' \vdash_N \varphi$.

Así, una prueba en deducción natural del enunciado φ a partir del conjunto de enunciados Φ, lo cual se denota $\Phi \vdash_N \varphi$, es una sucesión finita de renglones. En cada renglón aparece una expresión de la forma $\Psi \vdash_N \psi$ y al final del mismo la justificación, que puede ser porque $\psi \in \Psi$, o porque se trate de una premisa, o porque ψ se obtiene de Ψ mediante una de las reglas recién mencionadas usando los renglones previos. El último renglón puede (o no) ser $\Phi \vdash_N \varphi$, de no serlo φ debe aparecer en un renglón previo. Esto implica, en particular, que no podemos usar ninguna fórmula extra para derivar φ, sólo aquellas que aparecen en Φ. Esto no excluye la posibilidad de que en algún renglón previo al último aparezca $\Psi \vdash_N \psi$, donde Ψ puede tener fórmulas que no ocurren en Φ. No obstante, en el último renglón (o en el que aparezca φ a la derecha) estas fórmulas adicionales deben haber desaparecido. Por el corolario 2.2.8, cualquier demostracion en deducción natural involucra sólo una cantidad finita de fórmulas en Φ, por lo que podráimos escribir el renglón de una demostración $\Phi \vdash_N \varphi$ como $\overline{\Phi} \vdash_N \varphi$, donde $\overline{\Phi} \subseteq \Phi$ y $\overline{\Phi}$ es finito, y por monotonía, tenemos derecho a escribir este renglón como $\Phi \vdash_N \varphi$.



Ejemplo 2.2.9. Se cumplen

$$\Phi, \varphi \vdash_N \neg\neg\varphi \qquad \text{y} \qquad \Phi, \neg\neg\varphi \vdash_N \varphi.$$

1. $\{\Phi, \varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \varphi$ Inicio.
2. $\{\Phi, \varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\varphi$ Inicio.
3. $\{\Phi, \varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ $\neg$1 en 1,2, esto es, por 1 y 2, podemos probar cualquier enunciado.
4. $\{\Phi, \varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ Inicio.
5. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ $\neg$2 en 3,4.

Para la otra afirmación la prueba es,

1. $\{\Phi, \neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\varphi$ Inicio.
2. $\{\Phi, \neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ Inicio.
3. $\{\Phi, \neg\neg\varphi, \neg\varphi\} \vdash_N \varphi$ $\neg$1 en 1,2.

4. $\{\Phi, \neg\neg\varphi, \varphi\} \vdash_N \varphi$ Inicio.

5. $\{\Phi, \neg\neg\varphi\} \vdash_N \varphi$ $\neg$2 en 3,4.

Como en el caso del sistema de Hilbert, es pertinente obtener una serie de reglas derivadas que nos faciliten la vida. Éstas son «abreviaciones» de ciertas derivaciones que se pueden utilizar en otras pruebas, una especie de subprogramas, para aquellos entendidos en lenguajes de programación.

Para probar su correctud, debemos demostrar que la conclusión de la regla se deduce de las premisas usando las reglas de deducción natural y reglas derivadas que previamente se hayan manifestado como correctas.

Lema 2.2.10. ❶ *Si* $\Phi \vdash_N t = s$ *y* $\Phi \vdash_N t = r$, *entonces* $\Phi \vdash_N s = r$.

❷ *Si* $\Phi \vdash_N r = s$, *entonces* $\Phi \vdash_N s = r$.

❸ *Si* $\Phi \vdash_N r = s$ *y* $\Phi \vdash_N s = t$, *entonces* $\Phi \vdash_N r = t$.

Demostración. ❶ Sea $x \in Var - Var(r)$. Entonces $t = r \equiv (x = r)_x(t)$ y $s = r \equiv (x = r)_x(s)$. Así:

1. $\Phi \vdash_N t = s$ Premisa.

2. $\Phi \vdash_N (x = r)_x(t)$ Premisa.

3. $\Phi \vdash_N (x = r)_x(s)$ (=).

❷

1. $\Phi \vdash_N r = s$ Premisa.

2. $\Phi \vdash_N r = r$ Inicio.

3. $\Phi \vdash_N s = r$ ❶ en 1,2.

❸

1. $\Phi \vdash_N r = s$ Premisa.

2. $\Phi \vdash_N s = t$ Premisa.

3. $\Phi \vdash_N s = r$ ❷ en 1.

4. $\Phi \vdash_N r = t$ ❶ en 3,2.

□

Teorema 2.2.11. *(a) Si* $\Phi \vdash_N \varphi_0$ *y* $\Phi \cup \{\varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$, *entonces* $\Phi \vdash_N \varphi_1$ *(MP).*
(b) Si $\Phi \cup \{\varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$, *entonces* $\Phi \cup \{\neg\varphi_1\} \vdash_N \neg\varphi_0$ *(Contrapositiva).*
(c) Si $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_N \psi$ *y* $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_N \neg\psi$, *entonces* $\Phi \vdash_N \varphi$ *(Prueba indirecta (PI)).*
(d) Si $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_N \psi$ *y* $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_N \neg\psi$, *entonces* $\Phi \vdash_N \neg\varphi$.

Demostración. (a)

1. $\Phi \vdash_N \varphi_0$ Premisa.
2. $\{\Phi, \varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$ Premisa.
3. $\{\Phi, \neg\varphi_0\} \vdash_N \varphi_0$ Monotonía en 1.
4. $\{\Phi, \neg\varphi_0\} \vdash_N \neg\varphi_0$ Inicio.
5. $\{\Phi, \neg\varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$ $\neg$1 en 3,4.
6. $\Phi \vdash_N \varphi_1$ $(\neg 2)$ en 2,5.

(b)

1. $\{\Phi, \varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$ Premisa.
2. $\{\Phi, \neg\varphi_1, \varphi_0\} \vdash_N \varphi_1$ Monotonía en 1.
3. $\{\Phi, \varphi_0, \neg\varphi_1\} \vdash_N \neg\varphi_1$ Inicio.
4. $\{\Phi, \varphi_0, \neg\varphi_1\} \vdash_N \neg\varphi_0$ $\neg$1 en 2,3.
5. $\{\Phi, \neg\varphi_1, \neg\varphi_0\} \vdash_N \neg\varphi_0$ Inicio.
6. $\{\Phi, \neg\varphi_1\} \vdash_N \neg\varphi_0$ $(\neg 2)$ en 4,5.

(c)

1. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \psi$ Premisa.
2. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\psi$ Premisa.
3. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \varphi$ $(\neg 1)$ en 1,2.
4. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \varphi$ Inicio.
5. $\Phi \vdash_N \varphi$ $(\neg 2)$ en 3,4.

(d) Similar a (c).

□

En el teorema 2.2.11(a) se menciona MP (Modus Ponens), pero no es ésta la imagen que teníamos del mismo. Pronto veremos porqué se justifica esta denominación.

Lema 2.2.12. *Suponga que para cualquier conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados Φ, de $\Phi \vdash_N \varphi$ se sigue $\Phi \vdash_N \psi$, entonces*

$$\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \psi.$$

Demostración. 1. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$ Inicio.

2. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \psi$ Hipótesis en 1.

□

Teorema 2.2.13 (Leyes de De Morgan). *(a) Si* $\Phi \vdash_N \neg(\varphi \wedge \psi)$, *entonces* $\Phi \vdash_N \neg\varphi \vee \neg\psi$.
(b) Si $\Phi \vdash_N (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, *entonces* $\Phi \vdash_N \neg(\varphi \wedge \psi)$.
(c) Si $\Phi \vdash_N \neg(\varphi \vee \psi)$, *entonces* $\Phi \vdash_N \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
(d) Si $\Phi \vdash_N \neg\varphi \wedge \neg\psi$, *entonces* $\Phi \vdash_N \neg(\varphi \vee \psi)$.

Demostración. (a) De acuerdo con el lema 2.2.11(a) basta probar que

$$\{\Phi, \neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \underbrace{(\neg\varphi \vee \neg\psi)}_{\equiv\neg(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\ \text{Def. de}\ \vee}$$

Por la contrapositiva, resta verificar que

$$\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \varphi \wedge \psi.$$

1. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ $(\wedge 1)$.
2. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi), \neg\neg\varphi\} \vdash_N \varphi$ 2.2.9.
3. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \varphi$ MP.
4. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \neg\neg\psi$ $(\wedge 1)$.
5. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi), \neg\neg\psi\} \vdash_N \psi$ 2.2.9.
6. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \psi$ MP 4,5.
7. $\{\Phi, (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)\} \vdash_N \varphi \wedge \psi$ $(\wedge 3)$ en 3,6.

(b) Por contrapositiva, debemos cerciorarnos de que

$$\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi.$$

La prueba es

1. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \varphi$ $(\wedge 1)$.
2. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi), \varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ 2.2.9.
3. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ MP.
4. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \psi$ $(\wedge 2)$.
5. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi), \psi\} \vdash_N \neg\neg\psi$ 2.2.9.
6. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \neg\neg\psi$ MP 4,5.

7. $\{\Phi, (\varphi \wedge \psi)\} \vdash_N \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$ $(\wedge 3)$ en 3,6.

(c)

1. $\Phi \vdash_N \underbrace{\neg(\varphi \vee \psi)}_{\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \text{ Def. de } \vee}$ Premisa.

2. $\{\Phi, \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 2.2.9.

3. $\Phi \vdash_N \neg\varphi \wedge \neg\psi$ MP.

(d) Puesto que $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, se cumple que

$$\{\Phi, (\varphi \vee \psi)\} \vdash_N \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Por contrapositiva:

$$\{\Phi, (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \neg(\varphi \vee \psi).$$

Así que la afirmación se sigue de 2.2.11(a). ☐

La siguiente regla derivada es nuestra conocida deducción.

Corolario 2.2.14. *Si* $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_N \psi$, *entonces* $\Phi \vdash_N \varphi \to \psi$.

Demostración.

1. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \psi$ Premisa.
2. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N (\varphi \wedge \neg\psi)$ Inicio.
3. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \varphi$ $(\wedge 1)$ en 2.
4. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi), \varphi\} \vdash_N \psi$ Monotonía en 1.
5. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \psi$ MP en 3,4.
6. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \neg\psi$ $(\wedge 2)$ en 2.
7. $\{\Phi, (\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ $\neg 1$ en 5,6.
8. $\{\Phi, \neg(\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash_N \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ Inicio.
9. $\Phi \vdash_N \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ $(\neg 2)$ en 7,8.
10. $\Phi \vdash_N (\neg\varphi \vee \neg\neg\psi)$ De Morgan 9.
11. $\Phi \vdash_N \varphi \to \psi$ Definición de $\to$.

☐

Como antes prometimos, ahora podemos justificar porque MP apareció en el teorema 2.2.11(a) en una forma extraña. La idea que teniamos de MP es: si $\Phi \vdash_N \varphi$, $\Phi \vdash_N \varphi \to \psi$, entonces $\Phi \vdash_N \psi$. En el mencionado teorema tenemos como premisas $\Phi \vdash_N \varphi$, $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_N \psi$ y se concluye $\Phi \vdash_N \psi$. Ahora podemos aplicar deducción a la segunda premisa y obtener $\Phi \vdash_N \varphi \to \varphi$. Esto es, en el teorema 2.2.11(a) tenemos, propiamente, las premisas $\Phi \vdash_N \varphi$, $\Phi \vdash_N \varphi \to \psi$ y concluimos $\Phi \vdash_N \psi$, que es lo que entendíamos por MP.

Ejemplo 2.2.15. Sea $\Sigma = \{\forall x(C(x) \to W(x)), \neg Wt\}$. Pruebe que $\Sigma \vdash_N \neg C(t)$ cuando $x \notin var(t)$.

1. $\Sigma \vdash_N \forall x(C(x) \to W(x))$ Inicio.
2. $\Sigma \vdash_N \neg W(t)$ Inicio.
3. $\Sigma \vdash_N C(t) \to W(t)$ $(\forall 1)$
4. $\Sigma \vdash_N \neg W(t) \to \neg C(t)$ Contrapositiva.
5. $\Sigma \vdash_N \neg C(t)$ MP.

Ejemplo 2.2.16. Suponga que R es un símbolo de 2-relación, $D(x)$ significa que $x \in dom(R)$, $dom(R) \subseteq ran(R)$, donde

$$\begin{aligned} dom(R) &= \{u : \exists v(u,v) \in R\} \\ ran(R) &= \{v : \exists u(u,v) \in R\}. \end{aligned}$$

Decimos que

- R es reflexiva en D si $\forall x(D(x) \to R(x,x))$.
- R es irreflexiva en D si $\forall x(D(x) \to \neg R(x,x))$.
- R es simétrica en D si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \to R(y,x))$.
- R es asimétrica en D si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \to \neg R(y,x)))$.
- R es antisimétrica en D si $\forall x \forall y(D(x) \wedge D(y) \to (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y))$.
- R es transitiva en D si $\forall x \forall y \forall z(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \to (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)))$.

- R es una relación de equivalencia en D si es reflexiva, simétrica y transitiva en D.
- R es un orden parcial en D si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva en D.
- R es conexa en D si $\forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \rightarrow (R(x,y) \vee R(y,x) \vee x = y))$.
- R es un orden lineal en D si R es un orden parcial conexo en D.

Por ejemplo, $<$ en $\mathbb{Z}$ es irreflexiva, asimétrica y transitiva. La relación $\leq$ es un orden lineal en $\mathbb{Z}$. Dé una prueba de las siguientes afirmaciones (suponga que el dominio de R está contenido en su rango).

1. Si existe un elemento $a \in dom(R)$, entonces R no puede ser reflexiva y asimétrica en forma simultánea.
2. Si $a, b \in dom(R)$, $R(a,b)$ y R es simétrica y transitiva, entonces $R(a,a)$.

1. Basta demostrar que el siguiente conjunto es inconsistente:

$$\Sigma' = \{D(a), \forall x(D(x) \rightarrow R(x,x)), \forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))\},$$

por lo que es suficiente derivar una contradicción a partir de Σ.

1. $\Sigma \vdash_N D(a)$ Inicio.
2. $\Sigma \vdash_N \forall x(D(x) \rightarrow R(x,x))$ Inicio.
3. $\Sigma \vdash_N \forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \wedge (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ Inicio.
4. $\Sigma \vdash_N D(a) \rightarrow R(a,a)$ $(\forall 1)$ en 2.
5. $\Sigma \vdash_N R(a,a)$ MP.
6. $\Sigma \vdash_N \forall y (D(a) \wedge D(y) \rightarrow (R(a,y) \rightarrow \neg R(y,a))$ $(\forall 1)$ 3.
7. $\Sigma \vdash_N D(a) \wedge D(a) \rightarrow (R(a,a) \rightarrow \neg R(a,a))$ $(\forall 1)$ 6.
8. $\Sigma \vdash_N R(a,a) \rightarrow \neg R(a,a)$ MP 1,7.
9. $\Sigma \vdash_N \neg R(a,a)$ MP 5,8.
10. $\Sigma \vdash_N R(a,a) \wedge \neg R(a,a)$ $(\wedge 1)$.

2. Las premisas son

$$\Sigma = \{D(a) \wedge D(b) \wedge R(a,b), \forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \\ \forall x \forall y \forall z (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \rightarrow (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))\}$$

y la conclusión es $R(a,a)$.

1. $\Sigma \vdash_N D(a) \wedge D(b) \wedge R(a,b)$ Inicio.
2. $\Sigma \vdash_N \forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$ Inicio.
3. $\Sigma \vdash_N \forall x \forall y \forall z (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \rightarrow (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ Inicio.
4. $\Sigma \vdash_N \forall y (D(a) \wedge D(b) \rightarrow (R(a,y) \rightarrow R(y,a))$ $(\forall 1)$.
5. $\Sigma \vdash_N D(a) \wedge D(b) \rightarrow (R(a,b) \rightarrow R(b,a))$ $(\forall 1)$.
6. $\Sigma \vdash_N R(a,b) \rightarrow R(b,a)$ MP 1,5.
7. $\Sigma \vdash_N R(a,b)$ $(\wedge 1)$ 1.
8. $\Sigma \vdash_N R(b,a)$ MP 6,7.
9. $\Sigma \vdash_N \forall y \forall z (D(a) \wedge D(y) \wedge D(z) \rightarrow (R(a,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(a,z))$ $(\forall 1)$ 3.
10. $\Sigma \vdash_N \forall z (D(a) \wedge D(b) \wedge D(z) \rightarrow (R(a,b) \wedge R(b,z) \rightarrow R(a,z))$ $(\forall 1)$ 9.
11. $\Sigma \vdash_N D(a) \wedge D(b) \wedge D(a) \rightarrow (R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow R(a,a))$ $(\wedge 1)$ 10.
12. $\Sigma \vdash_N R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow R(a,a)$ MP 1,11.
13. $\Sigma \vdash_N R(a,a)$ MP 7,8,12.

Sabemos que el cuantificador existencial se define en términos del universal, por lo que formalmente no requerimos su uso para llevar a cabo una demostración. No obstante, en ocasiones es más fácil trabajar con $\exists$. Para ello necesitamos los siguientes resultados. Para empezar, queremos añadir un cuantificador existencial. Si una fórmula φ se cumple para algún término t, existe una v para la cual se cumple φ. Por ejemplo, Si $\varphi(x)$ es la fórmula que expresa x es el conjunto vacío, entonces

$$\varphi(\varnothing) \wedge \forall y (y \neq \varnothing \rightarrow \exists z (z \in y)),$$

expresa que $\varnothing$ es un conjunto vacío y que cualquier conjunto y que no sea $\varnothing$ tiene al menos un elemento. Lo natural es que, a partir de esta información, podamos deducir

$$\exists u [\varphi(u) \wedge \forall y (y \neq u \rightarrow \exists z (z \in y)].$$

Algo que parece trivial. No obstante, debemos tener cuidado; digamos que $I(x)$ expresa x es un entero, entonces la fórmula

$$I(2) \wedge \exists y (I(y) \wedge y \neq 2) \tag{1}$$

se traduce como

Dos es un entero y algún entero es diferente de dos (2)

Nos gustaría deducir de (1) que

$$\exists x[I(x) \wedge \exists y(I(y) \wedge y \neq x)] \tag{3}$$

pero también

$$\exists u[I(u) \wedge \exists (I(y) \wedge y \neq u)]. \tag{4}$$

Hasta aquí, todo en orden, lo anterior parece muy natural, pero qué pasa si en lugar de x en (3) o u en (4), ponemos y,

$$\exists y[I(y) \wedge \exists y(I(y) \wedge y \neq y)]. \tag{5}$$

La fórmula (5) se obtiene de (1) sustituyendo y por 2; siempre es falsa. Dado que las reglas de inferencia deben preservar veracidad, no podemos deducir (5) de (1). El problema ocurrió porque al sustituir y por 2, y se colocó en el alcance de un cuantificador ya existente. Para evitar estas situaciones inadmisibles, formulamos a continuación la regla correcta.

Teorema 2.2.17 (Regla de generalización existencial (GE))**.** *Si φ es una fórmula, t un término y v una variable, entonces $\exists v\varphi$ se deriva de $\varphi_v(t)$ si $sust(\varphi, t, v)$. En forma equivalente, se cumple $\varphi_v(t) \vdash_N \exists v\varphi$ si $sust(\varphi, t, v)$. Si Γ es un conjunto de fórmulas y $\Gamma \vdash_N \varphi_v(t)$, entonces $\Gamma \vdash_N \exists v\varphi$, si $sust(\varphi, t, v)$.*

Demostración. Puesto que $sust(\varphi, t, u)$, podemos concluir que $sust(\neg\varphi, t, u)$. Por consiguiente,

1. $\{\forall u\neg\varphi\} \vdash_N \neg\varphi_u(t)$ — Inicio.
2. $\vdash_N \forall u\neg\varphi \to \neg\varphi_u(t)$ — Deducción
3. $\vdash_N \varphi_u(t) \to \neg\forall y\neg\varphi$ — Contrapositiva.
4. $\vdash_N \varphi_u(t) \to \exists u\varphi$ — Definición de $\exists$.

□

Para mostrar como derivar (3) de (1) usando (GE), sea x la variable v en la regla, y φ la fórmula en (GE) la expresión

$$I(x) \wedge \exists y(I(y) \wedge y \neq x). \tag{7}$$

El término t es 2, así que la sustitución de 2 por x en (7) es aceptable. La fórmula $\varphi_2(x)$ es (1). En consecuencia, la regla (GE) nos autoriza a derivar (3) de (1). En forma similar, se corrobora que (4) se deriva de (1). Para asegurarnos que podemos aplicar la regla (GE) al deducir $\exists v\varphi$ a partir de alguna fórmula ψ, debemos verificar la siguiente.

① Es válido remplazar cualquier aparición libre de v en φ por t;

② si toda ocurrencia libre de v en φ se remplaza por t, entonces φ se convierte en ψ.

Acabamos de establecer como introducir un cuantificador existencial en una prueba formal, y lo natural es describir cómo «eliminar» un cuantificador existencial ya presente. Considere la siguiente información.

Todos los gatos son animales. Algunos gatos tienen cola. Por lo tanto, algunos animales tienen cola. Lo traducimos como el argumento a continuación.

Premisas $\forall x(G(x) \to A(x))$, $\exists x(G(x) \wedge C(x))$.
Conclusión $\exists x(A(x) \wedge C(x))$.

La prueba informal transcurre como sigue. Dado que existe un gato con rabo, lo podemos llamar de algún modo, digamos y. Ya que todos los gatos son animales, de la primera premisa derivamos $G(y) \to A(y)$, y de la segunda $G(y) \wedge C(y)$ y la implicación $G(y) \to A(y)$, derivamos $A(y)$. Con esto y puesto que $C(y)$, derivamos $A(y) \wedge C(y)$. Apelamos a la regla (GE) para obtener $\exists x(A(x) \wedge C(x))$. Pero hay un problema. **No** probamos la conclusión a partir de las premisas originales, pues remplazamos la segunda premisa por $G(y) \wedge C(y)$. Derivamos la conclusión de ésta y de (1). Requerimos una regla de inferencia (PE) que justifique este proceder. Proponemos la siguiente versión preliminar: Si Γ es un conjunto de fórmulas, φ, ψ son fórmulas,

$$\text{si } \Gamma, \psi_v(u) \vdash \varphi \text{ entonces } \Gamma, \exists u\psi(v) \vdash \varphi. \qquad (\clubsuit)$$

La variable v se llama la variable PE y u la variable existencial. Ilustramos la regla dada en (♣) mediante la siguiente derivación, usando el argumento recién descrito. Aquí (1), (2) son las premisas y (3) es $G(y) \wedge C(y)$.

1.	$\{1\} \vdash \forall x(G(x) \to A(x))$	Premisa
2.	$\{2\} \vdash \exists x(G(x) \wedge C(x))$	Premisa
3.	$\{3\} \vdash G(y) \wedge C(y)$	y Premisa (para (PE))
4.	$\{1\} \vdash (G(y) \to A(y)$	$\forall$ 1 en 1
5.	$\{3\} \vdash G(y)$	$\wedge$1 en 3
6.	$\{1,3\} \vdash A(y)$	MP 4,5
7.	$\{3\} \vdash C(y)$	$\wedge$2 en 3
8.	$\{1,3\} \vdash A(y) \wedge C(y)$	$\wedge$3 en 6,7
9.	$\{1,3\} \vdash \exists x(A(x) \wedge C(x))$	GE 8
10.	$\{1,2\} \vdash \exists x(A(x) \wedge C(x))$	PE[y | x] 2,3,9.

En el renglón 3 tenemos la premisa para (PE). Suponemos que y es un gato con cola, por lo que la variable y es la variable PE. Note que y está «señalada» en el renglón 3, y también lo está en cada renglón que dependa de 3 en el que y sea libre (renglones 5, 6, 7, y 8). Además, aunque y está señalada en el renglón 8, y no podemos generalizar sobre y, sí podemos aplicar generalización existencial en y. El renglón 9 depende de la premisa 3, pero y no es libre en el renglón 9, así que no está señalada. En el renglón 10, se usa la regla (PE) para remplazar la premisa 3 por la 2. La explicación en el renglón 10 indica donde está la premisa existencial (renglón 2), donde la premisa temporal para (PE) (renglón 3), y donde la conclusión (renglón 9). Más aún, $[y|x]$ indica que y es la variable PE, x es la variable existencial y que la sustitución de y por x es válida. La regla PE es una regla como la de prueba indirecta, pues nos permite remplazar una premisa por otra. En la prueba recién dada, remplazamos la premisa 3 por la 2, por lo que si la fórmula φ se deriva usando (PE), la forma de la prueba es como sigue

i	$\{\alpha\} \vdash \exists v\psi$	(Razón)
j	$\{j\} \vdash \psi[u\|v]$	u Premisa (para PE)
...	... ...	
k	$\beta \cup \{j\} \vdash \varphi$	(Razón)
k+1	$\beta \cup \alpha \vdash \varphi$	i,j, k PE[u | x].

Suponemos que α, β son conjuntos de naturales positivos, $j \notin \alpha$ y $j \notin \beta$. La fórmula existencial en el renglón i es, con frecuencia, una premisa, pero no necesariamente tiene que serlo. Si lo es, $\alpha = \{i\}$. En el renglón j tenemos la premisa PE, entonces se deriva φ en el renglón k. La regla PE nos permite remplazar la premisa en el renglón j por las premisas que se usaron para derivar la fórmula existencial $\exists v\psi$ en el renglón i. La sustitución de la variable PE v por u en ψ en la regla (❂) debe ser una sustitución válida. De no poner atención a esto, se puede presentar la siguiente patología. Suponga la premisa existencial: Existe un entero tal que todo entero positivo es mayor que él,

$$\exists x[I(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge I(y) \to y > x)].$$

Si tomamos y como la variable PE, la premisa para PE sería

$$I(y) \wedge \forall y(P(y) \wedge I(y) \to y > y).$$

De esto podemos deducir la afirmación falsa,

$$\forall y(I(y) \wedge P(y) \to y > y).$$

Para prevenir este tipo de absurdos, la sustitución de la variable PE por la variable existencial debe ser válida. Al elegir la variable PE, se debe asegurar que no se ha usado previamente con otras propiedades. Por ejemplo, suponga que las premisas son $G(x)$ y

$\exists y \neg G(y)$. Si tomamos como variable PE a x, la premisa PE sería $\neg G(x)$. Entonces, se puede deducir la contradicción $G(x) \wedge \neg G(x)$, aunque las premisas originales no son contradictorias; el argumento no es válido.

Teorema 2.2.18 (Prueba existencial (PE)). *Si Γ es un conjunto de fórmulas, u, v son variables y φ es una fórmula, entonces φ es derivable a partir de Γ y $\exists u\psi$ si φ es derivable a partir de Γ y $\psi_u(v)$, en tanto que $sust(\psi, v, u)$, v no es libre en φ y v no es libre en ninguna fórmula en Γ, es decir, si $\Gamma \cup \{\psi_u(v)\} \vdash_N \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\exists u\psi\} \vdash_N \varphi$ siempre que $sust(\psi, v, u)$, v no sea libre en φ y v no sea libre en Γ.*

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que u no es libre en Γ o ψ. Así que basta probar: si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_N \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\forall u \neg\varphi\} \vdash_N \psi$ si u no es libre en Γ o en ψ.

1. $\Gamma \vdash_N \varphi \to \psi$ Deducción
2. $\Gamma \vdash_N \neg\psi \to \neg\varphi$ Contrapositiva
3. $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash_N \neg\varphi$ MP.
4. $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash_N \forall u \neg\varphi$ $(\forall 2)$.
5. $\Gamma \vdash_N \neg\psi \to \forall u \neg\varphi$ Deducción
6. $\Gamma \vdash_N \neg\forall u \neg\varphi \to \psi$ Contrapositiva

□

A continuación presentamos ejemplos del uso de estas reglas nuevas.

Ejemplo 2.2.19. Demuestre que los siguientes argumentos son válidos.

① Premisas: $\forall x(G(x) \to S(x)), G(a)$
Conclusión: $\exists x S(x)$.

② Premisas: $\forall x[P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg R(x,y))], \forall x[P(x) \to \forall y(\neg S(x) \to Q(y)], P(b)$
Conclusión $\exists x[P(x) \wedge \forall y(R(x,y) \to S(x)]$.

Mediante Γ denotamos las premisas.

①

1. $\Gamma \vdash_N \forall x(G(x) \to S(x))$ Inicio.
2. $\Gamma \vdash_N G(a)$ Inicio.

3. $\Gamma \vdash_N G(a) \to S(a)$ $(\forall 1)$.
4. $\Gamma \vdash_N S(a)$ MP 2,3.
5. $\Gamma \vdash_N \exists x S(x)$ GE 4.

②

1. $\Gamma \vdash_N \forall x[P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg R(x,y)]$ Hipótesis
2. $\Gamma \vdash_N \forall x[P(x) \to \forall y(\neg S(x) \to Q(y)]$ Hipótesis
3. $\Gamma \vdash_N P(b)$ Hipótesis
4. $\Gamma \vdash_N P(b) \to \forall y(Q(y) \to \neg R(b,y))$ $(\forall 1)$.
5. $\Gamma \vdash_N \forall y(Q(y) \to \neg R(b,y))$ MP 3,4.
6. $\Gamma \vdash_N P(b) \to \forall y(\neg S(b) \to Q(y))$ $(\forall 1)$.
7. $\Gamma \vdash_N \forall y(\neg S(b) \to Q(y))$ MP 3,6.
8. $\Gamma \vdash_N Q(y) \to \neg R(b,y)$ $(\forall 1)$ 5.
9. $\Gamma \vdash_N \neg S(b) \to Q(y)$ $(\forall 1)$ 7.
10. $\Gamma \vdash_N R(b,y) \to \neg Q(y)$ Contrapositiva
11. $\Gamma \vdash_N \neg Q(y) \to S(b)$ Contrapositiva
12. $\Gamma \vdash_N R(b,y) \to S(b)$ MP 10,11.
13. $\Gamma \vdash_N \forall y(R(b,y) \to S(b))$ $(\forall 2)$ 12.
14. $\Gamma \vdash_N P(b) \wedge \forall y(R(b,y) \to S(b))$ 3,13.
15. $\Gamma \vdash_N \exists x[P(x) \wedge \forall y(R(x,y) \to S(x))]$ EG 14.

Ejemplo 2.2.20. Encuentre una prueba de los siguientes argumentos válidos.

❶ Premisas: $\forall x(A(x) \wedge B(x) \to D(x)), \exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$
Conclusión $\exists x(A(x) \wedge C(x) \wedge D(x))$

❷ Premisas: $\exists x[P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to \neg R(x,y)], \forall x[P(x) \to \forall y(S(y) \to R(x,y))]$
Conclusión $\forall x(Q(x) \to \neg S(x))$

❸ Premisas: $\forall x(P(x) \to Q(x))$
Conclusión $\forall x[\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists z(Q(z) \wedge R(x,z)]$

❹ Premisas: $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y,a) \to R(x,y))], \exists x(P(x) \wedge Q(x,a))$
Conclusión $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$

❺ Premisas $\forall x[P(x) \to \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y))], \forall x[P(x) \to \exists y(S(y) \wedge \neg R(x,y))]$
Conclusión $\exists x P(x) \to \exists x(S(x) \wedge Q(x))$

Demos las pruebas (denotamos con Δ las premisas):
❶

1. $\Delta \vdash_N \forall x(A(x) \wedge B(x) \to D(x))$ Inicio.
2. $\Delta \vdash_N \exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$ Inicio.
3. $\Delta \vdash_N A(y) \wedge B(y) \wedge C(y)$ PE.
4. $\Delta \vdash_N A(y) \wedge B(y) \to D(y)$ $(\forall 1)$ 1.
5. $\Delta \vdash_N A(y) \wedge B(y)$ 3.
6. $\Delta \vdash_N D(y)$ MP 4,5.
7. $\Delta \vdash_N A(y) \wedge C(y)$ 3.
8. $\Delta \vdash_N A(y) \wedge C(y) \wedge D(y)$ 6,7.
9. $\Delta \vdash_N \exists x(A(x) \wedge C(x) \wedge D(x))$ GE 8.
10. $\Delta \vdash_N \exists x(A(x) \wedge C(x) \wedge D(x))$ PE.

❷

1. $\Delta \vdash_N \exists x[P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to \neg R(x,y))]$ Inicio.
2. $\Delta \vdash_N \forall x[P(x) \to \forall y(S(y) \to R(x,y)]$ Inicio.
3. $\Delta \cup \{Q(x)\} \vdash_N Q(x)$ Inicio.
4. $\Delta \vdash_N P(z) \wedge \forall y(Q(y) \to \neg R(z,y))$ PE
5. $\Delta \vdash_N P(z) \to \forall y(S(y) \to R(z,y))$ $(\forall 1)$ 2
6. $\Delta \vdash_N P(z)$ 4.
7. $\Delta \vdash_N \forall y(Q(y) \to \neg R(z,y))$ 4.
8. $\Delta \vdash_N \forall y(S(y) \to R(z,y))$ MP 5,6.
9. $\Delta \vdash_N Q(x) \to \neg R(z,x)$ $(\forall 1)$ 7.

10. $\Delta \cup \{Q(x)\} \vdash_N \neg R(z,x)$ MP 3,9.
11. $\Delta \vdash_N S(x) \to R(z,x)$ $(\forall 1)$ 8.
12. $\Delta \cup \{Q(x)\} \vdash_N \neg S(x)$ Monotonía, MP 10,11.
13. $\Delta \vdash_N Q(x) \to \neg S(x)$ Deducción
14. $\Delta \vdash_N \forall x(Q(x) \to \neg S(x))$ $(\forall 2)$ 13.
15. $\Delta \vdash_N \forall x(Q(x) \to \neg S(x))$ PE.

❸

1. $\Delta \vdash_N \forall x(P(x) \to Q(x))$ Inicio.
2. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N \exists y(P(y) \wedge R(x,y))$ Inicio.
3. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N P(u) \wedge R(x,u)$ PE.
4. $\Delta \vdash_N P(u) \to Q(u)$ $(\forall 1)$ 1.
5. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N Q(u)$ MP 3,4.
6. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N Q(u) \wedge R(x,u)$ 3,5.
7. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))$ GE.
8. $\Delta \cup \{\exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \vdash_N \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))$ PE.
9. $\Delta \vdash_N \exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \to \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))$ Deducción

❹

1. $\Delta \vdash_N \exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y,a) \to R(x,y))]$ Inicio.
2. $\Delta \vdash_N \exists x(P(x) \wedge Q(x,a))$ Inicio.
3. $\Delta \vdash_N P(u) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y,a) \to R(u,y))$ PE.
4. $\Delta \vdash_N P(u) \wedge Q(v,a)$ PE.
5. $\Delta \vdash_N \forall y(P(y) \wedge Q(y,a) \to R(u,y))$ 3.
6. $\Delta \vdash_N P(v) \wedge Q(v,a) \to R(u,v)$ $(\forall 1)$ 5.
7. $\Delta \vdash_N R(u,v)$ MP.
8. $\Delta \vdash_N P(u) \wedge P(v) \wedge R(u,v)$ 4,7.
9. $\Delta \vdash_N \exists y(P(u) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$ GE, 8

10. $\Delta \vdash_N \exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$ GE 9.
11. $\Delta \vdash_N \exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$ PE 2,4,10.
12. $\Delta \vdash_N \exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge R(x,y))$ PE 1,3,11.

❺

1. $\Delta \vdash_N \forall x[P(x) \to \forall y(\neg Q(y) \to R(x,y))]$ Inicio.
2. $\Delta \vdash_N \forall x[P(x) \to \exists y(S(y) \wedge \neg R(x,y))]$ Inicio.
3. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \exists x P(x)$ Inicio.
4. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N P(z)$ PE.
5. $\Delta \vdash_N P(z) \to \forall y(\neg Q(y) \to R(z,y))$ $(\forall 1)$ 1.
6. $\Delta \vdash_N P(z) \to \exists y(S(y) \wedge \neg R(z,y))$ $(\forall 1)$ 2.
7. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \forall y(\neg Q(y) \to R(z,y))$ MP 4,5.
8. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \exists y(S(y) \wedge \neg R(z,y))$ MP 4,6.
9. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N S(u) \wedge \neg R(z,u)$ PE.
10. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \neg Q(u) \to R(z,u)$ $(\forall 1)$ 7.
11. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \neg R(z,u) \to Q(u)$ 10.
12. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N Q(u)$ 9.
13. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N Q(u) \wedge S(u)$ 9.
14. $\Delta \cup \{\exists x P(x)\} \vdash_N \exists x(S(x) \wedge Q(x))$
15. $\Delta \vdash_N \exists x P(x) \to \exists x(S(x) \wedge Q(x))$ Deducción 14.

Ejemplo 2.2.21. Considere el lenguaje $\{e, *\}$ de la teoría de grupos. Sabemos que si G es un grupo, $u, v \in G$ y v es un inverso derecho de u, entonces también es un inverso izquierdo de u, es decir:

$$u * v = v * u = e.$$

¿Cómo se prueba este hecho en la vida real? Se cumple $u * v = e$. Escogemos $w \in G$ tal que $v * w = e$, que existe por definición de grupo.

$$\begin{aligned} v * u =& (v * u) * e && (1)\\ =& (v * u) * (v * w) && (2)\\ =& v * (u * (v * w))) && (3)\\ =& v * ((u * v) * w) && (4)\\ =& v * (e * w) && (5)\\ =& (v * e) * w && (6)\\ =& v * w && (7)\\ =& e. && (8) \end{aligned}$$

Ahora transformamos esta demostración intuitiva en una prueba formal. Como es costumbre, escribimos $u * v$ en lugar de $*(u, v)$.

Debemos demostrar que

$$\forall\, u \forall\, v (u * v = e \to v * u = e).$$

Sean Φ_G los axiomas de la teoría de grupos y $\Phi = \Phi_G \cup \{u * v = e\} \cup \{v * u = e\}$. Primero demostramos las ecuaciones (1-8) (que aparecen señaladas).

1. $\Phi \vdash_N \forall\, x(x * e = x)$ Inicio.
2. $\Phi \vdash_N (v * u) * e = v * u$ $(\forall\, 1)$ en 1.

☞ (3) $\Phi \vdash_N v * u = (v * u) * e$ Simetría de $=$.

4. $\Phi \vdash_N v * w = e$ Inicio.
5. $\Phi \vdash_N (v * u) * x = [(v * u) * (v * w)]_x (v * w)$ Inicio.

☞ (6) $\Phi \vdash_N (v * u) * e = (v * u) * (v * w)$ Lema 2.2.10.

7. $\Phi \vdash_N \forall\, x \forall\, y \forall\, z((x * y) * z) = x * (y * z)$ Inicio.
8. $\Phi \vdash_N \forall\, y \forall\, z(v * y) * z = v * (y * z)$ $(\forall\, 1)$ en 7.
9. $\Phi \vdash_N \forall\, z(v * u) * z = v * (u * z)$ $(\forall\, 1)$ en 8.

☞ (10) $\Phi \vdash_N (v * u) * (v * w) = v * (u * (v * w))$ $\forall\, 1$ en 9.

11. $\Phi \vdash_N \forall\, y \forall\, z(u * y) * z = u * (y * z)$ $(\forall\, 1)$ en 7.
12. $\Phi \vdash_N \forall\, z(u * v) * z = u * (v * z)$ $(\forall\, 1)$ en 11.
13. $\Phi \vdash_N (u * v) * w = u * (v * w)$ $(\forall\, 1)$ en 12.

14. $\Phi \vdash_N u * (v * w) = (u * v) * w$ Simetría de $=$ en 13.
15. $\Phi \vdash_N v * (u * (v * w)) = (v * x)_x(u * (v * w))$ Inicio.
☞ (16) $\Phi \vdash_N v * (u * (v * w)) = v * ((u * v) * w)$ Lema 2.2.10.
17. $\Phi \vdash_N u * v = e$ Inicio.
18. $\Phi \vdash_N v * ((u * v) * w) = (v * (x * w))_x(u * v)$ Inicio.
☞ (19) $\Phi \vdash_N v * ((u * v * w) = v * (e * w)$ Lema 2.2.10.
20. $\Phi \vdash_N \forall y \forall z (v * y) * z = v * (y * z)$ $(\forall 1)$ en 7.
21. $\Phi \vdash_N \forall z (v * e) * z = v * (e * z)$ $(\forall 1)$ en 20.
22. $\Phi \vdash_N (v * e) * w = v * (e * w)$ $(\forall 1)$ en 21.
☞ (23) $\Phi \vdash_N v * (e * w) = (v * e) * w$ Lema 2.2.10.
24. $\Phi \vdash_N v * e = v$ $(\forall 1)$ en 1.
25. $\Phi \vdash_N (v * e) * w = (x * w)_x(v * e)$ Inicio.
☞ (26) $\Phi \vdash_N (v * e) * w = v * w$ Lema 2.2.10.
☞ (27) $\Phi \vdash_N v * w = e$ Inicio.
28. $\Phi \vdash_N v * u = (v * u) * (v * w)$ Lema 2.2.10.
29. $\Phi \vdash_N v * u = v * (u * (v * w))$ Lema 2.2.10.
30. $\Phi \vdash_N v * u = v * ((u * v) * w)$ Lema 2.2.10.
31. $\Phi \vdash_N v * u = v * (e * w)$ Lema 2.2.10.
32. $\Phi \vdash_N v * u = (v * e) * w$ Lema 2.2.10.
33. $\Phi \vdash_N v * u = v * w$ 32, 26.
34. $\Phi \vdash_N v * u = e$ Lema 2.2.10.

Note que 34 es

34. $\{\Phi_G, u * v = e, v * w = e\} \vdash_N v * u = e.$
35. $\{\Phi_G, u * v = e, \neg v * u = e\} \vdash_N \neg (v * w) = e$ Contrapositiva 34.
36. $\{\Phi_G, u * v = e, \neg v * u = e\} \vdash_N \forall y \neg v * y = e$ $(\forall 2)$ en 35.
37. $\{\Phi_G, u * v = e, \neg v * u = e\} \vdash_N \forall x \neg \forall y \neg x * y = e$ $\forall 2$.

(note que $\neg \forall y \neg x * y = e \equiv \exists y x * y = e$)

38. $\{\Phi_G, u * v = e, \neg v * u = e\} \vdash_N \neg\forall y \neg v * y = e$ $(\forall 1)$ en 37.

39. $\{\Phi_G, u * v = e\} \vdash_N v * u = e$ Prueba por contradicción en 36,38.

Finalmente usamos deducción.

40. $\Phi_G \vdash_N (u * v = e \to v * u = e)$.

41. $\Phi_G \vdash_N \forall v(u * v = e \to v * u = e)$ $(\forall 2)$ en 40.

42. $\Phi_G \vdash_N \forall u \forall v(u * v = e \to v * u = e)$ $(\forall 2)$ en 41.

Ejemplo 2.2.22. Demuestre que para cualquier fórmula φ,

$$\vdash_N \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x \neg\varphi.$$

Primero probamos $\vdash_N \neg\exists x\varphi \to \forall x\neg\varphi$ y después la recíproca. En ambos casos usamos prueba indirecta (PI).

1. $\{\neg\exists x\varphi\} \vdash_N \neg\exists x\varphi$ Inicio.
2. $\{\varphi\} \vdash_N \varphi$ Inicio.
3. $\{\varphi\} \vdash_N \exists x\varphi$ GE.
4. $\{\neg\exists x\varphi, \varphi\} \vdash_N \exists x\varphi \wedge \neg\exists x\varphi$ 1,3.
5. $\{\neg\exists x\varphi\} \vdash_N \neg\varphi$ PI.
6. $\{\neg\exists x\varphi\} \vdash_N \forall x\neg\varphi$ $(\forall 1)$ 5.
7. $\vdash_N \neg\exists x\varphi \to \forall x\neg\varphi$ Deducción
8. $\{\forall x\neg\varphi\} \vdash_N \forall x\neg\varphi$ Inicio.
9. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \exists x\varphi$ Inicio.
10. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \varphi(u)$ PE.
11. $\{\forall x\neg\varphi\} \vdash_N \neg\varphi(u)$ $(\forall 1)$ 8.
12. $\{\forall x\neg\varphi, \exists x\varphi\} \vdash_N \varphi(u) \wedge \neg\varphi(u)$ 11,10.
13. $\{\forall x\neg\varphi, \exists x\varphi\} \vdash_N \psi \wedge \neg\psi$ Tautología
14. $\{\forall x\neg\varphi\} \vdash_N \neg\exists x\varphi$ PI.

15. $\vdash_N \forall x \neg\varphi \to \neg\exists x\varphi$ Deducción

16. $\vdash_N \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Ejemplo 2.2.23. Si φ es una fórmula, x, y variables con $y \notin lib(\varphi)$ y $sust(\varphi, x, y)$, entonces:

❶ $\vdash_N \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y\varphi_y(x)$.

❷ $\vdash_N \exists x\varphi \leftrightarrow \exists y\varphi_y(x)$.

❶

1. $\{\forall x\varphi\} \vdash_N \forall x\varphi$ Inicio.
2. $\{\forall x\varphi\} \vdash_N \varphi_y(x)$ $(\forall 1)$
3. $\{\forall x\varphi\} \vdash_N \forall y\varphi_y(x)$ $(\forall 2)$ 2.
4. $\vdash_N \forall x\varphi \to \forall y\varphi_y(x)$ Deducción
5. $\{\forall y\varphi_y(x)\} \vdash_N \forall y\varphi_y(x)$ Inicio.
6. $\{\forall y\varphi_y(x)\} \vdash_N \varphi$ $(\forall 1)$ 5.
7. $\{\forall y\varphi_y(x)\} \vdash_N \forall x\varphi$ $(\forall 2)$ 6.
8. $\vdash_N \forall y\varphi_y(x) \to \forall x\varphi$ Dedución 5, 8.
9. $\vdash_N \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y\varphi_y(x)$ 4,8.

❷

1. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \exists x\varphi$ Inicio.
2. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \varphi_y(x)$ PE.
3. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \exists y\varphi_y(x)$ GE 2.
4. $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \exists y\varphi_y(x)$ PE 1,2,3.
5. $\vdash_N \exists x\varphi \to \exists y\varphi_y(x)$ Deducción
6. $\{\exists y\varphi_y(x)\} \vdash_N \exists y\varphi_y(x)$ Inicio.
7. $\{\exists y\varphi_y(x)\} \vdash_N \varphi$ PE.
8. $\{\exists y\varphi_y(x)\} \vdash_N \exists x\varphi$ GE.

9. $\{\exists y \varphi_y(x)\} \vdash_N \exists x \varphi$ PE 6,7,8.
10. $\vdash_N \exists y \varphi_y(x) \to \exists x \varphi$ Deducción
11. $\vdash_N \exists x \varphi \leftrightarrow \exists y \varphi_y(x)$ 5,10.

Ejemplo 2.2.24. Dé una prueba del siguiente argumento válido. Premisas: $\Gamma = \{\forall x\ (P(x) \land Q(x) \to (x = a \lor x = b)), \neg R(a), \neg\exists x(Q(x) \land R(x) \land \neg P(x))\}$
Conclusión $\forall x(Q(x) \land R(x) \to x = b)$.

1. $\Gamma \vdash_N \forall x(P(x) \land Q(x) \to x = a \lor x = b)$ Inicio.
2. $\Gamma \vdash_N \neg R(a)$ Inicio.
3. $\Gamma \vdash_N \neg\exists x(Q(x) \land R(x) \land \neg P(x))$ Inicio.
4. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x)\} \vdash_N Q(x) \land R(x)$ Inicio.
5. $\Gamma \vdash_N \forall x(Q(x) \land R(x) \to P(x))$ Tautología 3.
6. $\Gamma \vdash_N Q(x) \land R(x) \to P(x)$ $(\forall 1)$ 5.
7. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x)\} \vdash_N P(x)$ MP 4,6.
8. $\Gamma \vdash_N P(x) \land Q(x) \to x = a \lor x = b$ $(\forall 1)$ 1.
9. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x)\} \vdash_N x = a \lor x = b$ MP.
10. $\{x = a\} \vdash_N x = a$ Inicio (para PI).
11. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x), x = a\} \vdash_N \neg R(x)$ Lema 2.2.10.
12. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x), x = a\} \vdash_N R(x) \land \neg R(x)$ 4,11.
13. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x)\} \vdash_N x \neq a$ 10,12 PI.
14. $\Gamma \cup \{Q(x) \land R(x)\} \vdash_N x = b$ 9,13.
15. $\Gamma \vdash_N Q(x) \land R(x) \to x = b$ Deducción 4,14.
16. $\Gamma \vdash_N \forall x(Q(x) \land R(x) \to x = b)$ $(\forall 2)$ 15.

Ejemplo 2.2.25. Muestre que el conjunto de enunciados $\Sigma = \{J(a),\ K(b),\ \forall x(J(x) \to L(x)), \forall x(K(x) \to \neg L(x)), a = b\}$ es inconsistente.

1. $\Sigma \vdash_N J(a)$ Inicio.
2. $\Sigma \vdash_N K(b)$ Inicio.
3. $\Sigma \vdash_N \forall x(J(x) \to L(x))$ Inicio.
4. $\Sigma \vdash_N \forall x(K(x) \to \neg L(x))$ Inicio.
5. $\Sigma \vdash_N a = b$ Inicio.
6. $\Sigma \vdash_N J(a) \to L(a)$ $(\forall 1)$ 3.
7. $\Sigma \vdash_N L(a)$ MP 1,6.
8. $\Sigma \vdash_N K(b) \to \neg L(b)$ $(\forall 1)$ 4.
9. $\Sigma \vdash_N \neg L(b)$ 2,8.
10. $\Sigma \vdash_N L(a)$ 9,5.
11. $\Sigma \vdash_N L(a) \wedge \neg L(a)$ 7,10.

Ejemplo 2.2.26. Demuestre que el conjunto $\Gamma = \{\forall x \forall y(x * y = x),\ \forall x \forall y(x * y = y),\ \exists x \exists y(x \neq y)\}$ es inconsistente.

1. $\Gamma \vdash_N \forall x \forall y(x * y = x)$ Inicio.
2. $\Gamma \vdash_N \forall x \forall y(x * y = y)$ Inicio.
3. $\Gamma \vdash_N \exists x \exists y(x \neq y)$ Inicio.
4. $\Gamma \vdash_N \exists y(u \neq y)$ PE.
5. $\Gamma \vdash_N u \neq v$ PE.
6. $\Gamma \vdash_N u * v = u$ $(\forall 2)$ 1.
7. $\Gamma \vdash_N u * v = v$ $(\forall 2)$ 2.
8. $\Gamma \vdash_N u = v$ 6,7.

9. $\Gamma \vdash_N u = v \wedge u \neq v$ 5,8.

Ejemplo 2.2.27. Demuestre que

$$\vdash_N \forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))] \rightarrow \exists y(y \leq f(y)).$$

1. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]$ Inicio.
2. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \forall x(x \leq x)$ 1.
3. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \forall x[f(x) = f(f(x))]$ 1.
4. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) \leq f(x)$ $(\forall 1)$ 2.
5. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) = f(f(x))$ $(\forall 1)$ 3.
6. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) \leq f(f(x))$ 4,5.
7. $\{\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \exists y(y \leq f(y))$ GE 6.
8. $\vdash_N \forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))] \rightarrow \exists y(y \leq f(y))$ Deducción

2.3 Diversos ejemplos de demostraciones en deducción natural

Ilustramos el método de deducción natural con numerosos ejemplos de diversa naturaleza.

Ejemplo 2.3.1. Dé una prueba en deducción natural del siguiente argumento válido.
Premisas $\Sigma = \{\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow x = a \vee x = b), \neg R(a), \neg\exists x(Q(x) \wedge R(x) \wedge \neg P(x))\}$;
Conclusión $\forall x(Q(x) \wedge R(x) \rightarrow x = b)$.

1. $\Sigma \vdash_N \forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow x = a \vee x - b)$ Inicio
2. $\Sigma \vdash_N \neg R(a)$ Inicio
3. $\Sigma \vdash_N \neg\neg\exists x(Q(x) \wedge R(x) \wedge \neg P(x)))$ Inicio
4. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N Q(x) \wedge R(x)$ Inicio

5. $\Sigma \vdash_N \forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x) \vee P(x))$ Definición de $\exists$ y De Morgan
6. $\Sigma \vdash_N Q(x) \wedge R(x) \to P(x)$ $\forall$ 1 en 6
7. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N P(x)$ MP 4,7
8. $\Sigma \vdash_N P(x) \wedge Q(x) \to x = a \vee x = b$ $\forall$ 1 en 1
9. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N Q(x) \wedge P(x)$ $\wedge$3 en 4,8
10. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N x = 1 \vee x = b$ MP 9
11. $\Sigma \cup \{x = a\} \vdash_N x = 1$ Inicio
12. $\Sigma \vdash_N \forall x \neg R(x)$ $\forall$ 2 en 2
13. $\Sigma \vdash_N \neg R(x)$ $\forall$ 1 en 12
14. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N R(x) \wedge \neg R(x)$ 4,13
15. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N \neg x = a$ $\neg$1 en 14
16. $\Sigma \cup \{Q(x) \wedge R(x)\} \vdash_N x = b$ 15,11
17. $\Sigma \vdash_N (Q(x) \wedge R(x)) \to x = b$ Deducción 16
18. $\Sigma \vdash_N \forall x(Q(x) \wedge R(x)) \to x = b)$ $\forall$ 2 en 18.

Ejemplo 2.3.2. Considere el siguiente conjunto de enunciados

$$\Sigma = \{J(a), K(b), \forall x(J(x) \to L(x)), \forall x(K(x) \to \neg L(x)), a = b\}.$$

Muestre que Σ es inconsistente.

Demos una prueba de una contradicción.

1. $\Sigma \vdash_N J(a)$ Inicio
2. $\Sigma \vdash_N K(b)$ Inicio
3. $\Sigma \vdash_N \forall x(J(x) \to L(x))$ Inicio
4. $\Sigma \vdash_N \forall x(K(x) \to \neg L(x))$ Inicio
5. $\Sigma \vdash_N a = b$ Inicio
6. $\Sigma \vdash_N J(a) \to L(a)$ $\forall$ 1 en 3

7. $\Sigma \vdash_N L(a)$ MP en 6,1
8. $\Sigma \vdash_N K(b) \to \neg L(b)$ $\forall 1$ en 4
9. $\Sigma \vdash_N \neg L(b)$ MP en 2,8
10. $\Sigma \vdash_N \neg L(a)$ Propiedad de la igualdad en 5,9
11. $\Sigma \vdash_N L(a) \wedge \neg L(a)$ $\wedge 1$ en 7,10

Ejemplo 2.3.3. Considere la siguientes fórmulas.

(i) $\exists x A(x) \wedge \forall y \forall z (A(y) \wedge A(z) \to y = z)$.

(ii) $\exists x [A(x) \wedge \forall y (A(y) \to x = y)]$.

Ambas expresan que existe exactamente una x tal que $A(x)$. Muestre que ambas fórmulas son equivalentes. Probaremos que (i)⇒(ii) y (ii)⇒(i).

Para la primera implicación,

1. $\{(i)\} \vdash_N (i)$ Inicio
2. $\{(i)\} \vdash_N \exists x A(x)$ $\wedge 1$ en 1
3. $\{(i)\} \vdash_N \forall y, z (A(y) \wedge A(z) \to y = z)$ $\wedge 2$ en 1
4. $\{(i), A(y)\} \vdash_N A(y)$ Inicio
5. $\{(i)\} \vdash_N A(u)$ u para PE
6. $\{(i)\} \vdash_N A(u) \wedge A(y) \to u = y$ $\forall 1$ en 3
7. $\{(i), A(y)\} \vdash_N u = y$ MP 4,5,6
8. $\{(i)\} \vdash_N A(y) \to u = y$ Deducción en 7
9. $\{(i)\} \vdash_N \forall y (A(y) \to u = y)$ $\forall 2$ en 8
10. $\{(i)\} \vdash_N A(u) \wedge \forall y (A(y) \to u = y)$ $\wedge 3$ en 5,9
11. $\{(i)\} \vdash_N \exists x [A(x) \wedge \forall y (A(y) \to u = y)]$ GE 10
12. $\{(i)\} \vdash_N \exists x [A(x) \wedge \forall y (A(y) \to u = y)]$ PE 2,5,11 $[u|x]$
13. $\vdash_N$ (i)⇒(ii) Deducción.

Ahora nos encargamos de (ii)⇒(i).

1. $\{(ii)\} \vdash_N$ (ii) Inicio
2. $\{(ii)\} \vdash_N A(u) \wedge \forall y(A(y) \to u = y)$ u premisa para PE
3. $\{(ii), A(y) \wedge A(z)\} \vdash_N A(y) \wedge A(z)$ Inicio
4. $\{(ii)\} \vdash_N \forall y(A(y) \to u = y)$ $\wedge$2 en 2
5. $\{(ii)\} \vdash_N A(y) \to u = y$ $\forall$1 en 4.
6. $\{(ii)\} \vdash_N A(z) \to u = z$ $\forall$1 en 4
7. $\{(ii), A(z) \wedge A(y)\} \vdash_N u = y$ MP en 5, 3
8. $\{(ii), A(z) \wedge A(y)\} \vdash_N u = z$ MP en 3,6
9. $\{(ii), A(z) \wedge A(y)\} \vdash_N y = z$ Igualdad en 7,8
10. $\{(ii)\} \vdash_N A(y) \wedge A(z) \to y = z$ Deducción 9
11. $\{(ii)\} \vdash_N \forall y, z(A(y) \wedge A(z) \to y = z)$ $\forall$2 10
12. $\{(ii)\} \vdash_N A(u)$ $\wedge$1 en 2
13. $\{(ii)\} \vdash_N \exists x A(x)$ 12 GE $[u|x]$
14. $\{(ii)\} \vdash_N \exists x A(x) \wedge \forall y, z(A(y) \wedge A(z) \to y = z)$ $\wedge$3 en 11,13
15. $\{(ii)\} \vdash_N \exists x A(x) \wedge \forall y, z(A(y) \wedge A(z) \to y = z)$ 1,2,14 PE $[u|x]$
16. $\vdash_N$ (ii)$\Rightarrow$(i) Deducción en 15

Ejemplo 2.3.4. Sea

$$\Sigma = \{\forall x, y(x \circ y = x), \forall x, y(x \circ y = y), \exists x, y(x \neq y)\}.$$

Confirme que Σ es inconsistente. Derivamos una contradicción a partir de Σ.

1. $\Sigma \vdash_N \forall x, y(x \circ y = x)$ Inicio
2. $\Sigma \vdash_N \forall x, y(x \circ y = y)$ Inicio
3. $\Sigma \vdash_N \exists x, y(x \neq y)$ Inicio
4. $\Sigma \vdash_N \exists y(u \neq y)$ u premisa PE
5. $\Sigma \vdash_N u \neq v$ u, v premisa PE (v)

6. $\Sigma \vdash_N u \circ v = u$ $\forall$ 1 en 1
7. $\Sigma \vdash_N u \circ v = v$ $\forall$ 1 en 2
8. $\Sigma \vdash_N u = v$ Igualdad en 6,7
9. $\Sigma \vdash_N u = v \wedge u \neq v$ $\wedge$3 en 5,7
10. $\Sigma \vdash_N \neg\forall x(x = x)$ Tautología
11. $\Sigma \vdash_N \neg\forall x(x = x)$ 4,5,10 PE$[v|y]$
12. $\Sigma \vdash_N \neg\forall x(x = x)$ 3,4,11 PE$[u|x]$

Ejemplo 2.3.5. Dé una prueba formal a partir del conjunto vacío de premisas de la siguiente fórmula.

$$\forall x(x \leq x) \wedge \forall x[f(x) = f(f(x))] \rightarrow \exists y(y \leq f(y)). \qquad (\divideontimes)$$

1. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \forall x(x \leq x$ Inicio
2. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \forall x[f(x) = f(f(x))]$ Inicio
3. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) \leq f(x)$ $\forall$ 1 en 2
4. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) = f(f(x))$ $\forall$ 1 en 3
5. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N f(x) \leq f(f(x))$ Igualdad 4,5
6. $\{\forall x(x \leq x), \forall x[f(x) = f(f(x))]\} \vdash_N \exists y(y \leq f(y))$ Inicio 6 GE$[f(x)|y]$
7. $\vdash_N (\divideontimes)$ Deducción 7.

2.4 Pruebas en teorías particulares

Teoría de grupos

Usaremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, =, \circ, ^{-1}\}$ en los que se expresan los axiomas de la teoría de grupos como a continuación.

* $\varphi_1 \equiv \forall x, y, x(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.

* $\varphi_2 \equiv \forall\, x(x \circ e = x)$.

* $\varphi_3 \equiv \forall\, x(x \circ x^{-1} = e)$.

Así, la teoria de grupos T_G es el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados φ tales que

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \vdash_N \varphi.$$

En lo sucesivo, cuando usemos T_G como premisas, la regla inicio nos permite emplear cualquier enunciado $\varphi \in T_G$; conforme probemos resultados con T_G conoceremos nuevos elementos de esta teoría y los podremos usar con la regla de inicio. Propiamente, cuando se pide demostrar un enunciado φ a partir de T_G, lo que en el fondo se requiere es confirmar que $\varphi \in T_G$. Progresivamente daremos menos detalles y es importante que el lector se dé cuenta de ello y complete las demostraciones.

Ejemplo 2.4.1. Demuestre el siguiente enunciado a partir de T_G.

$$\forall\, x, y, z(x = y \to x \circ z = y \circ z).$$

1. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x = y$ Inicio
2. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x = y$ Inicio
3. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x = y$ Inicio
4. $T_G \vdash_N x \circ z = x \circ z$ $x = x$ e igualdad
5. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x \circ z = \wedge \circ z$ Igualdad
6. $T_G \vdash_N x = y \to x \circ z = y \circ z$ Deducción en 3
7. $T_G \vdash_N \forall\, x, y, z(x = y \to x \circ z = y \circ z)$ $\forall$ 2 en 4.

Ejemplo 2.4.2. Confirme que el siguiente enunciado se deriva de T_G.

$$\forall\, x, y(x = y \to x^{-1} = y^{-1}).$$

1. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x = y$ Inicio
2. $T_G \cup \{x = y\} \vdash_N x^{-1} = y^{-1}$ Iguadad en funciones y 1

3. $T_G \vdash_N x = y \to x^{-1} = y^{-1}$ Deducción en 2.
4. $T_G \vdash_N \forall\, x, y (x = y \to x^{-1} = y^{-1})$.

Como ejercicio el lector demostrará el enunciado

$$\forall\, x, y, z (x = y \to z \circ x = z \circ y),$$

a partir de T_G.

Ejemplo 2.4.3. La ley de cancelación a la derecha. Muestre que se cumple el siguiente enunciado en presencia de T_G.

$$\forall\, x, y, z (x \circ z = y \circ z \to x = y).$$

1. $T_G \vdash_N \forall\, x, y, z [x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$ Inicio
2. $T_G \vdash_N \forall\, x (x \circ e = x)$ Inicio
3. $T_G \vdash_N \forall\, x (x \circ x^{-1} = e)$ Inicio
4. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N x \circ z = y \circ z$ Inicio
5. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N (x \circ z) \circ z^{-1} = (y \circ z) \circ z^{-1}$ Inicio, Igualdad (ejemplo 2.4.1)
6. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N x \circ (z \circ z^{-1}) = (x \circ z) \circ z^{-1}$ $\forall\, 1 \quad \varphi_1$
7. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N y \circ (z \circ z^{-1}) = (y \circ z) \circ z^{-1}$ $\forall\, 1,\ \varphi_1$
8. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N x \circ (z \circ z^{-1}) = y \circ (z \circ z^{-1})$ Igualdad y 4, 6, 7
9. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N z \circ z^{-1} = e$ $\forall\, 1$ en φ_3
10. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N x \circ e = y \circ e$ Igualdad 8,9
11. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N \circ e = x$ $\forall\, 1\ \varphi_2$
12. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N y \circ e = y$ $\forall\, 1\ \varphi_2$
13. $T_G \cup \{x \circ z = y \circ z\} \vdash_N x = y$ Igualdad 10,11,12
14. $T_G \vdash_N x \circ z = y \circ z \to x = y$ Deducción 13
15. $T_G \vdash_N \forall\, x, y, z (x \circ z = y \circ z \to x = y)$ $\forall\, 2$ en 14.

Ejemplo 2.4.4. El siguiente enunciado es derivable a partir de T_G.

$$\forall x(x \circ e = e \circ x).$$

1.	$T_G \vdash_N \forall x, y, z[x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$	Inicio
2.	$T_G \vdash_N \forall x(x \circ e = x)$	Inicio
3.	$T_G \vdash_N \forall x(x \circ x^{-1} = e)$	Inicio
4.	$T_G \vdash_N x \circ e = x$	$\forall$ 1 en 2
5.	$T_G \vdash_N x \circ x^{-1} = e$	$\forall$ 1 en 3
6.	$T_G \vdash_N e \circ (x \circ x^{-1}) = (e \circ x) \circ x^{-1}$	$\forall$ 1 en 1
7.	$T_G \vdash_N (e \circ x) \circ x^{-1} = e \circ (x \circ x^{-1})$	Igualdad en 6
8.	$T_G \vdash_N (e \circ x) \circ x^{-1} = e \circ e$	5,7 Igualdad
9.	$T_G \vdash_N e \circ e = e$	$\forall$ 1 en 2
10.	$T_G \vdash_N (e \circ x) \circ x^{-1} = e$	Igualdad 8,9
11.	$T_G \vdash_N (e \circ x) \circ x^{-1} = x \circ x^{-1}$	Igualdad 5,10
12.	$T_G \vdash_N (e \circ x) \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} \rightarrow e \circ x = x$	Inicio (ejemplo 2.4.1)
13.	$T_G \vdash_N e \circ x = x$	11,12 Tautología
14.	$T_G \vdash_N x \circ e = e \circ x$	Igualdad 4, 13
15.	$T_G \vdash_N \forall x(x \circ e = e \circ x)$	$\forall$ 2 en 13.

Ejemplo 2.4.5. Verifique que T_G da lugar al siguiente enunciado.

$$\forall y[\forall x(x \circ y = x) \rightarrow y = e].$$

1.	$T_G \vdash_N \forall x, y, z x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$	Inicio
2.	$T_G \vdash_N \forall x(x \circ e = x)$	Inicio

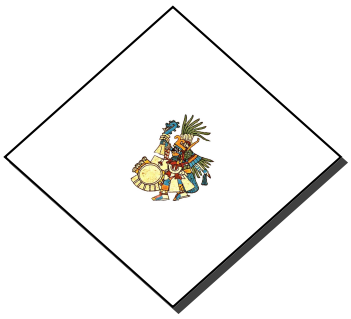
3. $T_G \vdash_N \forall x(x \circ x^{-1} = e)$ Inicio
4. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N \forall x(x \circ y = x)$ Inicio
5. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N e \circ y = e$ $\forall$ 1 en 4
6. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N y \circ e = e \circ y$ $\forall$ 1 Inicio (2.4.4)
7. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N y \circ e = e$ Igualdad 5,6
8. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N y \circ e = y$ $\forall$ 1 en 2
9. $T_G \cup \{\forall x(x \circ y = x)\} \vdash_N y = e$ Igualdad 7,8
10. $T_G \vdash_N \forall x(x \circ y = x) \to y = e$ Deducción 9
11. $T_G \vdash_N \forall y[\forall x(x \circ y = x) \to y = e]$ $\forall$ 2 en 10.

Muchas casas había en Tula, allí enterraron muchas cosas los toltecas. Pero no sólo esto se ve allí, como huella de los toltecas, también sus pirámides, sus montículos, allí donde se dice Tula-Xicocotitlan. Por todas partes están a la vista, por todas partes se ven restos de vasijas de barro, de sus tazones, de sus figuras, de sus muñecos, de sus figurillas, de sus brazaletes, por todas partes están vestigios, en verdad allí estuvieron viviendo juntos los toltecas.

Los toltecas eran gente experimentada, se dice que eran artistas de las plumas, del arte de pegarlas. De antiguo lo guardaban, era en verdad invención de ellos, el arte de los mosaicos de plumas. Por eso de antiguo se les encomendaban los escudos, las insignias, las que se decían apanecáyotl. Esto era su herencia, gracias a la cual se otorgaban las insignias. Las hacían maravillosas, pegaban las plumas, los artistas sabían colocarlas, en verdad ponían en ellas su corazón endiosado. Lo que hacían era maravilloso, precioso, digno de aprecio.

Esos toltecas, como se dice, eran nahuas, no eran popolocas, aunque se llamaban también habitantes antiguos...

Eran ricos, porque su destreza pronto los hacía hallar riqueza. Por esto se dice ahora acerca de quien pronto descubre riquezas: «Es hijo de Quetzalcóatl y Quetzalcóatl es su príncipe». Así era el ser y la vida de los toltecas.



2.5 ➠ Ejercicios

1. Sean Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, $\neg\forall x\mu \in \Phi$ y c un símbolo de constante que no parece en Φ. Muestre que si Φ es satisfacible, también lo es $\{\Phi, \neg\mu_x(c)\}$.

2. En deducción natural, decida si las siguientes afirmaciones se cumplen.

   a) Si $\{\varphi\} \vdash_N \psi$, entonces $\{\exists x\varphi\} \vdash_N \exists x\psi$.

   b) Si $\{\Gamma, \varphi\} \vdash_N \psi$, entonces $\{\Gamma, \forall x\varphi\} \vdash_N \exists x\psi$.

   c) Si $\{\Gamma\} \vdash_N \varphi_x(f(y))$, entonces $\Gamma \vdash_N \forall x\varphi$.

3. En deducción natural, demuestre que las siguientes reglas son derivables.

   a) Suponga $\Gamma \vdash_N \forall x\varphi$; entonces $\Gamma \vdash_N \varphi_x(t)$.

   b) Si $\Gamma \vdash_N \forall x\varphi$, se sigue que $\Gamma \vdash_N \varphi$.

   c) Suponga que $\Gamma \cup \{\varphi_x(t)\} \vdash_N \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\} \vdash_N \psi$.

   d) Si $\Gamma \vdash_N \varphi_x(y)$ (y no es libre en Γ o en $\forall x\varphi$), entonces $\Gamma \vdash_N \forall x\varphi$.

   e) Suponga que $\{\Gamma, \varphi\} \vdash_N \psi$; entonces $\{\Gamma, \forall x\varphi\} \vdash_N \psi$.

   f) Si $\Gamma \vdash_N \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_N \forall x\varphi$.

4. Derive los siguientes teoremas:

   a) $\vdash_N \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$

   b) $\vdash_N \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$

   c) $\vdash_N \forall x(\psi \wedge \varphi) \leftrightarrow (\forall x\psi \wedge \forall x\varphi)$

   d) $\vdash_N \forall y_1 \cdots \forall y_n\psi \to \psi$

   e) $\vdash_N \neg\forall x\psi \to \exists x\neg\psi$.

5. Sea $\mathfrak{T}$ una teoría axiomática con los siguientes axiomas:

   ✣ $\forall y_1 \cdots \forall y_n\psi$, donde ψ es un axioma de $\mathfrak{H}$

   ✣ $\forall y_1 \cdots \forall y_n(\psi \to \varphi) \to [\forall y_1 \cdots \forall y_n\psi \to \forall y_1 \cdots \forall y_n\varphi]$, donde ψ y φ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

   $\mathfrak{T}$ tiene a MP como única regla de inferencia. Demuestre que $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{H}$ tienen los mismos teoremas.

6. Justifique las siguientes reglas derivadas en $\mathfrak{H}$.

   a) $\neg\neg\psi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$

   b) $\psi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\neg\psi$

   c) $\{\psi \vee \varphi, \neg\psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$

   d) $\{\psi \to \gamma, \varphi \to \gamma, \psi \vee \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \gamma$

   e) $\{\psi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi$

   f) $\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi$

   g) $\{\neg\psi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$

   h) $\{\neg\psi \to \neg\varphi, \varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$

   i) $\neg(\psi \to \varphi) \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$

   j) $\neg(\psi \to \varphi) \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi$

   k) $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg(\psi \to \varphi)$

   l) $\{\psi \leftrightarrow \varphi, \psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$

   m) $\{\psi \leftrightarrow \varphi, \neg\psi\} \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\varphi$

   n) $\psi \leftrightarrow \varphi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi \leftrightarrow \neg\varphi$

   ñ) $\neg\psi \leftrightarrow \neg\varphi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \leftrightarrow \varphi$.

7. Demuestre los siguientes teoremas.

   a) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y R(x,y) \to \forall x R(x,x)$

   b) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi \vee \forall x\varphi \to \forall x(\psi \vee \varphi)$

   c) $\vdash_{\mathfrak{H}} \neg\exists x\psi \to \forall x\neg\psi$

   d) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi \to \forall x(\psi \vee \varphi)$

   e) $\vdash_{\mathfrak{H}} (\forall x \forall y R(x,y) \to \neg R(y,x)) \to \forall x \neg R(x,x)$

   f) $\vdash_{\mathfrak{H}} [\exists x\psi \to \forall x\varphi] \to \forall x(\psi \to \varphi)$

   g) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\psi \vee \varphi) \to \forall x\psi \vee \exists x\varphi$

   h) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(R(x,x) \to \exists y R(x,y))$

   i) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\psi \to \varphi) \to [\forall x\neg\varphi \to \forall x\neg\psi]$

   j) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists y[R(y) \to \forall y R(y)]$

   k) $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi \to \forall x(\psi \vee \varphi)$

   l)

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall x \forall y(\psi(x,y) \to \psi(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(\psi(x,y) \wedge \psi(y,z) \to \psi(x,z))] \to \forall x \forall y(\psi(x,y) \to \psi(x,x)).$$

8. Suponga que x no es libre en ψ. Demuestre los siguientes teoremas:

   a) $\vdash_N \psi \to \forall x\psi$

   b) $\vdash_N \psi \to \exists x\psi$

   c) $\vdash_N (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$

   d) $\vdash_N (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$.

9. Igual que en el ejercicio previo pero en el sistema $\mathfrak{H}$.

10. Demuestre los siguientes teoremas:

    ① $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x\neg\psi \leftrightarrow \neg\forall x\psi$

    ② $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\psi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi$

    ③ $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\psi \to \neg(\varphi \vee \gamma)) \to \exists x(\psi \to \neg\varphi \wedge \neg\gamma)$

    ④ $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x\exists y(\psi \to \varphi) \leftrightarrow \forall x\exists y(\neg\psi \vee \varphi)$

    ⑤ $\vdash_{\mathfrak{H}} \forall x(\psi \to \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\exists x(\psi \wedge \varphi)$.

11. Si φ surge de ψ al borrar los cuantificadores $\forall x$ o $\exists x$ cuyo alcance no contiene a x libre, pruebe que $\vdash_N \psi \leftrightarrow \varphi$.

12. Para cada fórmula ψ encuentre una fórmula φ tal que $\vdash_N \varphi \leftrightarrow \neg\psi$, y los símbolos de negación que aparezcan en φ sólo se aplican a fórmulas atómicas:

    ❖ $\psi \equiv \forall x\forall y\exists zR(x,y,z)$

    ❖ $\psi \equiv \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(|x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \varepsilon))$

    ❖ $\psi \equiv \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists n\forall m(m > n \to |a_m - b| < \varepsilon))$.

13. Sea ψ una fórmula que no contiene $\leftrightarrow$ o $\to$. Intercambie cuantificadores universales y existenciales, así como $\wedge$ y $\vee$. La fórmula resultante ψ^* es la dual de ψ.

    Demuestre lo siguiente:

    a) $\vdash_N \psi$ si y sólo si $\vdash_N \neg\psi^*$

    b) $\vdash_N \psi \to \varphi$ si y sólo si $\vdash_N \varphi^* \to \psi^*$

    c) $\vdash_N \psi \leftrightarrow \varphi$ si y sólo si $\vdash_N \psi^* \leftrightarrow \varphi^*$

    d) $\vdash_N \exists x(\psi \vee \varphi) \leftrightarrow [\exists x\psi^* \vee \exists x\varphi^*]$.

14. Demuestre los siguientes teoremas.

    a) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\psi(x) \to \varphi(x)) \to (\forall x\psi(x) \to \exists x\varphi(x))$

    b) $\vdash_{\mathfrak{H}} \neg\exists y\forall x(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(x,x))$

c)

$$\vdash_{\mathfrak{H}} [\forall x(R_1(x) \to R_2(x) \vee R_3(x)) \wedge \neg \forall x(R_1(x) \to R_2(x)) \\ \to \exists x(R_1(x) \wedge R_3(x))$$

d) $\vdash_{\mathfrak{H}} [\exists x \psi(x)] \wedge [\forall x \varphi(x)] \to \exists x(\psi(x) \wedge \varphi(x))$

e) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \varphi(x) \to \exists x(\psi(x) \vee \varphi(x))$

f) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \exists y \psi(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x \psi(x,y)$

g) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x \forall y \psi(x,y) \to \forall y \exists x \psi(x,y)$

h) $\vdash_{\mathfrak{H}} \exists x(\psi(x) \wedge \varphi(x)) \to (\exists x \psi(x)) \wedge \exists x \varphi(x)$.

15. Suponga que ψ es un enunciado que no es demostrable en $\mathfrak{H}$ y que $\mathfrak{H}'$ es el sistema que se obtiene al añadir ψ a $\mathfrak{H}$. Demuestre que $\mathfrak{H}'$ es consistente.

16. Dé una demostración en $\vdash_N$ de los siguientes argumentos válidos.

a) Premisas: $\forall x(A(x) \wedge B(x) \to C(x)), \exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$.
Conclusión: $\exists x(\neg A(x))$.

b) Premisas: $\forall x(P(x) \to \neg Q(x) \vee \neg R(x)), \exists x(Q(x) \wedge R(x))$.
Conclusión $\exists x \neg P(x)$.

c) Premisas: $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(R(x) \to P(x) \vee S(x))$.
Conclusión: $\exists x(R(x) \wedge S(x))$.

d) Premisas: $\forall x(P(x) \vee Q(x) \vee R(x)), \forall x(P(x) \to \neg S(x)), \neg R(a) \wedge S(a)$.
Conclusión: $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$.

e) Premisas: $\exists x A(x), \exists x B(x), \forall x[A(x) \to \forall y(B(y) \to C(x,y))]$.
Conclusión: $\exists x \exists y C(x,y)$.

f) Premisas: $\exists x[P(x) \forall y(P(y) \wedge R(x,y) \to Q(y,a))]$, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x,a))$, $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x,a))$.
Conclusión $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg R(x,y))$.

g) Premisas: $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x,y)), \exists x[P(x) \wedge \forall y(Q(x,y) \to R(x,y)]$.
Conclusión $\exists x \exists y R(x,y)$.

h) Premisas: $\exists x \exists y T(x,y), \forall x \forall y(T(x,y) \to Q(x) \wedge R(y))$, $\forall x \forall y \forall z\ (S(x,y,z) \to P(x))$.
Conclusión: $\forall x \forall y[R(x) \wedge T(x,y) \to \exists z(P(y) \wedge S(x,y,z))]$.

i) Premisas: $\forall x \forall y(P(x) \leftrightarrow S(x,y))$, $\forall x \forall y(R(x,y) \to Q(y))$, $\forall x(Q(x) \to T(x))$, $\exists x T(x) \to \forall y \forall z R(y,z)$.
Conclusión: $\forall x[\exists y(P(x) \wedge R(x,y)) \leftrightarrow \exists z(Q(z) \wedge S(x,z))]$.

17. Traduzca los siguientes argumentos válidos usando los símbolos dados; dé una prueba de ellos en deducción natural.

a) Todos los gatos son mamíferos. Algunos gatos no tienen cola. Por lo tanto, algunos mamíferos no tienen cola, $(G(x), M(x), C(x))$.

b) Todos los racionales son números reales. No todos los racionales son enteros. Por lo tanto, no todos los reales son enteros, $(Q(x), R(x), E(x))$.

c) Venados y ovejas son animales de pastoreo. Los animales de pastoreo son depredadores. Ningún depredador come carne. Por lo tanto, ningún venado come carne. $(V(x)$, $O(x)$, $P(x)$, $D(x)$, $C(x)$.

d) Políticos y abogados son mentirosos. Algunos políticos viven en el pueblo, y algunos abogados viven en el pueblo. Todos los mentirosos son amigables o ningún mentiroso es amigable. Por consiguiente, algún político es amigable o algún abogado no es amigable, $(P(x), A(x), M(x), V(x), P(x), Am(x))$.

e) Existe un profesor tal que todo estudiante cursa toda materia con él. Alguna materia tiene la propiedad de que ningún estudiante la cursa con un profesor. Por lo tanto, algún estudiante cursa alguna materia con un profesor, $(P(x), E(x), M(x), T(x, y, z))$.

f) Una matriz simétrica es positiva definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos. Algunas matrices no son simétricas. Algunas matrices tienen valores propios que no son todos positivos. Toda matriz simétrica positiva definida tiene determinante positivo. Por lo tanto, toda matriz simétrica cuyos valores propios son positivos tiene determinante positivo, $(S(x)$, $M(x)$, $P(x)$, $V(x)$, $G(x)$, $d(x))$.

g) Un conjunto es abierto si y sólo si contiene una vecindad de cada uno de sus puntos. Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto. El complemento de un conjunto es un conjunto. En consecuencia, cualquier conjunto cuyo complemento contenga una vecindad de cada uno de sus puntos es cerrado, $(C(x), A(x), T(x, y), V(x, y), P(x), Cerr(x), com(x))$.

18. Traduzca y demuestre validez en Hilbert o deducción natural.

a) Algún entero impar divide a todos los enteros pares. Por lo tanto, todo entero par es divisible por algún entero impar.

b) Rectas paralelas que no son idénticas no se intersecan. Si dos rectas son paralelas, no tienen puntos en común o todos sus puntos son comunes. Dos rectas que tienen todos sus puntos en común se intersecan. Por lo tanto, dos rectas paralelas que no son idénticas no tienen puntos en común.

c) Las funciones tienen una gráfica suave si y sólo si no hay interrupciones o picos en sus gráficas. Si la gráfica de una función no tiene interrupciones, la función es continua. Por lo tanto, las funciones que tienen gráfica suave son continuas.

19. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si es un teorema lógico. Si lo es, dé una prueba en deducción natural (a partir de $\Sigma = \varnothing$); cuando no sea un teorema lógico, describa una estructura en la que no se cumpla.

    a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to [\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)]$

    b) $[\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)] \to \forall z(P(z) \vee Q(z))$

    c) $[\forall x P(x) \to \forall x Q(x)] \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

    d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to [\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)]$

    e) $\exists x(\exists y P(y) \to Q(x)) \to \forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$

    f) $\exists y \forall x(P(x) \wedge Q(y)) \to \forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y))$

    g) $[\forall x P(x) \to \exists y \neg Q(y)] \to [\forall x Q(x) \to \exists y \neg P(y)]$

    h) $\forall x[P(x) \to \forall y(Q(y) \to R(x,y)] \wedge Q(a) \wedge \neg R(b,a) \to \neg P(b)$

    i) $\exists x[P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to R(x,y))] \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to S(y) \wedge \forall x(S(x) \to Q(x)) \to \forall x(Q(x) \leftrightarrow S(x))$

    j) $\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \to R(x,y)) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to S(y)) \to \forall x(Q(x) \to S(x))$

    k) $[\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x R(x)] \leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(y))$

    l) $\neg \exists x[\exists y P(y) \wedge Q(x)] \leftrightarrow \forall x \forall y(P(y) \to \neg Q(x))$.

20. Suponga que φ, ψ son fórmulas y x es una variable que no es libre en φ. Muestre que las siguientes fórmulas son teoremas lógicos mediante una demostración en Hilbert de las mismas a partir del conjunto vacío de premisas.

    a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [\varphi \wedge \forall x \psi]$

    b) $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow [\varphi \vee \exists x \psi]$

    c) $\forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow [\varphi \to \forall x \psi]$

    d) $\exists x(\psi \to \varphi) \leftrightarrow [\forall x \psi \to \varphi]$.

21. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si es un teorema lógico. Si lo es, dé una prueba en deducción natural (a partir de $\Sigma = \varnothing$); cuando no sea un teorema lógico, describa una estructura en la que no se cumpla.

    a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to [\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)]$

    b) $[\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)] \to \forall z(P(z) \vee Q(z))$

    c) $[\forall x P(x) \to \forall x Q(x)] \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

    d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to [\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)]$

    e) $\exists x(\exists y P(y) \to Q(x)) \to \forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$

    f) $\exists y \forall x(P(x) \wedge Q(y)) \to \forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y))$

g) $[\forall x P(x) \to \exists y \neg Q(y)] \to [\forall x Q(x) \to \exists y \neg P(y)]$

h) $\forall x[P(x) \to \forall y(Q(y) \to R(x,y)] \land Q(a) \land \neg R(b,a) \to \neg P(b)$

i) $\exists x[P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x,y))] \land \forall x \forall y(P(x) \land R(x,y) \to S(y) \land \forall x(S(x) \to Q(x)) \to \forall x(Q(x) \leftrightarrow S(x))$

j) $\forall x \forall y(P(x) \land Q(y) \to R(x,y)) \land \forall x \forall y(P(x) \land R(x,y) \to S(y)) \to \forall x(Q(x) \to S(x))$

k) $[\neg \exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \exists x R(x)] \leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \lor \neg Q(x) \lor R(y))$

l) $\neg \exists x[\exists y P(y) \land Q(x)] \leftrightarrow \forall x \forall y(P(y) \to \neg Q(x))$.

22. Dé una demostración en Hilbert de cada argumento, en caso de ser posible. De lo contrario, encuentre una estructura que demuestre su invalidez. Traduzca en caso de necesidad.

a) Premisas: $\forall x(A(x) \to B(x)), \neg \exists x(A(x) \land B(x))$.
Conclusión $\forall x \neg A(x)$.

b) Premisas: $\forall x(A(x) \to B(x) \lor C(x)), \neg \exists x(B(x) \land C(x)), \exists x(A(x) \land C(x))$.
Conclusión: $\exists x(A(x) \land \neg B(x))$.

c) Premisas: $\neg \exists x \forall y(P(y) \land \neg Q(x))$.
Conclusión: $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$.

d) Premisas: $\forall x[\neg Q(x) \to \exists y(R(x,y) \lor Q(x)], \neg \forall x(P(x) \to Q(x))$.
Cocnlusión $\exists x \exists y(P(x) \land R(x,y))$.

e) Premisas: $\exists x(A(x) \land B(x) \land C(x)), \neg \exists x(A(x) \land B(x) \land D(x))$.
Conclusión $\exists x(B(x) \land C(x) \land \neg D(x))$.

f) Prmisas: $\forall x \forall y[P(x) \land \exists z(Q(z) \land R(y,z)) \to S(x,y)], \forall x[\exists y(P(y) \land S(y,x)) \to T(x)], \neg T(a)$.
Conclusión: $\exists x P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg R(a,y))$.

g) Premisas: $\exists x(P(x) \land R(x,a), S(a), \forall x[P(x) \land \neg \exists y(Q(y) \land R(x,y)) \to \neg \exists z\,(S(z) \land R(x,z))]$.
Conclusión: $\exists x \exists y(P(x) \land Q(y) \land R(x,y))$.

h) No es el caso que algunos vegetales sean frutas. Todas las peras son vegetales. Por lo tanto, no es el caso que alguna pera sea fruta.

i) Los leones atacan a quien sea que toque su cubil. Cualquiera que sea atacado por un león, muere. Jorge no está muerto. Por consiguiente, si existe un león, Jorge no tocó ningún cubil.

23. Determine si los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes. De serlo, encuentre un modelo. En caso contrario, dé una demostración en deducción natural de una contradicción a partir del conjunto.

a) $\{\exists x(A(x) \land \neg B(x)), A(a) \land B(b), a = b\}$

b) $\{\neg\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)), \neg\exists x(Q(x) \wedge R(x)), P(a), Q(b), a = b\}$

c) $\{\exists x[J(x) \wedge \forall y(J(y) \rightarrow x = y)], J(a), J(b), a \neq b\}$

d) $\{P(a) \vee \forall x Q(x), \neg P(b), a = b \wedge \neg Q(c)\}$

e) $\{\forall x\exists y(x \neq y), \exists x\exists y\forall z(z = x \vee z = y)\}$

f) $\{\forall x\forall y(x * y = y * x), \exists z\forall x\forall y(x * y = z)\}$

g) $\{\exists x\exists y(P(x) \wedge Q(y)), \forall x\forall y(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow x * y \neq a), \exists x\exists y(x * y \neq a)\}$

h) $\{\forall x\exists y(f(x) = f(y)), \forall x\exists y(f(x) \neq f(y))\}$

i) $\{\forall x\forall y[x * y = a \rightarrow y = f(x)], \forall x(x * x = a), \exists x(x \neq f(x))\}$

j) $\{\forall x\forall y\forall z(x * (y * z) = (x * y) * z), \forall x(x * a = x), \forall x\exists y(x * y = a), \exists x\exists y (x \neq y)\}$.

24. Para cada uno de los siguientes argumentos exhiba una prueba de su validez (de ser el caso) en Hilbert; de lo contrario, encuentre un modelo contraejemplo.

a) Premisas: $F(a) \wedge G(b), \forall x(F(x) \rightarrow \neg H(x)), \forall x(\neg G(x) \rightarrow H(x))$.
Conclusión $a = b$.

b) Premisas: $\exists y\forall x(F(x) \leftrightarrow x = y)$.
Conclusión: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))$.

c) Premisas: $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y)]$.
Conclusión: $\exists x\forall y(P(y) \leftrightarrow x = y)$.

d) Premisas: $\exists x\exists y(x \neq y), \exists x A(x), \forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x\forall y(A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(x,y))$.
Conclusión: $\exists x\exists y(C(x,y) \wedge x \neq y)$.

e) Premisas: $\forall x[A(x) \rightarrow \exists y B(x,y)], \exists x(A(x) \wedge \neg B(x,a))$.
Conclusión $\exists x\exists y(B(x,y) \wedge y \neq a)$.

f) Premisas: $\forall x\forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x)), \forall x P(x, f(x))$.
Conclusión: $\forall x P(f(f(x)), f(x))$.

g) Premisas: $\forall x R(x, g(x)), \exists x(f(x) \neq g(f(x)))$.
Conclusión: $\exists x\exists y(R(f(x), y) \wedge f(x) \neq y)$.

h) Premisas: $\forall x\forall y(x * y = y * x), \forall x\exists y(x * y = a)$.
Conclusión: $\forall x(x * a = x)$.

i) Premisas: $\forall x\forall y\forall z[x * (y * z) = (x * y) * z], \forall x\forall y\exists z(x = y * z), \forall x\forall z\exists y\ (x = y * z)$.
Conclusión: $\forall y\forall z[\forall x(x * y = x \wedge x * z = x) \rightarrow y = z]$.

j) Premisas: $\forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)), \forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow x \neq y), \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)), \forall x\forall z(x \neq z \rightarrow \exists y B(x,y,z)), \forall x\forall y\forall z[B(x,y,z) \rightarrow (R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee (R(z,y) \wedge R(y,x))]$.
Conclusión: $\forall x\forall z[R(x,z) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge R(y,z))]$.

25. Para cada una de las siguientes fórmulas, si es un teorema lógico, demuéstrelo en deducción natural; de lo contrario, exhiba un contraejemplo (un modelo en el que no se cumple la fórmula en cuestión).

    a) $\forall x[P(x) \leftrightarrow \exists y(P(x) \wedge P(y)]$

    b) $\exists y \forall x(F(x) \leftrightarrow x = y) \wedge \exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

    c) $\forall x \forall y(f(x) = y) \rightarrow \forall x \forall y(x = y)$

    d) $\forall x R(x, x) \wedge \forall y(g(f(y)) = f(y)) \rightarrow \exists z R(z, g(z))$

    e) $\exists x \exists y(x \neq y) \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \rightarrow \exists x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y) \wedge x \neq y)$

    f) $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \leftrightarrow x = y)] \leftrightarrow \exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow x = y)$

    g) $\forall x \forall y(x * y = y * x) \wedge \forall x(f(x) * x = a) \rightarrow \forall x \exists y(x * y = a)$.

26. Presuma los siguientes axiomas Ξ para una relación de equivalencia:

    - $\forall x E(x, x)$
    - $\forall x \forall y(E(x, y) \rightarrow E(y, x))$
    - $\forall x \forall y \forall z(E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$.

    Agregue axiomas de tal suerte que cualquier modelo de ese nuevo conjunto de axiomas tenga exactamente dos clases de equivalencia. [Sugerencia: Considere $a \neq b, \forall x(E(x, a) \vee E(x, b)), \neg E(a, b)$].

27. Determine si los siguientes enunciados son consistentes con los axiomas para una relación de equivalencia (ejercicio previo).

    P1 $\forall x(x = a \leftrightarrow \neg E(x, b))$

    P2 $\exists x(E(a, x) \wedge E(b, x))$.

    [Sugerencia: Derive una contradicción.]

28. Dé una prueba en deducción natural de los siguientes argumentos.

    a) Premisas $\exists x P(x), \exists x Q(x), \forall x[P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow R(x, y))]$
    Conclusión: $\exists x \exists y R(x, y)$. [Sugerencia: prueba informal, suponga $P(u)$ y $Q(v)$. De la premisa 3, $P(u) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow R(u, y))$. De lo previo, deduzca $\forall y\ (Q(y) \rightarrow R(u, y))$. Infiera $Q(v) \rightarrow R(u, v)$.]

    b) Premisas: $\forall x \forall y(x * y = y * x), \forall x \forall y(x^{-1} * y = (x * y)^{-1})$
    Conclusión: $\forall x \forall y(x^{-1} * y = x * y^{-1})$. [Sugerencia: Por premisa 2,

$$\begin{aligned} x^{-1} * y &= (x * y)^{-1} \\ &= (y * x)^{-1} \\ &= y^{-1} * x \\ &= x * y^{-1}. \end{aligned}$$

29. Dé una prueba en deducción natural de los siguientes teoremas de la teoría de grupos (en el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, *, ^{-1}\}$). Los axiomas son los siguientes:

    ☆ $\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z)$

    ☆ $\forall x (x * e = x)$

    ☆ $\forall x (x * x^{-1} = e)$.

    a) Condición suficiente para conmutatividad.

    $$\forall x (x * x = e) \to \forall x \forall y (x * y = y * x)$$

    b) Ley conmutativa para inversos.

    $$\forall x (x * x^{-1} = x^{-1} * x).$$

    c) Ley de cancelación por izquierda.

    $$\forall x \forall y \forall z (z * x = z * y \to x = y).$$

    d) Unicidad de inversos.

    $$\forall x \forall y (x * y = e \to y = x^{-1}).$$

    e)

    $$\forall x [(x^{-1})^{-1} = x].$$

    f) Solución de ecuaciones.
    (a) $\forall x \forall y \exists z (x = y * z)$.
    (b) $\forall x \forall y \exists z (x = z * y)$.

    g)

    $$\forall x (x * x = e) \to \forall x (x = x^{-1}).$$

    h) Inverso de productos.

    $$\forall x \forall y ((x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}).$$

    i)

    $$\exists y \forall x (x * y = y * x).$$

30. Para los siguientes enunciados, muestre que ni él ni su negación se pueden probar a partir de los axiomas de la teoría de grupos (ejercicio previo).

    a) $\exists x \forall y (x = y)$

    b) $\exists x \exists y [x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y)]$

c) $\forall x \forall y (x = x * y)$

d) $\exists y \forall x (x * y = y)$

e) $\forall x \exists y (x * y = y)$

f) $\exists x (x \neq x^{-1}) \rightarrow \exists x \exists y (x * y \neq y * x)$

g) $\forall x \forall y (x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1})$

h) $x \forall y (x * y = y * x \rightarrow y = x^{-1} \vee y = e)$

i) $\exists y \forall x (x * y = y * x^{-1})$

j) $\forall x \forall y [\exists z (x * z = z * y) \rightarrow x * y = y * x]$.

31. Considere el conjunto Ξ (véase ejercicio 26). Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de enunciados es consistente con Ξ. Si el conjunto es consistente con Ξ, describa un modelo; cuando no lo sea, dé una prueba de una contradicción.

a) $\forall x \exists y \neg E(x, y)$

b) $\forall x \forall y (E(x, y) \leftrightarrow f(x) \neq f(y))$

c) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \leftrightarrow E(x, y), \exists x \exists y (x \neq y)$

d) $\exists y \forall x (f(x) = f(y)), \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y), \forall x \exists y \neg E(x, y)$

e) $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge E(x, z) \wedge E(y, z) \wedge \neg E(x, y))$

f) $\forall x \forall y E(x, y), \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

g) $\exists x \exists z \forall x (x \neq y \leftrightarrow E(x, z), \forall y \forall z \exists z (E(y, x) \wedge E(z, x))$

h) $\forall x \exists y (E(x, y) \wedge x \neq y), \forall x \forall y \neg E(x, f(y)), \forall x \exists y (f(y) = x)$

i) $\forall x \exists y (E(x, y) \wedge x \neq y), \forall x \forall y \neg E(x, f(y)), \forall x \exists y (f(y) = x)$

j) $\forall x (E(x, a) \vee E(x, b) \vee E(x, c)), \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg E(x, y)), a \neq b, a \neq c, b \neq c$.

32. Sea Γ el siguiente conjunto de axiomas:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&\forall x \forall y \forall z [x * (y * z) = (x * y) * z], \forall x (x * e = x),\\ &\forall x \forall y \exists z (x * z = y \wedge z * x = y)\}.\end{aligned}$$

❶ Exhiba una prueba en deducción natural de los siguientes enunciados:

1) $\forall x \forall y \forall z (x * z = y * z \leftrightarrow x = y)$.
2) $\forall x \forall y \forall z (z * x = z * y \rightarrow x = y)$.
3) $\forall x (x * e = e * x)$.
4) $\forall x \exists y (x * y = e)$.
5) $\forall x \forall y \forall z (x * y = e \wedge x * z = e \rightarrow y = z)$.

❷ Introduzca un nuevo símbolo de 1-función, h, y un axioma A que defina h como la operación inversa.

❸ Muestre que cada uno de los siguientes enunciados es una consecuencia lógica de $\Gamma \cup A$, dando una prueba en deducción natural.

1) $\forall x(x * h(x) = e)$.
2) $\forall x(x * h(x) = h(x) * x)$.
3) $\forall x(h(h(x)) = x)$.
4) $\forall x \forall y(x * y = y * x)$.
5) $\forall x \forall y(h(x * y) = h(y) * h(x))$.

❹ De una interpretación $\mathfrak{A} = \langle A, *, e\rangle$ de Γ tal que,

1) $\mathfrak{A}$ tiene dos elementos.
2) $\mathfrak{A}$ tiene tres elementos.
3) $\mathfrak{A}$ es infinito.
4) $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y(x \neq y) \wedge \forall x(x * x = e)$.
5) $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y(x * y = x \vee x * y = y)$.

❺ Mediante una prueba en deducción natural de una contradicción, compruebe que cada uno de los siguientes conjuntos de enunciados es inconsistente con Γ.

1) $\{\exists x \exists y(x \neq y), \forall x(x * x = x)\}$.
2) $\{\exists x \exists y(x \neq y), \forall x \forall y(x * y = x \vee x * y = y)\}$.
3) $\{\forall x \forall y \forall z(x * y = x * z \to y * z = e), \exists x \exists y(x \neq y \wedge y = h(x))\}$.
4) $\{\exists x \exists y(h(x) = h(y) \wedge x \neq y)\}$.

33. ¿Qué axiomas se deben añadir a los axiomas de la teoría de grupos (ejercicio 29) para asegurar que cada modelo $\mathcal{G} = \langle G, *, ^{-1}, e\rangle$ satisfaga lo siguiente?

a) G tiene exactamente dos elementos.

b) G tiene al menos tres elementos.

c) $*$ es conmutativa.

d) $\mathfrak{G}$ es un grupo linealmente ordenado.

e) Existe una relación de equivalencia con exactamente tres clases de equivalencia.

34. Suponga que Λ consiste en los axiomas de la teoría de grupos (Ejercicio 29) y que añadimos un nuevo símbolo de 2-predicado R. En cada uno de los siguientes incisos, suponga que los enunciados dados se añaden a Λ. En cada caso, determine si R es una relación de equivalencia.

a) $\forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow x^{-1} = y^{-1})$.

b) $\forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow x = y^{-1})$.

c) $\forall x(x * x = e), \forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow x = y^{-1})$.

d) $\forall x \forall y(R(x,y) \leftrightarrow x * y = y * x)$.

e) $\forall x(x = x^{-1}), \forall x \forall y(R(x,y) \leftrightarrow x * y = y * x)$.

f) $\forall x \forall y[R(x,y) \leftrightarrow \exists z(x * z = z * y)]$.

g) $\forall x \forall y(x * y = y * x), \forall x \forall y[R(x,y) \leftrightarrow \exists z(x * z = y \wedge y * z = x)]$.

35. En este ejercicio se investiga la aritmética de Peano. El lenguaje es $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{0, 1, \cdot, +, <\}$. Los axiomas de la aritmética de Peano $\boldsymbol{T}$ son los siguientes,

P1 $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

P2 $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

P3 $\forall x \forall y \forall z[x + (y + z) = (x + y) + z]$

P4 $\forall x f y \forall z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$

P5 $\forall x \forall y \forall z[x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$

P6 $\forall x(x + 0 = x)$

P7 $\forall x(x \cdot 1 = x)$ ($x + 1$ se llama el sucesor de x)

P8 $\forall x(x + 1 \neq 0)$

P9 $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$

P10 $\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow \exists z(z \neq 0 \wedge y = x + z))$

P11 Para cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula φ, $\varphi_x(0) \wedge \forall y(\varphi_x(y) \rightarrow \varphi_x(y + 1)) \rightarrow \forall x \varphi$.

El axioma (P11) en realidad es un esquema de axiomas pues tenemos un axioma para cada fórmula φ.

Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x(x + 1 \neq x)$.

b) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y(x + y = x \rightarrow y = 0)$.

c) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x[x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = y + 1)]$.

d) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x \forall y \exists z(x = y + z \vee y = x + z)$.

e) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \forall z(x + z = y + z \rightarrow x = y)$.

f) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \forall z(z + x = z + y \rightarrow x = y)$.

g) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x(x \cdot 0 = 0)$.

h) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y(x + y = 0 \rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$.

i) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y \forall z[(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z]$.

j) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall y[\forall x(x \cdot y = x) \rightarrow y = 1]$.

k) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x[x \neq 0 \wedge x \neq 1 \rightarrow \exists y(x = y + (1 + 1))]$.

l) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x(x \not< x)$.

m) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x(x < x+1)$.

n) $\boldsymbol{T} \vdash_N \forall x(x \not< 0)$.

ñ) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y(x < y+1 \to x < y \vee x = y)$.

o) $\boldsymbol{T} \vdash_{\mathfrak{H}} \forall x \forall y[y \neq 0 \to \exists u \exists v(x = y \cdot u + v \wedge v < y)]$.

36. Introducimos un nuevo símbolo de 2-relación $|$ ($x|y$ se interpreta como x divide a y) y un nuevo axioma,

(P12) $\forall x \forall y[x|y \leftrightarrow \exists z(y = x \cdot z)]$.

Exhiba una prueba en deducción natural de los siguientes enunciados a partir de $\boldsymbol{T} \cup (P12)$.

a) $\forall x(x|x)$.

b) $\forall x(1|x)$.

c) $\forall x(x0)$.

d) $\forall x \forall y \forall z(x|y \wedge y|z \to x|z)$.

e) $\forall x \forall y(y \neq 0 \wedge x|y \to x < y \vee x = y)$.

f) $\forall x \forall y(x|y \wedge y|x \to x = y)$.

g) $\forall x \forall y \forall z(x|y \to x|(y \cdot z))$.

h) $\forall x \forall y \forall z[x|y \wedge x|z \to x|(y+z)]$.

i) $\forall x(x|1 \to x = 1)$.

37. Sea Γ la siguiente teoría: símbolos no lógicos: un símbolo de 2-relación $\circ$; símbolo de constante e.

B1 $\forall x, y, z[x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$.

B2 $\forall x(x \circ e = x)$.

B3 $\forall x, y \exists z(x \circ z = y \wedge z \circ x = y)$.

a) Dé una prueba de los siguientes teoremas de Γ.

1) $\forall x, y, z(x \circ z = y \circ z \to x = y)$.
2) $\forall x, y, z(z \circ x = z \circ y \to x = y)$.
3) $\forall x(x \circ e = e \circ x)$.
4) $\forall x \exists y(x \circ y = e)$.
5) $\forall x, y, z(x \circ y = e \wedge x \circ z = e \to y = z)$.

b) Introduzca un nuevo símbolo de 1-función h y un axioma B4 que la defina como la operación inversa.

c) Demuestre que los siguientes enunciados se pueden probar a partir de $\{B1, B2, B3, B4\}$.

1) $\forall x(x \circ h(x) = e)$.
2) $\forall x(x \circ h(x) = h(x) \circ x)$.
3) $\forall x(h(h(x)) = x)$.
4) $\forall x, y(x \circ y = y \circ x)$.
5) $\forall x, y(h(x \circ y) = h(y) \circ h(x))$.

d) Proporcione un modelo $\mathfrak{A} = \langle A, \circ, e\rangle$ de Γ tal que,

1) $\mathfrak{A}$ tiene dos elementos.
2) $\mathfrak{A}$ tiene tres elementos
3) $\mathfrak{A}$ tiene una cantidad infinita de elementos.
4) $\mathfrak{A} \models \exists x, y(x \neq y) \wedge \forall x(x \circ x = e)$
5) $\mathfrak{A} \models \forall x, y(x \circ y = x \vee x \circ y = y)$.

e) Dé una prueba de una contradicción a partir de cada conjunto de enunciados y Γ.

1) $\{\exists x, y(x \neq y), \forall x(x \circ x = x)\}$.
2) $\{\exists x, y(x \neq y), \forall x, y(x \circ y = x \vee x \circ y = y)\}$.
3) $\{\forall x, y, z(x \circ y = x \circ z \to y \circ z = e), \exists x, y(x \neq y \wedge y = h(x))\}$.
4) $\{\forall x(x \circ x = e), \exists x(x \neq h(x))\}$.
5) $\{\exists x, y(h(x) = h(y) \wedge x \neq y)\}$.

3

Los teoremas fundamentales de la lógica de primer orden

Este capítulo es en buena medida uno de los principales del libro, pues concreta y culmina los que hemos visto hasta este punto en lógica clásica de primer orden. Antes desarrollamos la semántica y métodos de prueba de nuestra lógica, y ahora, estableceremos una relación entre ambos desarrollos: los teoremas de completud y completud de Gödel. En pocas palabras, probaremos la equivalencia,

$$\Phi \vdash \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi \models \varphi$$

Pero la relevancia de este capítulo va mucho más lejos. Con los teoremas de correctud y completud disponibles, podemos derivar los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem, completando así la demostración de los resultados fundamentales de la lógica de primer orden. No obstante, esta primera derivación de los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem recurre a un método de prueba formal, en nuestro caso deducción natural, algo que no es indispensable. Por consiguiente, también aparecen demostraciones del teorema de compacidad que no apelan a métodos de prueba formal, y de hecho, introducen una construcción (debida a Henkin) que resulta de gran utilidad en algunas lógicas infinitarias para lidiar con la ausencia de compacidad. El capítulo trae consigo algo también por demás interesante. Hemos colectado diversas aplicaciones del teorema de compacidad, algunas muy conocidas, otras no tanto, en varias áreas de las matemáticas. Desde teoría de gráficas, hasta números reales, pasando por el álgebra y la topología, e involucrando también la imposibilidad de que ciertas teorías sean expresables en primer orden.

3.1 Correctud

Ya probamos la correctud de deducción natural:

$$\vdash_N \subseteq \models .$$

Ahora probaremos el recíproco, el teorema de completud para deducción natural: las reglas de deducción natural son suficientes para derivar φ a partir de Φ cuando φ es una consecuencia lógica de Φ, es decir,

$$\Phi \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_N \varphi.$$

Ese es entonces nuestro objetivo, pero para lograrlo necesitamos obtener varios resultados preliminares y presentar algunas nociones. ¡Cuidado! a continuación damos una definición de conjunto consistente de fórmulas, noción que ya habíamos introducido (capítulo II volumen I) antes como: un conjunto de fórmulas es consistente si tiene un modelo; afortunadamente, pronto veremos que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 3.1.1. (a) El conjunto Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas es consistente, $Con(\Phi)$, si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que no es cierto que $\Phi \vdash_N \varphi$.
(b) Φ es inconsistente si para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula φ se cumple

$$\Phi \vdash_N \varphi.$$

En lo inmediato trabajamos con esta noción de conjunto consistente, no con la dada en el capítulo II del volumen I.

Definición 3.1.2. $\bot \equiv \neg(\forall x(x = x))$ (Falsum).

Un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es inconsistente si y sólo si podemos derivar de él una contradicción, es decir, dos enunciados contradictorios entre sí, como enseguida confirmamos.

 **Teorema 3.1.3.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) Φ *es inconsistente.*
(2) $\neg Con(\Phi)$.
(3) Existe una $\mathcal{L}$*-fórmula* φ *tal que* $\Phi \vdash_N \varphi$ *y* $\Phi \vdash_N \neg\varphi$.
(4) $\Phi \vdash_N \bot$.

Demostración. En (1)⇔(2) la prueba es inmediata, mientras que (2) ⇒ (3) es trivial.
(3)⇒(4). Sea φ como en (3).

1. $\Phi \vdash_N \varphi$ Hip.
2. $\Phi \vdash_N \neg\varphi$ Hip.
3. $\Phi \vdash_N \bot$ ¬1 en 1,2

es una derivación de $\perp$ a partir de Φ.

(4)⇒(1) Supongamos que $\Phi \vdash_N \perp$ y sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Por el corolario 2.2.8 existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito con $\Phi' \vdash_N \perp$. Sea $y \in Var - (Fr(\Phi') \cup \{x\})$. Note que $Var - (Fr(\Phi') \cup \{x\}) \neq \varnothing$ porque Φ' es finito.

Tenemos la siguiente derivación de φ a partir de Φ,

1. $\Phi' \vdash_N \neg\forall x(x = x)$ Elección de Φ'.
2. $\Phi' \vdash_N (x = x)_x(x)$.
3. $\Phi' \vdash_N \forall x(x = x)$ $(\forall 2)$ en 2.
4. $\Phi' \vdash_N \varphi$. $\neg 1$ en 1,3.
5. $\Phi \vdash_N \varphi$ Monotonía en 4.

□

Corolario 3.1.4. *Φ es inconsistente si y sólo si existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito e inconsistente.*

Demostración. Φ es inconsistente si y sólo si $\Phi \vdash_N \perp$, si y sólo si existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito tal que $\Phi' \vdash_N \perp$, si y sólo si existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito e inconsistente. □

Teorema 3.1.5. *(a) $\Phi \vdash_N \varphi$ si y sólo si existe $\Phi' \subseteq \Phi$ finito tal que $\Phi' \vdash_N \varphi$.*
(b) $Con(\Phi)$ si y sólo si para cada $\Phi' \subseteq \Phi$ finito, Φ' es consistente.

Demostración. Es inmediata de los resultados previos y de la definición de consistente. □

Corolario 3.1.6. *Sea $\{\Phi_i : i \in I\}$ una $\subseteq$-cadena de conjuntos de $\mathcal{L}$-fórmulas consistentes. Entonces*

$$\bigcup_{i \in I} \Phi_i$$

es consistente.

Demostración. De ser $\bigcup_{i\in I} \Phi_i$ inconsistente, existiría $\Phi' \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi_i$ finito e inconsistente. En vista de que $\{\Phi_i : i \in I\}$ es una $\subseteq$-cadena, $\Phi' \subseteq \Phi_i$ para algún $i \in I$ por lo que Φ_i es inconsistente, una contradicción. □

Teorema 3.1.7. *(a) $\Phi \vdash_N \varphi$ si y sólo si $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.*
(b) $\Phi \vdash_N \neg\varphi$ si y sólo si $\Phi \cup \{\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración. (a) ⇒) Damos una prueba de $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \perp$,

1. $\Phi \vdash_N \varphi$. Hipótesis

2. $\{\Phi, \forall x(x = x)\} \vdash_N \varphi$ Monotonía en 1.

3. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \bot$ Contrapositiva en 2.

$\Leftarrow$) Damos una prueba de φ a partir de Φ.

1. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \bot$ Hipótesis

2. $\{\Phi, \neg\varphi\} \vdash_N \neg\bot$ (ya que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, se puede derivar cualquier fórmula).

3. $\Phi \vdash_N \varphi$ Prueba indirecta.

(b) Según (a) basta mostrar que $\Phi \cup \{\neg\neg\varphi\}$ es inconsistente si y sólo si $\Phi \cup \{\varphi\}$ es inconsistente.

$\Rightarrow$)

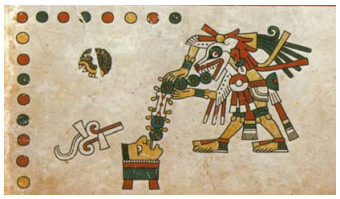
1. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \neg\neg\varphi$ 2.2.9.

2. $\{\Phi, \neg\neg\varphi\} \vdash_N \bot$ Hipótesis

3. $\{\Phi, \varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash_N \bot$ Monotonía en 2.

4. $\{\Phi, \varphi\} \vdash_N \bot$ MP en 1,3.

$\Leftarrow$) Basta intercambiar los papeles de φ y $\neg\neg\varphi$ en la prueba recién escrita. ❐



Hace mucho tiempo, no se conocía el fuego, y los hombres debían comer sus alimentos crudos.

Los Tabaosimoa, los ancianos, se reunieron y discutieron sobre la manera de obtener alguna cosa que les procuraría el calor y les permitiría cocer sus alimentos. Ayunaron y discutieron... y vieron pasar por encima de sus cabezas una bola de fuego que se sumergió en el mar pero que ellos no pudieron alcanzar.

Entonces, fatigados, los ancianos reunieron personas y animales para preguntarles si alguno de ellos podía aportarles el fuego. Un hombre propuso traer un rayo de sol a condición de que sean cinco para ir al lugar donde salía el sol. Los Tabaosimoa aprobaron la proposición y pidieron que los cinco hombres se dirigieran hacia el oriente mientras que ellos, llenos de esperanza, continuarían suplicando y ayunando. Los cinco partieron y llegaron a la montaña donde nacía el fuego.

Esperaron la llegada del díí y se dieron cuenta que el fuego nacía sobre otra montaña, más alejada. Retomaron entonces su camino. Llegados a la montaña, en un nuevo amanecer, vieron el fuego nacer sobre una tercera montaña, aún más alejada. Prosiguieron así hasta la cuarta, después la quinta montaña donde, desalentados, decidieron regresar, tristes y fatigados. Contaron esto a los Ancianos quienes pensaron que jamás podrían alcanzar el Sol. Los Tabaosimoa les agradecieron y se volvieron a poner a reflexionar sobre lo que podrían hacer.

Es entonces que apareció Yaushu, un Tlacuache sabio, y él les relató un viaje que había hecho hacia el oriente. Había percibido una luz lejana y quiso verificar lo que era. Se puso a marchar durante noches y días, durmiendo y comiendo apenas. La noche del quinto día pudo ver que en la entrada de una gruta ardía un fuego de madera de donde se elevaban grandes llamas y un torbellino de chispas. Sentado sobre un banco un hombre viejo miraba el fuego. Era grande y llevaba un taparrabo de piel, los cabellos blancos y los ojos horriblemente brillantes. De tanto en tanto alimentaba esta «rueda» de luz con leños. El Tlacuache contó cḿo Í permaneció escondido detrás de un árbol y que, espantado, él hizo marcha atrás con precaución. Se dio cuenta que se trataba de alguna cosa caliente y peligrosa.

Cuando él hubo acabado su relato, los Tabaosimoa pidieron a Yaushu si él podía volver y traerles un poquito. El Tlacuache aceptó, pero los Ancianos y su gente debían ayunar y orar a los dioses haciendo ofrendas. Ellos consintieron pero le amenazaron de muerte si éste los engañaba. Yaushu sonrió sin decir una palabra. Los Tabaosimoa ayunaron durante cinco días y llenaron cinco sacos de pinole que dieron al Tlacuache. Yaushu les anunció que estaría de regreso en otros cinco días; debían esperarlo despiertos hasta medianoche y si él moría, les recomendó de no lamentarse por él.

Portando su pinole, él llegó al lugar donde el viejo hombre contemplaba el fuego. Yaushu lo saludó y fue solamente a la segunda vez que él obtuvo una respuesta. El viejo le preguntó lo que hacía tan tarde en ese lugar. Yaushu respondió que era el emisario de Tabaosimoa y que buscaba agua sagrada para ellos. Estaba muy fatigado y preguntó si podía dormir antes de retomar su camino la mañana siguiente. Debió suplicarle mucho pero al fin el viejo le permitió quedarse a condición de que no toque nada. Yaushu se sentó cerca del fuego e invitó al viejo a compartir su pinole. Este vertió un poco sobre el leño, tiró algunas gotas por encima de su hombro, después bebió el resto. El viejo le agradeció y se durmió.

Mientras que Yaushu lo escuchaba roncar, pensaba la manera de robar el fuego. Se levantó rápidamente, tomó una brasa con su cola y se alejó. Había hecho un buen pedazo del camino cuando sintió que una borrasca venía sobre él y vio, frente a él, al viejo encolerizado.

Él lo reprendió por tocar y robar una cosa que no le pertenecía; lo mataría. Inmediatamente él tomó a Yaushu para quitarle el tizón pero aunque éste lo quemaba no lo soltaba. El viejo lo pisoteaba, le trituraba los huesos, lo sacudía y lo balanceaba. Seguro de haberlo matado, se vuelve a vigilar el fuego. Yaushu rodó, rodó y rodó... envuelto en sangre y fuego; llegó así delante de los Tabaosimoa que estaban orando.

Moribundo les dio el tizón. Los Ancianos encendieron los leños. El Tlacuache fue nombrado «héroe Yaushu». Lo vemos aún hoy marchar penosamente por los caminos con su cola pelada.

Leyenda azteca

Si Φ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, recuerde que Φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$ (lo que en el volumen I llamamos consistente); esto lo denotamos como $Sat(\Phi)$. ¿Qué relación guardan *Sat* y *Con*?

El siguiente teorema da una respuesta parcial a esta importante pregunta.

Teorema 3.1.8. *Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Entonces $Sat(\Phi) \Rightarrow Con(\Phi)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \Phi$. Si Φ fuera inconsistente, tendríamos $\Phi \vdash_N \bot$. Por la correctud de deducción natural, $\Phi \models \bot$, en particular $\mathfrak{A} \models \bot$, lo que significa $\neg \forall\, a \in A(a = a)$, una contradicción. ∎

Probaremos que el recíproco del teorema 3.1.8 también es cierto; es decir, si Φ es consistente, es satisfacible, tiene un modelo. Así que dado un conjunto consistente de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ, debemos encontrarle un modelo. La prueba de esto es bastante elaborada y se basa en una idea de Leon Henkin. Primero construimos modelos para conjuntos de fórmulas consistentes con características muy especiales, conocidos como conjuntos de Henkin. Después probaremos que cualquier conjunto de fórmulas consistente se puede agrandar hasta conformar un conjunto de Henkin. Formalmente, para cada conjunto Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas existe un lenguaje $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ y un conjunto Ψ de $\mathcal{L}^*$-fórmulas tal que

$\Phi \subseteq \Psi$. El $\mathcal{L}$-reducto de un modelo de Ψ es un modelo de Φ, es decir, un modelo $\mathfrak{A}$ de Ψ se convierte en un modelo de Φ simplemente «olvidando» la interpretación de los símbolos no lógicos en $\mathcal{L}^* - \mathcal{L}$.

Definición 3.1.9. Sea Ψ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Ψ es un conjunto de Henkin si se cumplen las siguientes condiciones.

(H0) Para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ ($\Psi \vdash_N \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \Psi$).

(H1) Para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ ($\neg\varphi \in \Psi$ si y sólo si $\varphi \notin \Psi$).

(H2) Para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ ($\forall\, v\varphi \in \Psi \Leftrightarrow \forall\, c \in \mathcal{C}\varphi_v(c) \in \Psi$).

(H3) Para algún $\mathcal{L}$-término t existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $(t = c) \in \Psi$.

Lema 3.1.10. *La conjunción de (H0) y (H1) es equivalente a la afirmación de que Ψ es máximo consistente, es decir, Ψ no puede agrandarse (admitir más fórmulas) sin perder consistencia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos la validez de (H0) y (H1). Se sigue la consistencia de Ψ, de lo contrario existiría una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que $\Psi \vdash_N \varphi$ y $\Psi \vdash_N \neg\varphi$, por lo que de (H0) $\varphi, \neg\varphi \in \Psi$, lo que contradice (H1).

Por otro lado, por (H1), para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ, Ψ contiene a φ o a $\neg\varphi$, por lo que Ψ es $\subseteq$-máximo consistente.

$\Leftarrow$) Supongamos que Ψ es máximo consistente.

Afirmación 1. Se cumple (H0).

Demostración de la afirmación 1. Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Debemos cerciorarnos de que $\Psi \vdash_N \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \psi$. Supongamos que $\Psi \vdash_N \varphi$. Para confirmar $\varphi \in \Psi$, basta probar que $\Psi \cup \{\varphi\}$ es consistente pues Ψ es máximo consistente. Si $\Psi \cup \{\varphi\}$ no fuese consistente, tendríamos la siguiente derivación de $\bot$ a partir de Ψ.

1. $\{\Psi, \varphi\} \vdash_N \bot$ Inconsistencia supuesta de $\Psi \cup \{\varphi\}$.
2. $\Psi \vdash_N \varphi$ Hipótesis.
3. $\Psi \vdash_N \bot$ MP.

Esto contradice la consistencia de Ψ.

Si $\varphi \in \Psi$, es inmediato, de la regla de inicio, que $\Psi \vdash_N \varphi$. (1)

Para probar (H1) fijamos una $\mathcal{L}$-fórmula φ. Puesto que Ψ es máximo consistente, $\varphi \notin \Psi$ es equivalente a que $\Psi \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, lo que según 3.1.7 es equivalente a $\Psi \vdash_N \neg\varphi$ y esto a su vez es equivalente, según (H0), a $\neg\varphi \in \Psi$, por lo que tenemos (H1). ∎

Nuestro objetivo inmediato es: dado un conjunto de Henkin Ψ, construirle un modelo. La idea es muy similar a la del universo de Herbrand, el universo estará constituido por los $\mathcal{L}$-términos básicos. En consecuencia, en este universo se interpretarán los símbolos de relación, función y constante en forma obvia; por ejemplo, $(s_1, \ldots, s_n) \in R$ si y sólo si $R(s_1, \ldots, s_n) \in \Psi$. En particular, nuestro modelo respeta la igualdad. Sin embargo, hay un problema, pues podemos tener dos términos s, t que sintácticamente sean distintos (es decir, diferentes como cadenas de símbolos) pero que según Ψ sean iguales, esto es, $\Psi \vdash_N s = t$. Entonces $s \neq t$, pero $s = t \in \Psi$. Para evadir esta patología, igualamos en nuestro universo tales $\mathcal{L}$-términos. Esto se logra mediante una relación de equivalencia $\sim$ en el universo y al pasar a otro universo constituido por las clases de equivalencia según $\sim$. A continuación, los detalles.

Definición 3.1.11. Sean s, t $\mathcal{L}$-términos. Decimos que $s \sim t$ si $s = t \in \Psi$.

Lema 3.1.12. *La relación $\sim$ es de equivalencia en el conjunto $Tm(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$-términos. Denotamos con $[s]$ la clase de equivalencia en $Tm(\mathcal{L})$ del $\mathcal{L}$-término s.*

Demostración. Según la regla de inicio, se cumple $\Psi \vdash_N s = s$, así que $\sim$ es reflexiva. Por 2.2.10 $\sim$ es simétrica y transitiva. ∎

Sea $A = Tm(\mathcal{L})/\sim$ el universo de nuestro modelo $\mathfrak{A}$. Ahora debemos interpretar los símbolos de relación, función y constante. Con este fin definimos

$$\begin{aligned} ([s_1]^{\mathfrak{A}}, \ldots, [s_n]^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}} \quad &\text{si y sólo si} \quad R(s_1, \ldots, s_n) \in \Psi \\ f^{\mathfrak{A}}([s_1]^{\mathfrak{A}}, \ldots, [s_n]^{\mathfrak{A}}) &= [f(s_1, \ldots, s_n)] \\ c^{\mathfrak{A}} &= [c] \end{aligned}$$

para cada $f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}$ y $c \in \mathcal{C}$.

Debemos corroborar que esta definición no depende de los representantes. Esto es una consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 3.1.13. *Si $\vec{r}, \vec{s}$ son $\mathcal{L}$-términos con $r_i \sim s_i$,*

1. $$R(s_1, \ldots, s_n) \in \Psi \Leftrightarrow R(r_1, \ldots, r_n) \in \Psi.$$

2. $$f^{\mathfrak{A}}(s_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, s_n^{\mathfrak{A}}) \sim f^{\mathfrak{A}}(r_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, r_n^{\mathfrak{A}}).$$

Demostración. (1) Por simetría, basta probar $\Rightarrow$). Se cumple $R(s_1, \ldots, s_n) \in \Psi$, es decir $\Psi \vdash_N R(s_1, \ldots, s_n)$. Por inducción en $j \leq n$ probaremos que

$$\Psi \vdash_N R(r_1, \ldots, r_{j-1}, s_j, \ldots, s_n).$$

Para $j = n$ se obtiene

$$\Psi \vdash_N R(r_1, \ldots, r_n).$$

Caso $j = 0$. Se cumple, por hipótesis (note que $r_1, \ldots, r_{0-1} = \varnothing$). Caso $j > 0$. De $\Psi \vdash_N s_{j-1} = r_{j-1}$ y $\Psi \vdash_N R(r_1, \ldots, r_{j-2}, s_{j-1}, \ldots, s_n)$, se sigue de los axiomas de $=$ que

$$\Psi \vdash_N R(r_1, \ldots, r_{j-2}, r_{j-1}, s_j, \ldots, s_n),$$

así que

$$\Psi \vdash_N R(r_1, \ldots, r_{j-1}, s_j, \ldots, s_n),$$

lo que demuestra (1).

(2) Por inducción en $i \leq n$ probemos que

$$\Psi \vdash_N f(s_1, \ldots, s_n) = f(r_1, \ldots, r_{i-1}, s_i, \ldots, s_n).$$

El caso $i = n$ arroja la afirmación que buscamos. Caso $i = 0$. La afirmación se obtiene de la regla de inicio. Caso $i > 0$. Procedemos como en la prueba de (1). ◻

Con este lema a la mano estamos seguros de que la interpretación de los símbolos no lógicos de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{A}$ es correcta y $\mathfrak{A}$ se convierte en una $\mathcal{L}$-estructura. Definamos una $\mathfrak{A}$-asignación β mediante $\beta(v_n) = [v_n]$ y probemos que $\mathfrak{A} \models \Psi[\beta]$.

Lema 3.1.14. *Si t es un $\mathcal{L}$-término, entonces $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = [t]$.*

Demostración. Por inducción en la construcción de t.

- Si $t = v_n$, $v_n^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_n) = [v_n]$.
- Si $t = c$, $c^{\mathfrak{A}}[\beta] = c = [c]$.
- Si $t = f(s_1, \ldots, s_n)$, se cumple lo siguiente.

$$\begin{aligned}(f(s_1, \ldots, s_n))^{\mathfrak{A}}[\beta] &= f(s_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \\ &= f([s_1^{\mathfrak{A}}[\beta]], \ldots, [s_n^{\mathfrak{A}}[\beta]]) \\ &= [f(s_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s_n^{\mathfrak{A}}[\beta])].\end{aligned}$$

◻

Teorema 3.1.15. *Sean Ψ un conjunto de Henkin, $\mathfrak{A}$ el modelo recién descrito y β la $\mathfrak{A}$-asignación recién definida. Entonces $\mathfrak{A} \models \Psi[\beta]$.*

Demostración. Sean φ una $\mathcal{L}$-fórmula y $n_\varphi =$ la cantidad de conectivos lógicos y cuantificadores en φ. Por inducción en n probaremos que,

(✻) Para toda $n < \omega$ y cada $\mathcal{L}$-fórmula φ,

$$(n_\varphi = n \Rightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \varphi \in \Psi)).$$

De aquí se sigue directamente la afirmación del teorema.

Sea entonces $n < \omega$ y suponga que (✻) se cumple para toda $\mathcal{L}$-fórmula ψ con $n_\psi < n$. Tomemos una $\mathcal{L}$-fórmula con $n_\varphi = n$. Por inducción en la construcción de φ:

✷ $\varphi \equiv r = s$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\Leftrightarrow s^{\mathfrak{A}}[\beta] = r^{\mathfrak{A}}[\beta]\\ &\Leftrightarrow [s] = [r]\\ &\Leftrightarrow s \sim r\\ &\Leftrightarrow s = r \in \Psi\\ &\Leftrightarrow \varphi \in \Psi\end{aligned}$$

✷ $\varphi \equiv R(s_1, \ldots, s_n)$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(s_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s_n^{\mathfrak{A}}[\beta])\\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}([s_1^{\mathfrak{A}}[\beta]], \ldots, [s_n^{\mathfrak{A}}[\beta]])\\ &\Leftrightarrow R(s_1, \ldots, s_n) \in \Psi\end{aligned}$$

✷ $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])\\ &\overset{\text{h. i.}}{\Leftrightarrow} (\varphi_1 \in \Psi \quad \text{y} \quad \varphi_2 \in \Psi)\\ &\overset{(H0)}{\Leftrightarrow} (\Psi \vdash_N \varphi_1 \quad \text{y} \quad \Psi \vdash_N \varphi_2)\\ &\overset{\wedge\text{-reglas}}{\Leftrightarrow} \Psi \vdash_N \varphi_1 \wedge \varphi_2\\ &\overset{(H0)}{\Leftrightarrow} \varphi \in \Psi\end{aligned}$$

✷ $\varphi \equiv \neg\psi$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta]\\ &\overset{\text{h.i}}{\Leftrightarrow} \psi \notin \Psi\\ &\overset{(H1)}{\Leftrightarrow} \neg\psi \in \Psi\\ &\Leftrightarrow \varphi \in \Psi\end{aligned}$$

✷ $\varphi \equiv \forall v\psi$. Recuerde que el universo de nuestra $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es el conjunto $\{[t] : t \in Tm(\mathcal{L})\}$. Por (H3) cada término es $\sim$-equivalente a un símbolo de constante, así que A consiste precisamente en el conjunto de clases de equivalencia de símbolos de constante, es decir, es el conjunto

$$\{[c] : c \in \mathcal{C}\}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow & \forall\, a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[\beta^{v/a}] \\
\Leftrightarrow & \text{ para toda } c \in \mathcal{C}\ \mathfrak{A} \models \psi[\beta^{v/[c]}] \\
\Leftrightarrow & \text{ para toda } c \in \mathcal{C}\ \mathfrak{A} \models \psi[\beta^{v/c^{\mathfrak{A}}[\beta]}] \\
\Leftrightarrow & \text{ para toda } c \in \mathcal{C}\ \mathfrak{A} \models \psi_v(c)[\beta] \\
& \text{(Note que } sust(\psi, c, v)) \\
\overset{\text{h.i}}{\Leftrightarrow} & \text{ para toda } c \in \mathcal{C} \psi_v(c) \in \Psi \\
\overset{(H2)}{\Leftrightarrow} & \forall\, v\psi \in \Psi \\
\Leftrightarrow & \varphi \in \Psi.
\end{aligned}$$

Queda demostrado el teorema. □

Corolario 3.1.16. *Si Ψ es un conjunto de Henkin, cada subconjunto de Ψ es satisfacible.* □

Bueno, sabemos ya que todo conjunto de Henkin es satisfacible, pero ¿qué pasa si tenemos un conjunto arbitrario Φ de fórmulas? Es decir, puede ocurrir que Φ no sea de Henkin. Aun suponiendo que es consistente, ¿cómo sabemos que es satisfacible?

Para contestar a esta interrogante procedemos a demostrar que todo conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas consistente Φ se puede agrandar (se pueden añadir fórmulas a Φ) hasta volverlo de Henkin.

Con este fin expandemos nuestro lenguaje mediante nuevos símbolos de constante.

Definición 3.1.17. Sean $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un lenguaje y C un conjunto de nuevos símbolos de constante, es decir, $C \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}) = \varnothing$. Definimos $\mathcal{L}(C) = (\mathcal{C} \cup C, \mathcal{R}, \mathcal{F})$. En el caso especial $C = \{c\}$, anotamos simplemente $\mathcal{L}(c)$.

Definición 3.1.18. Definimos $C = \{(x, \varphi) : x \in Var, \varphi \in Fml(\mathcal{L})\}$ y $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(C)$.

Así que para cada variable x y cada $\mathcal{L}$-fórmula φ existe un nuevo símbolo de constante $c_{x,\varphi}$. Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y $x \in Var$, sea

$$\varphi^x \equiv \exists\, x\varphi \to \varphi_x(c_{x,\varphi}).$$

Además, sea $\Gamma = \{\varphi^x : x \in Var, \varphi \in Fml(\mathcal{L})\}$. Si Φ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, sea $\Phi' = \Phi \cup \Gamma$.

Quisiéramos probar que Φ' es $\mathcal{L}'$-consistente cuando Φ es $\mathcal{L}$-consistente. Para ello es necesario transformar una posible derivación de $\bot$ a partir de Φ' en $\mathcal{L}'$ en una derivación de $\bot$ a partir de Φ en $\mathcal{L}$; en cierto sentido, se trata de eliminar las nuevas constantes.

Definición 3.1.19. Sea $z \in Var$ y $c \in \mathcal{C} \cup C$.

(a) Para un $\mathcal{L}(C)$-término r definimos la sustitución $r_c(z)$ en forma recursiva:

$$\begin{aligned} y_c(z) =& y \\ d_c(z) =& \begin{cases} d, & \text{si } d \neq c \\ z, & \text{si } d = c. \end{cases} \\ (f(r_1, \ldots, r_n))_c(z) =& f((r_1)_c(z), \ldots, (r_n)_c(z)). \end{aligned}$$

(b) Si φ es una $\mathcal{L}(C)$-fórmula, definimos por recursión en la construcción de φ la sustitución $\varphi_c(z)$ como

$$\begin{aligned} (r_1 = r_2)_c(z) \equiv& (r_1)_c(z) = (r_2)_c(z) \\ R(r_1, \ldots, r_n)_c(z) \equiv& R((r_1)_c(z), \ldots, (r_n)_c(z)) \\ (\psi_1 \wedge \psi_2)_c(z) \equiv& ((\psi_1)_c(z) \wedge (\psi_2)_c(z)) \\ (\neg\psi)_c(z) \equiv& \neg(\psi_c(z)) \\ (\forall y \psi)_c(z) \equiv& \forall y (\psi_c(z)). \end{aligned}$$

Si Φ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas,

$$\Phi_c(z) = \{\varphi_c(z) : \varphi \in \Phi\}.$$

Lema 3.1.20. *[Eliminación de constantes] Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y c un símbolo de constante nuevo. Además, sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}(c)$-fórmulas y φ una $\mathcal{L}(c)$-fórmula. Si se cumple $\Phi \vdash_{\mathcal{L}(c)} \varphi$, entonces $\Phi_c(z) \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_c(z)$ para toda variable z excepto una cantidad finita de ellas.*

Demostración. Sean $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n) = \gamma$ una derivación de $\Phi \vdash_{\mathcal{L}(c)} \varphi$ y

$$Z = \bigcup \{Var(\Phi_i \cup \{\varphi_i\}) : i \leq n\}.$$

Entonces Z es finito. Mostraremos que para $z \in Var - Z$, $\gamma' = (((\Phi_i)_c(z), (\varphi_i)_c(z)) : i \leq n)$ es una derivación de $\Phi_c(z) \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_c(z)$. Ya que $\Phi_n \subseteq \Phi$, $\varphi_n = \varphi$, $\Phi_i \subseteq Fml(\mathcal{L}(c))$ es finito y φ_i es una $\mathcal{L}(c)$-fórmula para $i \leq n$, se cumple que $(\Phi_n)_c(z) \subseteq \Phi_c(z)$, $(\varphi_n)_c(z) = \varphi_c(z)$, $(\Phi_i)_c(z) \subseteq Fml(\mathcal{L})$ es finito y $(\varphi_i)_c(z)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula para $i \leq n$. Sólo nos resta cerciorarnos de que la sucesión, en cada posición $i \leq n$, está bien formada. Sea $i \leq n$ arbitrario. En la posición i de γ ocurre alguno de los siguientes casos.

Caso 1. (Inicio) Entonces $\varphi_i \in \Phi_i$ o existe un $\mathcal{L}(c)$-término s tal que $\varphi_i \equiv s = s$. Se

sigue que $(\varphi_i)_c(z) \in (\Phi_i)_c(z)$ o $(\varphi_i)_c(z) \equiv s_c(z) = s_c(z)$, con $s_c(z)$ como un $\mathcal{L}$-término. Así que se cumple la regla inicio en la posición i de γ.

Caso 2. Se cumple $(\wedge 1)$, es decir, existen $j < i$ y una $\mathcal{L}(c)$-fórmula ψ tales que $\Phi_j = \Phi_i$, $\varphi_j = (\varphi_i \wedge \psi)$. En este caso $((\Phi_j)_c(z) = (\Phi_i)_c(z) \wedge (\varphi_j)_c(z) = (\varphi_i)_c(z) \wedge \psi_c(z))$, donde $\psi_c(z)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula. En consecuencia, $(\wedge 1)$ se cumple en la posición i de γ'.

Caso 3. $(\wedge 2)$, $(\wedge 3)$, $(\neg 1)$ y $(\neg 2)$ se procede como en el caso 2, al menos en forma similar.

Caso 4. Se cumple $\forall 1$, es decir, existen $j < i$, una $\mathcal{L}(c)$-fórmula φ y un $\mathcal{L}(c)$-término s tales que $\Phi_j = \Phi_i$, $\varphi_j = \forall x\varphi$, $sust(\varphi, s, x)$, y $\varphi_i = \varphi_x(s)$. Sean $\varphi' = \varphi_c(z)$ y $s' = s_c(z)$. Entonces φ' es una $\mathcal{L}$-fórmula, s' es un $\mathcal{L}$-término y $(\varphi_j)_c(z) = \forall x\varphi'$. Puesto que $Var(\varphi) \subseteq Var(\varphi_j) \subseteq Z$, $z \notin Z$ y $sust(\varphi, s, x)$, se sigue que $sust(\varphi', x, s')$. Ya que $z \notin Var(\varphi_j)$ y $z \notin x$, es cierto que

$$(\varphi_i)_c(z) = (\varphi_x(c))_c(z) = (\varphi_c(z))_x(s') = \varphi'_x(s').$$

Por ello se cumple $(\forall 1)$ en la posición i de γ'.

Caso 5. Se cumple $(\forall 2)$, es decir, existen $j < i$, una $\mathcal{L}(c)$-fórmula φ y una variable y tales que $\Phi_j = \Phi_i$, $\varphi_j = \varphi_x(y)$, $y \notin lib(\Phi_i) \cup Var(\varphi)$ y $\varphi_i = \forall x\varphi$. En este caso, sin pérder generalidad, podemos suponer que $y \neq z$, ya que $Var(\varphi_j) \subset Z$ y $z \notin Z$; esto es evidente si $y \in Var(\varphi_j)$; si $y \notin Var(\varphi_j)$, entonces $\varphi_j = \varphi$ y $x \notin lib(\varphi)$ sustituimos y por $y' \in Var - (Z \cup \{z\})$; tenemos $\varphi_j \equiv \varphi \equiv \varphi_x(y')$ pues $x \notin lib(\varphi)$ y $y' \notin lib(\Phi_i) \cup Var(\varphi)$ dado que éste es un subconjunto de Z. Observe que $Var(\varphi) \subseteq Var(\varphi_i) \subseteq Z$. Así que supongamos $y \neq z$. Sea $\varphi \equiv \varphi_c(z)$. Entonces $\varphi' \in Fml(\mathcal{L})$ y $(\varphi_i)_c(z) \equiv \forall x\varphi'$. Puesto que $y \notin lib(\Phi_i) \cup Var(\varphi) \cup \{z\}$, se sigue $y \notin lib((\Phi_i)_c(z) \cup Var(\varphi')$. Dado que $z \neq x$ y $x \in Z$, deducimos

$$(\varphi_j)_c(z) = (\varphi_x(y))_c(z) = \varphi'_x(y),$$

por lo que se cumple $(\forall 2)$ en la posición i de γ'.

Caso 6. Se cumple $(=)$, es decir, existen $j_1, j_2 < i$ con $\Phi_{j_i} = \Phi_i$, $\Phi_{j_2} = \Phi_i$, $\varphi_{j_i} \equiv r = s$, $\varphi_{j_2} \equiv \varphi_x(r)$, y $\varphi_i = \varphi_x(s)$. Sin perder generalidad, podemos suponer $x \neq z$, a saber, escoger una variable $x' \notin Var(\varphi) \cup \{x, z\}$ y definir $\tilde{\varphi} \equiv \varphi_x(x')$. Entonces, $\tilde{\varphi}$ es una $\mathcal{L}(c)$-fórmula atómica. Ya que para $t \in Tm(\mathcal{L}(c))$,

$$(\varphi_x(x'))_{x'}(t) = \varphi_x(t)$$

(que se demuestra fácilmente por inducción en la construcción de fórmulas atómicas), podemos trabajar con $\tilde{\varphi}$ en lugar de φ y con x' en lugar de x, así que, de hecho, sí nos está permitido suponer $x \neq z$. Sean entonces $\varphi' \equiv \varphi_c(z)$, $r' = r_c(z)$ y $s' = s_c(z)$. Se cumple que φ' es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica y r', s' son $\mathcal{L}$-términos. Además, $(\varphi_{j_1})_c(z) \equiv r' = s'$. Dado que $x \neq z$, deducimos

$$(\varphi_{j_2})_c(z) = (\varphi_x(r))_c(z) = (\varphi_c(z))_x(r') = \varphi'_x(r'),$$

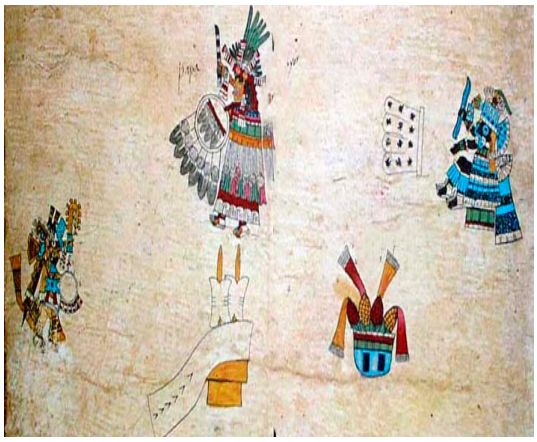
así como

$$(\varphi_i)_c(z) = (\varphi_x(s))_c(z) = (\varphi_c(z))_x(s') = \varphi'_x(s'),$$

de donde se infiere que $(=)$ se cumple en la posición i de γ.

Caso 7. Se cumple la monotonía, es decir, existe $j < i$ con $\Phi_j \subseteq \Phi_i$ y $\varphi_j = \varphi_i$. Ante tal situación, es claro que $(\Phi_j)_c(z) \subseteq (\Phi_i)_c$ y $(\varphi_j)_c(z) = (\varphi_i)_c(z)$, por lo que se cumple la monotonía en la posición i de γ'.

Con ello hemos mostrado que γ' es una prueba de $\Phi_c(z) \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_c(z)$. ☐



Corolario 3.1.21. *Sean Φ un conjunto de $\mathcal{L}(c)$-fórmulas y φ un $\mathcal{L}(c)$-fórmula. Si $C' \subseteq C$ es tal que $\Phi \subseteq Fml(\mathcal{L}(C'))$ y $\varphi \in Fml(\mathcal{L}(C'))$, entonces*

$$\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C)} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C')} \varphi.$$

En particular, $Con^{\mathcal{L}(C')}(\Phi) \Rightarrow Con^{\mathcal{L}(C)}(\Phi)$, para cualquier $C' \subseteq C$ y cada conjunto de $\mathcal{L}(C')$-fórmulas Φ.

Demostración. Sea $((\Phi_i, \varphi_i) : i \leq n)$ una prueba de $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C)} \varphi$. Ya que $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{L}(C)$-fórmulas, existe un subconjunto finito $C_i \subseteq C$ con $\Phi_i \cup \{\varphi\} \subseteq Fml(\mathcal{L}(C_i))$, y sea $C'' = C' \cup \bigcup_{i \leq n} C_i$. Ciertamente, $C'' - C'$ es finito y $\Phi_i \cup \{\varphi_i\} \subseteq Fml(\mathcal{L}(C''))$. Con ello hemos probado $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C'')} \varphi$. Si $c \in C - C''$, entonces $\Phi_c(z)(z) = \Phi$ y $\varphi_c(z) = \varphi$. Aplicamos sucesivamente el lema 3.1.20 para elementos de C'' que no están en C' y obtenemos la derivabilidad de φ a partir de Φ respecto a un lenguaje, que quizá tenga menos constantes. De $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C'')} \varphi$ podemos llegar en una cantidad finita de etapas a $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C'' \cup C')} \varphi$, es decir, a $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C')} \varphi$ pues $C' = C'' \cap C'$.

Respecto a la afirmación sobre constantes, si $\Phi \subseteq Fml(\mathcal{L}(C'))$, se cumple

$$\Phi \cup \{\bot\} \subseteq Fml(\mathcal{L}(C')),$$

por lo que de lo ya demostrado,

$$\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C)} \bot \Rightarrow \Phi \vdash_N^{\mathcal{L}(C')} \bot.$$

Esto significa exactamente que

$$Con^{\mathcal{L}(C')}(\Phi) \Rightarrow Con^{\mathcal{L}(C)}(\Phi).$$

☐

Teorema 3.1.22. *Con la notación de la definición 3.1.18,*

$$Con^{\mathcal{L}}(\Phi) \Rightarrow Con^{\mathcal{L}'}(\Phi').$$

Demostración. Supongamos $Con^{\mathcal{L}}(\Phi)$ y que Φ' es $\mathcal{L}'$-inconsistente. Entonces $\Phi' \vdash_N^{\mathcal{L}'} \bot$, y por el teorema 3.1.5 existe un subconjunto finito $\Phi'_0 \subseteq \Phi'$ con $\Phi'_0 \vdash_N^{\mathcal{L}'} \bot$.

Afirmación 1. $\Phi'_0 \nsubseteq \Phi$.

Demostración de la afirmación 1. Si $\Phi'_0 \subseteq \Phi$ tendríamos $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}'} \bot$. Por el corolario 3.1.21, se sigue que $\Phi \vdash_N^{\mathcal{L}} \bot$ pues $\Phi \cup \{\bot\} \subseteq Fml(\mathcal{L}(\varnothing))$ y $\mathcal{L}(\varnothing) = \mathcal{L}$, lo que conduciría a que Φ fuera $\mathcal{L}$-inconsistente, una contradicción con nuestra hipótesis. (1)

Por la afirmación 1, $\Phi'_0 = \Phi_0 \cup \{\varphi_i^{x_i} : i \leq n\}$, donde $\Phi_0 \subseteq \Phi$, $n \in \mathbb{N}$ y para $i \leq n$, φ_i es una $\mathcal{L}$-fórmula así que $x_i \in Var$. Podemos suponer que Φ se escoge de tal forma que n es mínimo. Entonces

$$\Psi \equiv \Phi_0 \cup \{\varphi_i^{x_i} : i < n\} \quad \text{es } \mathcal{L}'\text{-consistente,} \tag{✹}$$

porque $\Phi_0 \subseteq \Phi$ y n es el menor posible. Para $\varphi \equiv \varphi_n$, $x = x_n$ tenemos $\{\Psi, \varphi^x\} \vdash_N^{\mathcal{L}'} \bot$ en el lenguaje $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}(\{(x_i, \varphi_i) : i \leq n\})$ que se cumple[1] por el corolario 3.1.21 $\{\Psi, \varphi^x\} \vdash_N^{\mathcal{L}'_0} \bot$.

Del lema 3.1.20 se deduce la existencia de una variable z con $z \notin lib(\Psi) \cup Var(\varphi)$ y $\{\Psi, \varphi_c^x(z)\} \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} \bot$, donde $c = c_{x,\varphi}$ y $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}(\{(x_i, \varphi_i) : i < n\})$.

Ya que

$$\begin{aligned}
\varphi_c(z) \equiv& (\exists\, x\varphi \to \varphi_x(c))_c(z)\\
\equiv& (\exists\, x\varphi \to \varphi_x(z))\\
\equiv& (\neg\neg\forall\, x\neg\varphi \vee \varphi_x(z))\\
\equiv& \neg(\neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi \wedge \neg\varphi_x(z)),
\end{aligned}$$

deducimos que $\Psi \cup \{\neg(\neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi \wedge \neg\varphi_x(z))\}$ es $\mathcal{L}'_1$-inconsistente. Por el teorema 3.1.7, esto es equivalente a

$$\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} (\neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi \wedge \neg\varphi_x(z)).$$

Por tanto, obtenemos la siguiente derivación:

1. $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} (\neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi \wedge \neg\varphi_x(z))$ (recién demostrado).
2. $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} \neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi$ $(\wedge 1)$ en 1.
3. $\{\Psi, \neg\neg\neg\forall\, x\neg\varphi\} \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} \neg\forall\, x\neg\varphi$ 2.2.9.
4. $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}'_1} \neg\forall\, x\neg\varphi$ MP en 2,3.

[1] Así que $\mathcal{L}'_0$ contiene exactamente a $c_{x_0,\varphi_0}, \ldots, c_{x_n,\varphi_n}$ como nuevas constantes.

5. $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}_1'} \neg\varphi_x(z)$ $(\wedge 2)$ en 1.

6. $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}_1'} \forall x \neg\varphi$ $(\forall 2)$ en 5 (note que $z \notin lib(\Psi) \cup Var(\neg\varphi)$).

De 4 y 6 se sigue que Ψ es $\mathcal{L}_1'$-inconsistente. Así que $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}_1'} \bot$ por lo que, tomando en cuenta que $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}_1'$, también se cumple $\Psi \vdash_N^{\mathcal{L}'} \bot$. Inferimos que Ψ es $\mathcal{L}'$-inconsistente, lo que contradice (✹). Por lo tanto, la suposición de que Φ' es $\mathcal{L}'$-inconsistente nos lleva a una contradicción, lo que demuestra el teorema. ❐

Después de estos preparativos podemos probar el resultado prometido.

Teorema 3.1.23. *Sean $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ un lenguaje y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas consistente. Entonces existe un lenguaje $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$ y un conjunto de Henkin Ψ de $\mathcal{L}_\omega$-fórmulas tal que $\Psi \supseteq \Phi$.*

Demostración. Definimos por recursión una $\subseteq$-cadena $(\mathcal{L}_n : n \leq \omega)$ de lenguajes y una $\subseteq$-cadena $(\Phi_n : n \leq \omega)$ de conjuntos consistentes de fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L} & \Phi_0 &= \Phi \\ \mathcal{L}_{n+1} &= (\mathcal{L}_n)' & \Phi_{n+1} &= (\Phi_n)' \quad \text{si } n, \omega \\ \mathcal{L}_\omega &= \bigcup_{n<\omega} \mathcal{L}_n & \Phi_\omega &= \bigcup_{n<\omega} \Phi_n. \end{aligned}$$

De la definición de la operación $'$ (Definición 3.1.18) se sigue de inmediato que para $n < m$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{L}_m$ y $\Phi \subseteq \Phi_n \subseteq \Phi_m$. Para $n \leq \omega$ esto se prueba por inducción recurriendo al teorema 3.1.22. Para $n = \omega$ obtenemos que para cada $m < \omega$ existe un conjunto C_m tal que $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_m(C_m)$. De $Con^{\mathcal{L}_m}(\Phi_m)$ se deduce $Con^{\mathcal{L}_\omega}(\Phi_m)$ (de acuerdo con el corolario 3.1.21 pues $\Phi_m \subseteq Fml(\mathcal{L}_m)$)). La sucesión $(\Phi_m : m < \omega)$ es una cadena de conjuntos consistentes cuya unión, según el corolario 3.1.6, es $\mathcal{L}_\omega$-consistente.

Afirmación 1. Si $x \in Var, \varphi \in Fml(\mathcal{L}_\omega)$, entonces $\varphi^x \in \Phi_\omega$.

Demostración de la afirmación 1. Ya que en φ sólo aparece una cantidad finita de símbolos de constante, $\varphi \in Fml(\mathcal{L}_n)$ para alguna $n < \omega$ así que $\varphi^x \in \Phi_{n+1}$. (1)

Considere $Z = \{\Psi \subseteq Fml(\mathcal{L}_\omega) : \Psi \supseteq \Phi_\omega, Con^{\mathcal{L}_\omega}(\Psi)\}$. El conjunto Z no es vacío y lo podemos ordenar parcialmente mediante $\subseteq$. Es claro que toda cadena en Z tiene cota superior (la unión de la cadena). Recurrimos al lema de Zorn para encontrar un elemento máximo Ψ en Z. Entonces $\Phi \subseteq \Phi_\omega \subseteq \Psi$. Habremos demostrado el teorema en cuanto probemos la siguiente afirmación.

Afirmación 2. Ψ es un conjunto de Henkin.

Demostración de la afirmación 2. En vista de que Ψ es máximo $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$-consistente y esto es equivalente, según el lema 3.1.10, a (H0)$\wedge$(H1), se cumplen (H0) y (H1) para Ψ. Para probar (H2) tomemos una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$-fórmula φ. Debemos mostrar que $\forall x\varphi \in \Psi$ si y sólo si para cada símbolo de constante c de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$ se cumple $\varphi_x(c) \in \Psi$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\forall x\varphi \in \Psi$ y sea c un símbolo de constante de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$. Entonces

1. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \forall x\varphi$ Inicio.
2. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \varphi_x(c)$ $\forall$1.

Puesto que se cumple (H0), se sigue que $\varphi_x(c) \in \Psi$ por (2).

$\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi_x(c) \in \Psi$ para cada símbolo de constante c de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$. Sea $c = c_{x,\neg\varphi}$. Entonces $\varphi_x(c) \in \Psi$ y de la derivación

1. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \varphi_x(c)$ Inicio.
2. $\{\Psi, \varphi_x(c)\} \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\varphi_x(c)$ Lema 2.2.9.
3. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\varphi_x(c)$ MP,

se sigue que $\neg\neg\varphi_x(c) \in \Psi$ por (H0). De la afirmación 1 y de $\Phi_\omega \subseteq \psi$ tenemos que

$$(\neg\varphi)^x \equiv \underbrace{\neg(\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi_x(c))}_{\chi} \in \Psi.$$

Por lo tanto, no se puede cumplir $\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \in \Psi$, ya que por $(\wedge 3)$ también tendríamos $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} (\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi_x(c))$, así que $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \chi$ y $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\chi$, que estaría en oposición a la $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega$-consistencia de Ψ. En consecuencia, $\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \notin \Psi$ que según (H1) significa $\neg\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \in \Psi$. Obtenemos entonces la siguiente derivación,

1. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$.
2. $\{\Psi, \neg\neg\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi\} \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$ Lema 2.2.9.
3. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$ MP.
4. $\Psi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \forall x\neg\neg\varphi$ (en forma similar a 1-3).

Así que, $\forall x\neg\neg\varphi \in \Psi$. De la derivación

1. $\forall x\neg\neg\varphi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \forall x\neg\neg\varphi$ Inicio.
2. $\forall x\neg\neg\varphi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \neg\neg\varphi_x(z)$ $\forall$1 en 1, donde $z \in Var - Var(\varphi)$.
3. $\{\forall x\neg\neg\varphi, \neg\neg\varphi_x(z)\} \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \varphi_x(z)$ Lema 2.2.9.
4. $\forall x\neg\neg\varphi \vdash_N^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega} \varphi_x(z)$ MP 2,3.

5. $\forall x \neg\neg\varphi \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \forall x\varphi$ $\forall$ 2 en 4.

6. $\Psi \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \forall x\varphi$ Monotonía en 5.

Obtenemos, por (H0), $\forall x\varphi \in \Psi$, lo que se quería demostrar. Para (H3), sea s un $\mathcal{L}_\omega$-término. Debemos confirmar la existencia de un símbolo de constante c de $\mathcal{L}_\omega$ tal que $s = c \in \psi$. Sea $x \in Var - Var(s)$. De la derivación siguiente,

1. $\forall x \neg(x = s) \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \forall x \neg(x = s)$ Inicio,

2. $\forall x \neg(x = s) \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \neg(s = s)$ $\forall$ 1 en 1,

3. $\forall x \neg(x = s) \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} s = s$ Inicio,

4. $\varnothing \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \neg\forall x \neg(x = s)$ Teorema 2.2.11,

5. $\Psi \vdash^{\mathcal{L}_\omega}_{N} \neg\forall x \neg(x = s)$ Monotonía en 4,

se sigue que $\neg\forall x \neg(x = s) \in \Psi$ por (H0), así que (H1) implica $\forall x \neg(x = s) \notin \Psi$. Por (H2) existe un símbolo de constante c de $\mathcal{L}_\omega$ tal que $(\neg(x = s))_x(c) \notin \Psi$. En consecuencia, $\neg(c = s) \notin \Psi$, es decir, $\neg\neg(c = s) \in \Psi$ por (H1). En forma similar a como se procedió antes, se infiere que $c = s \in \Psi$, lo que se quería probar.

□

Teorema 3.1.24. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Entonces se cumple $Con^{\mathcal{L}}(\Phi) \Rightarrow Sat(\Phi)$.*

Demostración. Sea $\Psi \supset \Phi$ un conjunto de Henkin. Por el corolario 3.1.16, Ψ es satisfacible, digamos, por $\mathfrak{A}^*$, es decir,

$$\mathfrak{A}^* \models \Psi[\beta].$$

Sea $\mathfrak{A}$ el $\mathcal{L}$-reducto de $\mathfrak{A}^*$. Podemos decir que $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$. □

Corolario 3.1.25. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Entonces*

$$Con^{\mathcal{L}}(\Phi) \Leftrightarrow Sat(\Phi).$$

Si estudiamos cómo se construye el conjunto de Henkin que se extiende al conjunto satisfacible dado, podemos concluir que

Corolario 3.1.26 (Löwenheim-Skolem decreciente)**.** *Si Φ es satisfacible, Φ tiene un modelo de cardinalidad no mayor que $|\mathcal{L}|$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ como en la prueba del teorema 3.1.24. Entonces

$$\begin{aligned}|\mathfrak{A}| &= |\{s : s \in Tm(\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega)\}| \\ &\leq |Tm(\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega)| \\ &\leq |\boldsymbol{\mathcal{L}}_\omega| \qquad \text{Lema 4.3.4 (Volumen I)} \\ &= |\boldsymbol{\mathcal{L}}|.\end{aligned}$$

□

Y en tal forma creían los toltecas en su sacerdote Quetzalcóatl y de tal manera eran obedientes, y dados a las cosas de dios y muy temerosos de dios, que todos lo obedecieron, todos creyeron a Quetzalcóatl, cuando abandonó a Tula...

Y tanto confiaban en Quetzalcóatl, que se fueron con él, le confiaron sus mujeres, sus hijos, sus enfermos. Se pusieron en pie, se pusieron en movimiento, los ancianos, las ancianas, nadie dejó de obedecer, todos se pusieron en movimiento.

En seguida se fue hacia el interior del mar, hacia la tierra del color rojo, allí fue a desaparecer, él, nuestro príncipe Quetzalcóatl...

Nahuas: éstos hablan el idioma náhuatl, con poca diferencia hablan mexicano...

Estos según se dice, se nombraban a sí mismos chichimecas, se llamaban «los dueños de las casas», quiere decir, que eran toltecas. Dizque a éstos, los toltecas, los fueron dispersando, cuando se marcharon, cuando nuestro príncipe Quetzalcóatl se embarcó en el mar, para ir a colocarse en la tierra del color rojo, en el lugar de la cremación. Entonces, adquirieron vigor los señoríos, los principados, los reinos. Y los príncipes, señores y jefes gobernaron, establecieron ciudades. Hicieron crecer, extendieron, aumentaron sus ciudades.

3.2 El teorema de completud de Gödel y sus consecuencias

Nuestro resultado principal, después de la enorme cantidad de hechos presentados en la sección previa, es que cualquier fórmula que podemos derivar mediante deducción natural es lógicamente válida, donde el recíproco también se cumple. Más general aún, si podemos derivar una fórmula partir de un conjunto de premisas, éstas implican lógicamente la fórmula y viceversa. Formalmente:

Teorema 3.2.1 (Completud). *Se cumple* $\models \subseteq \vdash_N$.

Demostración. Sean Φ un conjunto de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmulas, φ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula y supongamos que no se cumple $\Phi \vdash_N \varphi$. Por el lema 3.1.7 se tendría que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ es $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-consistente. En consecuencia, de acuerdo con el teorema 3.1.24, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible; digamos,

$$\mathfrak{A} \models (\Phi \cup \{\neg\varphi\})[\beta],$$

por lo que $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ y $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$, así que no se cumple $\Phi \models \varphi$. ☐

Junto con el teorema de correctud 2.2.6, logramos

Corolario 3.2.2.

$$\models \quad = \quad \vdash_N .$$

☐

Del teorema 3.1.5 deducimos la siguiente aseveración.

Teorema 3.2.3 (Compacidad). *(a) $\Phi \models \varphi$ si y sólo si existe un subconjunto finito $\Phi' \subseteq \Phi$ tal que $\Phi' \models \varphi$.*

(b) Φ es satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito $\Phi' \subseteq \Phi$ lo es.

Demostración. Se sigue del teorema 3.1.5 pues $\vdash_N$ y $\models$ coinciden. ☐

Suele decirse que un conjunto de fórmulas es finito satisfacible si cualquiera de sus subconjuntos finitos es satisfacible. La parte (b) del teorema 3.2.3 se puede expresar como: un conjunto de fórmulas es satisfacible si y sólo si es finito satisfacible.

Para terminar, pretendemos demostrar el teorema de Löwenhein-Skolem creciente. Para este fin requerimos algunos resultados previos. Fijemos un lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ y un conjunto Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas.

Teorema 3.2.4. *Si Φ tiene un modelo de cardinalidad $\geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces Φ tiene un modelo infinito. Más aún, para cada cardinal infinito κ, Φ tiene un modelo de cardinalidad $\geq \kappa$.*

Demostración. Sea κ un cardinal arbitrario infinito. Para cada $\alpha < \kappa$ generamos un símbolo de constante c_α. Sea $\mathcal{L}(C)$ una expansión de $\mathcal{L}$, donde $C = \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y construimos el conjunto de $\mathcal{L}(C)$-enunciados $\Phi_\kappa = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta < \kappa\}$.

Afirmación 1. Si $I \subseteq \kappa$ es finito, entonces

$$\Phi_\kappa(I) = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta, \alpha, \beta \in I\}$$

es satisfacible.

Demostración de la afirmación 1. Sean $n = |I|$ y $\mathfrak{A}$ un modelo de Φ de cardinalidad $\geq n$. Entonces $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ para alguna $\mathfrak{A}$-asignación γ. Para $\alpha \in I$ escogemos $c_\alpha^{\mathfrak{A}} \in A$ tal que $c_\alpha^{\mathfrak{A}} \neq c_\beta^{\mathfrak{A}}$ para $\alpha \neq \beta$ (lo cual es posible pues $|A| \geq n = |I|$). Sea $\mathfrak{A}(I) = \langle A, \{c_\alpha^{\mathfrak{A}} : \alpha \in I\}\rangle$. Se sigue que $\mathfrak{A}(I) \models \Phi_\kappa(I)$. (1)

Ya que cada subconjunto finito de Φ_κ está contenido en algún conjunto del tipo $\Phi_\kappa(I)$, donde $I \subseteq \kappa$ es un conjunto finito, se infiere de la afirmación 1 que Φ_κ es finito satisfacible, así que según el teorema de compacidad, Φ_κ es satisfacible. Entonces podemos

encontrar un modelo $\mathfrak{A}_\kappa$ y una $\mathfrak{A}_\kappa$-asignación γ tales que

$$\mathfrak{A}_\kappa \models \Phi_\kappa[\gamma].$$

Sea $\mathfrak{A}$ el $\mathcal{L}$-reducto de $\mathfrak{A}_\kappa$, esto es, simplemente «olvidamos» la interpretación de cualquier símbolo en $\mathcal{L}(C) - \mathcal{L}$. Entonces $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$. En vista de que $\mathfrak{A}_\kappa \models \neg(c_\alpha = c_\beta)$ para $\alpha < \beta < \kappa$, los elementos $c_\alpha^{\mathfrak{A}}$ son distintos entre sí, por lo que $|A_\kappa| = |A| \geq \kappa$.

□

Teorema 3.2.5. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Si Φ tiene un modelo infinito, entonces Φ tiene modelos de cardinalidad arbitrariamente grande.*

Demostración. Por hipótesis existen una $\mathcal{L}$-estructura infinita $\mathfrak{A}$ y una $\mathfrak{A}$-asignación γ tales que $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$, digamos $\lambda = |\mathfrak{A}| \geq \aleph_0$; tomamos un cardinal arbitrario $\kappa \geq \lambda$ arbitrarios. Basta probar que existe un modelo de Φ de cardinalidad $\geq \kappa$. Como en el teorema 3.2.4, generamos nuevos símbolos de constante c_α para cada $\alpha < \kappa$ y construimos Φ_κ:

$$\Phi_\kappa = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta < \kappa\}.$$

Si $I \subseteq \kappa$ es finito, $\Phi_\kappa(I) = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta, \alpha, \beta \in I\}$ es satisfacible en una expansión de $\mathfrak{A}$ (pues $|A| \geq \aleph_0$, así que podemos encontrar interpretaciones de los símbolos c_α, para $\alpha \in I$ distintos entre sí en A). Se sigue que $\Phi_\kappa(I)$ es satisfacible, de donde inferimos que Φ_κ es finito satisfacible y, por ende, satisfacible.

En consecuencia, existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}'$ y una $\mathfrak{B}'$-asignación σ tales que

$$\mathfrak{B}' \models \Phi[\sigma].$$

Sea $\mathfrak{B}$ el $\mathcal{L}$-reducto de $\mathfrak{B}'$, es decir, otra vez en B' «olvidamos» la interpretación de los símbolos de constante c_α, porque ya tenemos la estructura que necesitamos. Se sigue que

$$\mathfrak{B} \models \Phi[\sigma]$$

y es claro que $|\mathfrak{B}| \geq \kappa$. □

No obstante, aún podemos mejorar el teorema 3.2.5 estableciendo con exactitud la cardinalidad del modelo.

Teorema 3.2.6 (Löwenheim-Skolem). *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas con un modelo infinito. Entonces para cada $\kappa \geq |\mathcal{L}|$, Φ tiene un modelo de cardinalidad κ.*

Demostración. Como antes expandimos $\mathcal{L}$ mediante κ símbolos de constante c_α $(\alpha < \kappa)$, de donde surge el lenguaje $\mathcal{L}_\kappa$. Como en la demostración del teorema 3.2.4,

$$\Phi_\kappa = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta < \kappa\}$$

es satisfacible. Según el corolario 3.1.26, Φ_κ tiene un modelo $\mathfrak{A}_\kappa$ de cardinalidad a lo sumo $|\mathcal{L}_\kappa|$. Es fácil verificar que $|\mathcal{L}_\kappa| = |\mathcal{L}| + \kappa = \kappa$ (pues $\kappa \geq |\mathcal{L}| \geq \aleph_0$).

Por otro lado, por definición de Φ_κ, $|\mathfrak{A}_\kappa| \geq \kappa$. En resumen, $|\mathfrak{A}_\kappa| = \kappa$. El $\mathcal{L}$-reducto de $\mathfrak{A}_\kappa$ da lugar a un modelo de Φ de cardinalidad κ. ❐

Es importante notar que para probar el teorema 3.2.6 usamos el corolario 3.1.26, esto es, al final recurrimos a resultados de teoría de prueba. Es posible probar el teorema 3.2.6 sin recurrir a teoría de la demostración, pero se requiere desarrollar algunos resultados de la teoría de modelos, además de probar el teorema de compacidad en estas nuevas circunstancias.

La tradición de los viejos afirmaba que su dios Huitzilopochtli les venía hablando señalándoles el camino que habrían de seguir: «Yo os iré sirviendo de guía, yo os mostraré el camino».

En seguida, los aztecas comenzaron a venir hacia acá, existen, están pintados, se nombran en lengua azteca los lugares por donde vinieron los mexicas, ciertamente andaban sin rumbo, vinieron a ser los últimos.

Al venir, cuando fueron siguiendo su camino, ya no fueron recibidos en ninguna parte. Por todas partes eran reprendidos.

Nadie conocía su rostro. Por todas partes les decían: ¿Quiénes sois vosotros? ¿De dónde venís?

Así en ninguna parte pudieron establecerse, sólo eran arrojados, por todas partes eran perseguidos. Vinieron a pasar a Coatepec, vinieron a pasar a Tollan, Ichpuchco, Ecatepec, luego a Chiquiuhtepetitlan. En seguida a Chapultepec donde vino a establecerse mucha gente.

Y ya existía señorío en Atzcapozalco, en Coantlichan, en Culhuacán, pero México no existía todavía. Aún había tulares y carrizales, donde ahora es México.

3.3 Completud y correctud del sistema de Hilbert

En este breve apartado retomamos el estudio del sistema de Hilbert para la lógica de primer orden. De hecho, sólo resta probar su completud y correctud. La completud se reduce fácilmente a la completud de deducción natural. La correctud puede establecerse directamente sin apelar a otros sistemas, pero consideramos más adecuado demostrar ambos teoremas en una misma sección. Ocupémonos primero de la correctud de $\mathfrak{H}$.

 **Teorema 3.3.1.** *[Correctud] El sistema de Hilbert $\mathfrak{H}$ es correcto. En símbolos*

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \models \varphi.$$

Demostración. En [FeVi09] se demuestra que los axiomas A1-A3 son correctos, lo mismo que la regla MP, pero el lector puede comprobarlos siguiendo ideas como a continuación. Verificamos, pues, la correctud de A4-A5 y de la regla Gen.

✱ El axioma A4 es $\forall x\varphi(x) \to \varphi_x(t)$. Suponga que $sust(\varphi, t, x)$. Debemos probar que

$$\models \forall x\varphi(x) \to \varphi_x(t).$$

Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi(x)[\alpha]$. Esto significa que para cada $a \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x)[\alpha^{x/a}]. \tag{✹}$$

Pero

$$\mathfrak{A} \models \varphi_x(t)[\alpha] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}],$$

y el resultado se sigue de (✹).

✱ El axioma A5 señala $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ si x no es libre en φ. Dada una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación, debemos corroborar que $\mathfrak{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi))[\alpha]$. Con este fin, suponga que $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)[\alpha]$ y $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$. En consecuencia, para toda $a \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi[\alpha^{x/a}] \tag{✺}$$

y

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}] \text{ (pues } x \text{ no es libre en } \varphi). \tag{✻}$$

Se sigue de (✺) y (✻) que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$ para cada $a \in A$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$, lo que debíamos verificar.

✱ Respecto a la regla Gen, su correctud se desprende de la proposición 2.7.40(2) del Volumen I.

Otro resultado imprescindible es la completud.

 **Teorema 3.3.2** (Completud)**.** *El sistema de Hilbert $\mathfrak{H}$ es completo, en símbolos:*

$$\models \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$$

Demostración. Suponga que φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y que $\models \varphi$. Por la completud de deducción natural, sabemos que $\vdash_N \varphi$. En consecuencia, contamos con una prueba en deducción natural de φ a partir de $\varnothing$. Según el lema 2.1.26 podemos simular tal prueba en $\mathfrak{H}$, por lo que también se cumple

$$\vdash_{\mathfrak{H}} \varphi$$

Vencieron a los Tepanecas de Atzcapozalco, a los de Coyoacán y Xochimilco y a la gente de Cuitláhuac.

Fue Tlacaéletl quien levantándose, combatió primero, e hizo conquistas. Y sólo así vino a aparecer, porque nunca quiso ser gobernante supremo en la Ciudad de México-Tenochtitlan, pero de hecho a ella vino a mandar, vivió en la abundancia y la felicidad.

3.4 Más sobre compacidad

Consideramos útil, para bien de muchos lectores, contar con una demostración que no dependa de ningún método de prueba formal, de los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. Por consiguiente, tal demostración no puede recurrir a los teoremas de completud-correctud. La alternativa es entonces una demostración puramente semántica.

Es nuestra intención en este apartado desarrollar tal prueba. Utilizaremos la construcción de Henkin, como en la demostración del teorema 3.2.3 pero de una forma diferente, adecuada a nuestras intenciones.

En lo sucesivo fijamos un lenguaje $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$. Todas las fórmulas, enunciados, teorías, etc., implícitos se refieren a este lenguaje $\mathcal{L}$, a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.4.1. En lo inmediato, na teoría es simplemente un conjunto de enunciados[2]. La teoría $\boldsymbol{T}$ tiene testigos si siempre que $\varphi(v)$ sea una fórmula, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que

$$\boldsymbol{T} \models \exists v \varphi(v) \to \varphi(c).$$

Una teoría $\boldsymbol{T}$ es completa si $\varphi \in \boldsymbol{T}$ o $\neg\varphi \in \boldsymbol{T}$ para cada enunciado φ.

Lema 3.4.2. *Suponga que $\boldsymbol{T}$ es una teoría completa y finito satisfacible. Si $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}$ es finito y $\Delta \models \psi$, entonces $\psi \in \boldsymbol{T}$*

Demostración. Si $\psi \notin \boldsymbol{T}$, sabemos, por la completud de $\boldsymbol{T}$, que $\neg\psi \in \boldsymbol{T}$, en cuyo caso $\Delta \cup \{\neg\psi\}$ sería un subconjunto finito de $\boldsymbol{T}$ que no es satisfacible pues $\Delta \models \psi$, de donde se seguiría que $\boldsymbol{T}$ no es finito satisfacible, una contradicción. ❐

Lema 3.4.3. *Supongamos que $\boldsymbol{T}$ es una teoría completa y finito satisfacible con testigos. Entonces $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo. De hecho, si κ es un cardinal y la cantidad de símbolos de constante es a lo sumo κ, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$, entonces podemos encontrar un modelo $\mathfrak{A}$ de $\boldsymbol{T}$ de cardinalidad no mayor que κ.*

Demostración. Primero definimos una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$: si $c, d \in \mathcal{C}$, decimos que $c \sim d$ cuando $c = d \in \boldsymbol{T}$.

Afirmación 1. La relación $\sim$ en $\mathcal{C}$ es de equivalencia.

Demostración de la afirmación 1. Lo primero que debemos apreciar es que $\varphi \equiv c = c \in \boldsymbol{T}$; de lo contrario, $\neg\varphi \in \boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}$ no sería finito satisfacible. Así que $\sim$ es reflexiva.

Es claro que si $\boldsymbol{T} \models c = d$, entonces $\boldsymbol{T} \models d = c$ (simetría de la igualdad), por lo que $\sim$ es simétrica. Resta verificar que es transitiva, así que supongamos que $\boldsymbol{T} \models c = d$ y $\boldsymbol{T} \models d = e$, por lo que $c = d, d = e \in \boldsymbol{T}$, por completud de $\boldsymbol{T}$. Considere $\Delta = \{c = d, d = e\}$. Se sigue que $\Delta \models c = e$, de donde se obtiene (según el Lema 3.4.2) que $c = e \in \boldsymbol{T}$. ֍ (1)

Hemos demostrado que $\sim$ es de equivalencia en $\mathcal{C}$. El universo A de nuestro modelo $\mathfrak{A}$ será $\mathcal{C}/\sim$, es decir, el conjunto de clases de equivalencia en $\mathcal{C}$ respecto a $\sim$. Es inmediato que $|A| \leq \kappa$ pues $|\mathcal{C}| \leq \kappa$. Sea $[c]$ la clase de equivalencia de c en $\mathcal{C}/\sim$. Interpretamos c en $\mathfrak{A}$ como $[c]$. También debemos interpretar los símbolos de función y relación. Suponga que R es un símbolo de n-relación en $\mathcal{R}$.

Afirmación 2. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$ tales que $c_i \sim d_i$ para $i = 1, \ldots, n$; entonces $R(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ si y sólo si $R(\vec{d}) \in \boldsymbol{T}$.

Puesto que $c_i = d_i \in \boldsymbol{T}$ para $i = 1, \ldots, n$, del lema 3.4.2 se sigue que $R(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ si y sólo si $R(\vec{d}) \in \boldsymbol{T}$. ֍ (2)

Ahora podemos interpretar R en $\mathfrak{A}$, a saber, como

$$R^{\mathfrak{A}} = \{([c_1], \ldots, [c_n]) : R(c_1, \ldots, c_n) \in \boldsymbol{T}\}.$$

[2]En la mayoría de los textos de teoría de modelos (y de conjuntos) una teoría es un conjunto de enunciados consistente, de hecho lo hicimos así en el primer volumen. Incluso, suele pedirse más, que sea consistente y deductivamente cerrado

La afirmación 2 nos asegura que esta definición no depende de los representantes de las c_i. Tomemos $f \in \mathcal{F}$ un símbolo de n-función y $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. En vista de que $\models \exists v\ f(c_1, \ldots, c_n) = v$ y $\boldsymbol{T}$ tiene testigos, por el lema 3.4.2 existe $c_{n+1} \in \mathcal{C}$ tal que $f(c_1 \ldots, c_n) = c_{n+1} \in \boldsymbol{T}$. Como antes, si $d_i \sim c_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, entonces $f(c_1, \ldots, c_n) = d_{n+1} \in \boldsymbol{T}$. Más aún, ya que f es un símbolo de función, los axiomas de la igualdad nos aseguran que si $e_i \sim c_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ y $f(e_1, \ldots, e_n) = e_{n+1} \in \boldsymbol{T}$, entonces $e_{n+1} \sim c_{n+1}$. Con esto podemos interpretar f como $f^{\mathfrak{A}} : A \longrightarrow A$ y $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$ si y sólo si $f(c_1, \ldots, c_n) = d \in \boldsymbol{T}$. Tenemos ya nuestra $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$. Antes de probar que $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{T}$, debemos corroborar que los $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-términos se comportan adecuadamente.

Afirmación 3. Supongamos que t es un término con variables $v_1, \ldots, v_n$. Si $c_1, \ldots, c_n$, $d \in \mathcal{C}$, entonces $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \boldsymbol{T}$ si y sólo si $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$.

Demostración de la afirmación 3. Primero probamos por inducción en la construcción de t que si $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \boldsymbol{T}$, entonces $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$.

❶ Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $c = d \in \boldsymbol{T}$ y $c^{\mathfrak{A}} = [c] = [d]$.

❷ Si $t = v$, entonces $t(c_1, \ldots, c_n) = d$ quiere decir en este caso que $c_i = d$ para algún $i = 1, \ldots, n$ por lo que $c_i = d \in \boldsymbol{T}$ y $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c_i] = [d]$.

❸ Sea f un símbolo de n-función; nuestra hipótesis de inducción es que la afirmación 3 se cumple para $t_1, \ldots, t_n$. Sea $t = f(t_1, \ldots, t_m)$. Recurrimos a los testigos de $\boldsymbol{T}$ y al lema 3.4.2 para encontrar $d, d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$ tales que $t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i \in \boldsymbol{T}$ para $i \leq m$ y $f(d_1, \ldots, d_m) = d \in \boldsymbol{T}$. Por hipótesis de inducción,

$$t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d_i]$$

y

$$f^{\mathfrak{A}}([d_1], \ldots, [d_m]) = [d].$$

En consecuencia, $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$.

Para el recíproco, supongamos que $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$. Otra vez, por la presencia de testigos y el lema 3.4.2 existe $e \in \mathcal{C}$ tal que $t(c_1, \ldots, c_n) = e \in \boldsymbol{T}$. Se sigue del lema 3.4.2 que $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \boldsymbol{T}$. (3)

Afirmación 4. Sean $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una fórmula y $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. Entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi([\vec{c}]) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}.$$

Demostración de la afirmación 4. Procedemos por inducción en la construcción de φ.

① Si $\varphi \equiv t_1 = t_2$. El lema 3.4.2 y los testigos nos permiten encontrar d_1, d_2 tales que $t_1(\vec{c}) = d_1$ y $t_2(\vec{c}) = d_2$ son elementos de $\boldsymbol{T}$. En plena concordancia con la

afirmación 3, $t_i^{\mathfrak{A}}([\vec{c}]) = [d_i]$ para $i = 1, 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi([\vec{c}]) &\Leftrightarrow [d_1] = [d_2] \\ &\Leftrightarrow d_1 = d_2 \in \boldsymbol{T} \\ &\Leftrightarrow t_1(\vec{c}) = t_2(\vec{c}) \in \boldsymbol{T} \qquad \text{(lema 3.4.2).}\end{aligned}$$

② Si $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$. Otra vez apelamos a los testigos y al lema 3.4.2 para hallar $d_1, \ldots, d_m \in \mathcal{C}$ con $t_i(\vec{c}) = d_i \in \boldsymbol{T}$ y a la afirmación 3 para probar que $t_i^{\mathfrak{A}}([\vec{c}]) = [d_i]$ para $i = 1, \ldots m$. En consecuencia,

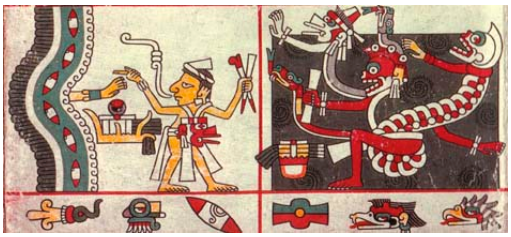
$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi([\vec{c}]) &\Leftrightarrow [\vec{d}] \in R^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow R(\vec{d}) \in \boldsymbol{T} \\ &\Leftrightarrow \varphi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T} \qquad \text{(lema 3.4.2).}\end{aligned}$$

③ Suponga que $\varphi(\vec{v}) \equiv \neg\psi(\vec{v})$ y que la afirmación se cumple para ψ. Si $\mathfrak{A} \models \varphi([\vec{c}])$, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\psi([\vec{c}])$, por lo que $\mathfrak{A} \not\models \psi([\vec{c}])$ y por hipótesis de inducción, $\psi(\vec{c}) \notin \boldsymbol{T}$. Ya que $\boldsymbol{T}$ es completa, $\neg\psi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$, es decir, $\varphi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$.

En forma recíproca, si $\varphi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$, $\neg\psi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ y como $\boldsymbol{T}$ es finito satisfacible, $\psi(\vec{c}) \in \boldsymbol{T}$. Por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \not\models \psi([\vec{c}])$, así que $\mathfrak{A} \models \varphi([\vec{c}])$.

④ Si $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2([\vec{c}]) &\Leftrightarrow \varphi_1(\vec{c}) \in \boldsymbol{T} \text{ y } \varphi_2(\vec{c}) \in \boldsymbol{T} \\ &\Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\vec{c}) \in \boldsymbol{T} \qquad \text{(lema 3.4.2).}\end{aligned}$$



⑤ Supongamos que $\varphi \equiv \exists v\psi(v)$ y que la afirmación se cumple para ψ. Si $\mathfrak{A} \models \psi([d], [\vec{c}])$, entonces por hipótesis de inducción $\psi(d, \vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ y $\exists v\psi(v, \vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ por el lema 3.4.2. En forma recíproca, si $\exists v\psi(v, \vec{c}) \in \boldsymbol{T}$, recurrimos a los testigos y al lema 3.4.2 para confirmar que $\psi(d, \vec{c}) \in \boldsymbol{T}$ para alguna c. Por hipótesis de inducción, $\mathfrak{A} \models \psi([d], [\vec{c}])$ y $\mathfrak{A} \models \exists v\psi(v, [\vec{c}])$. En particular, $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{T}$, lo que se pretendía.

(4) □

Ya sabemos que una teoría finito satisfacible completa y con testigos es satisfacible. Pero ¿qué podemos hacer si nuestra teoría carece de completud y de testigos? El siguiente teorema resuelve este inconveniente.

Lema 3.4.4. *Sea $\boldsymbol{T}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-teoría finito satisfacible. Existen un lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}^* \supset \boldsymbol{\mathcal{L}}$ y una $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*$-teoría $\boldsymbol{T}^*$ finito satisfacible con $\boldsymbol{T}^* \supseteq \boldsymbol{T}$ tal que toda $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*$-teoría que contenga a $\boldsymbol{T}^*$ tiene testigos. De hecho, se puede escoger $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*$ de tal suerte que $|\boldsymbol{\mathcal{L}}^*| = |\boldsymbol{\mathcal{L}}| + \aleph_0$.*

Demostración. Primero probaremos que existen un lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 \supseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ y una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$-teoría finito satisfacible $\boldsymbol{T}_1 \supseteq \boldsymbol{T}$ tales que para cualquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula $\varphi(v)$, existe un símbolo $c \in \mathcal{C}_1$ con $\boldsymbol{T}_1 \models \exists v\varphi(v) \to \varphi(c)$.

Para cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula $\varphi(v)$, sean c_φ un nuevo símbolo de constante y $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 = \boldsymbol{\mathcal{L}} \cup \{c_\varphi : \varphi(v) \in Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}})\}$. A cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula $\varphi(v)$ le asociamos el $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$-enunciado $\theta_\varphi \equiv \exists v\varphi(v) \to \varphi(c_\varphi)$. Hacemos $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T} \cup \{\theta_\varphi : \varphi(v) \in Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}})\}$.

Afirmación 1. $\boldsymbol{T}_1$ es finito satisfacible.

Demostración de la afirmación 1. Sea $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}_1$ finito. Entonces $\Delta = \Delta_0 \cup \{\theta_{\varphi_1}, \ldots, \theta_{\varphi_n}\}$, donde Δ_0 es un subconjunto finito de $\boldsymbol{T}$. Dado que $\boldsymbol{T}$ es finito satisfacible, podemos encontrar un modelo $\mathfrak{A}$ para Δ_0. Basta transformar $\mathfrak{A}$ en una $\boldsymbol{\mathcal{L}} \cup \{c_{\varphi_1}, \ldots, c_{\varphi_n}\}$-estructura $\mathfrak{A}'$. No cambiamos la interpretación de los símbolos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, así que se cumplirá $\mathfrak{A}' \models \Delta_0$, pero ¿cómo interpretar los símbolos c_{φ_i} en $\mathfrak{A}'$? Es fácil, si $\mathfrak{A} \models \exists v\varphi(v)$, escogemos un elemento $a_i \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_i)$ e interpretamos c_{φ_i} en $\mathfrak{A}'$ precisamente como a_i. De no cumplirse $\mathfrak{A} \models \exists v\varphi(v)$, interpretamos a c_{φ_i} en $\mathfrak{A}'$ como un elemento arbitrario de A. Es claro que $\mathfrak{A}' \models \theta_{\varphi_i}$ para toda $i \leq n$. En consecuencia, $\boldsymbol{T}_1$ es finito satisfacible. (1)

Si iteramos esta construcción, generamos una sucesión de lenguajes $\boldsymbol{\mathcal{L}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}_1 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}_2 \subseteq \cdots$ y una sucesión de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i$-teorías finito satisfacibles $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{T}_1 \subseteq \boldsymbol{T}_2 \subseteq \cdots$ tales que si $\varphi(v)$ es una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i$-fórmula, existe un símbolo de constante $c \in \mathcal{C}_{i+1}$ con $\boldsymbol{T}_{i+1} \models \exists v\varphi(v) \to \varphi(c)$.

Una vez que tenemos los lenguajes $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i$ y las $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i$-teorías $\boldsymbol{T}_i$, definimos

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{L}}_i$$
$$\boldsymbol{T}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \boldsymbol{T}_i.$$

Note que si $\boldsymbol{T}' \supseteq \boldsymbol{T}^*$, por construcción $\theta_\varphi \in \boldsymbol{T}'$ para cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*$-fórmula $\varphi(v)$. También por construcción, $\boldsymbol{T}^*$ tiene testigos. Si $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}^*$ es finito, $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}_i$ para alguna i, de donde se sigue que Δ es satisfacible y $\boldsymbol{T}^*$ es finito satisfacible. Observe que hay a lo sumo $|\boldsymbol{\mathcal{L}}| + \aleph_0$ fórmulas en $\boldsymbol{\mathcal{L}}_i$ (se verifica por inducción), por lo que $|\boldsymbol{\mathcal{L}}^*| = |\boldsymbol{\mathcal{L}}| + \aleph_0$.

□

Lema 3.4.5. *Sean $\boldsymbol{T}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-teoría finito satisfacible y φ un $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciado. Entonces $\boldsymbol{T} \cup \{\varphi\}$ o $\boldsymbol{T} \cup \{\neg\varphi\}$ es finito satisfacible.*

Demostración. Si $\boldsymbol{T} \cup \{\varphi\}$ no es satisfacible, podemos sacar ventaja de este hecho y encontrar $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}$ finito tal que $\Delta \cup \{\varphi\}$ no es finito satisfacible. Esto es tanto como decir que $\Delta \models \neg\varphi$.

Afirmación 1. $\boldsymbol{T} \cup \{\neg\varphi\}$ es finito satisfacible.

Demostración de la afirmación 1. Extraemos un subconjunto $\Sigma \subseteq \boldsymbol{T}$ finito arbitrario. Ya que $\Delta \cup \Sigma$ es satisfacible y $\Delta \cup \Sigma \models \neg\varphi$, se sigue que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. En consecuencia, $\boldsymbol{T} \cup \{\neg\varphi\}$ es finito satisfacible. (1) □

Corolario 3.4.6. *Si $\boldsymbol{T}$ es una $\mathcal{L}$-teoría finito satisfacible, existe una $\mathcal{L}$-teoría finito satisfacible y completa $\boldsymbol{T}' \supseteq \boldsymbol{T}$.*

Demostración. Apelaremos a una afirmación conocida, a saber, el lema de Zorn, pero para poder hacerlo requerimos ciertos preparativos. Construimos el conjunto S de $\mathcal{L}$-teorías que contienen a $\boldsymbol{T}$ y son finito satisfacibles. El conjunto S admite un orden parcial, a saber, el generado por la relación de contención $\subseteq$. Sean $C \subseteq S$ un subconjunto linealmente ordenado (una cadena) y $\boldsymbol{T}_C = \bigcup\{\Sigma : \Sigma \in C\}$. Si $\Delta \subseteq \boldsymbol{T}_C$ es finito, existe $\Sigma \in C$ tal que $\Delta \subseteq \Sigma$ (se sigue del lema 3.4.5), así que $\boldsymbol{T}_C$ es finito satisfacible y $\boldsymbol{T}_C \supset \Sigma$ para toda $\Sigma \in C$. Inferimos que toda cadena en S tiene cota superior respecto a $\subseteq$. El lema de Zorn asegura que S tiene un elemento máximo $\boldsymbol{T}'$ (con respecto a $\subseteq$). De acuerdo con el lema 3.4.5, $\boldsymbol{T}' \cup \{\varphi\}$ o $\boldsymbol{T}' \cup \{\neg\varphi\}$ es finito satisfacible para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado φ. Puesto que $\boldsymbol{T}'$ es máximo en S, φ o $\neg\varphi \in \boldsymbol{T}'$, así que $\boldsymbol{T}'$ es completo. □

Es evidente que el siguiente teorema es una versión fuerte de compacidad.

Teorema 3.4.7. *Si $\boldsymbol{T}$ es una $\mathcal{L}$-teoría finito satisfacible y κ es un cardinal infinito no menor que el tamaño del lenguaje $\mathcal{L}$, estamos en posibilidad de asegurar que $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo de cardinalidad no mayor que κ.*

Demostración. Por el lema 3.4.4 encontramos $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ y $\boldsymbol{T}^* \supseteq \boldsymbol{T}$, donde $\boldsymbol{T}^*$ es una teoría finito satisfacible del lenguaje $\mathcal{L}^*$, tal que cualquier $\mathcal{L}^*$-teoría que contenga a $\boldsymbol{T}^*$ tiene testigos; más aún, $|\mathcal{L}^*| \leq \kappa$. Según el corolario 3.4.6 podemos hallar una $\mathcal{L}^*$-teoría completa y finito satisfacible $\boldsymbol{T}' \supseteq \boldsymbol{T}^*$. Puesto que $\boldsymbol{T}'$ tiene testigos, el lema 3.4.3 nos permite disponer de un modelo $\mathfrak{A}'$ de $\boldsymbol{T}'$ de cardinalidad $\leq \kappa$. Resta considerar el $\mathcal{L}$-reducto $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}'$, que es un modelo de $\boldsymbol{T}$. □

Enseguida nos dedicamos a extraer diversas consecuencias del teorema de compacidad.

Finito axiomatizabilidad

Ahora consideremos como una $\mathcal{L}$-teoría T de primer orden un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados consistente. Decimos que la $\mathcal{L}$-teoría T es finito axiomatizable cuando existe un conjunto finito Σ de $\mathcal{L}$-enunciados tal que $\Sigma \models T$. En tal caso, podemos suponer que $\Sigma \subseteq T$. Ocurre la misma nomenclatura para conjuntos de $\mathcal{L}$-enunciados en lugar de $\mathcal{L}$-teorías. Dado un conjunto Γ de $\mathcal{L}$-enunciados, decimos que una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-estructuras es axiomatizable si

$$\mathcal{K} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}.$$

Si Γ es finito axiomatizable, la clase $\mathcal{K}$ es finito axiomatizable. Note que que si $\mathcal{K}$ es axiomatizable por Γ, esto significa que cualquier clase que satisfaga a Γ pertenece a $\mathcal{K}$ y que si $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, entonces $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

Ejemplo 3.4.8. Consideremos a los conjuntos infinitos. La clase $\mathcal{K}$ de los mismos es axiomatizable. A saber, sea

$$\Sigma = \left\{ \exists x_1, \ldots, \exists x_n \left(\bigwedge_{i<j}^{n} x_i \neq x_j \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

¿Por qué? bueno, si X es infinito, $X \models \Sigma$ ya que si tomamos un $\theta_n \in X$, digamos que requiera la existencia de n elementos distintos, fácilmente los podemos elegir en X que es infinito. Para la otra dirección, si $X \models \Sigma$, y X fuera finito, digamos con m elementos, X no podría ser modelo del enunciado θ_l en Σ que asegura la existencia de l elementos distintos, cuando $l > m$. La pregunta natural es si en realidad necesitamos todos estos axiomas o si podemos encontrar una cantidad finita de $\mathcal{L}$-enunciados que hagan el mismo trabajo. Primero descartamos la posibilidad para un subconjunto finito de Γ. Note que si $\Delta \subseteq \Gamma$ y Δ es finito, entonces Δ tiene un modelo finito, pues si n es el mayor natural que aparece entre los enunciados de Δ, es claro que cualquier conjunto con n o más elementos satisface a Δ, por lo que Δ no puede axiomatizar a $\mathcal{K}$.

Más generalmente, no existe un conjunto finito Δ de $\mathcal{L}$-enunciados que axiomatice a $\mathcal{K}$. En efecto, supongamos que existe una conjunto finito Δ que axiomatiza a $\mathcal{K}$. Dado que Δ es finito, podemos tomar la conjunción σ de todas los enunciados en Δ. Se sigue que $\{\sigma\}$ axiomatiza a $\mathcal{K}$. Considere el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados $\Psi = \Gamma \cup \neg\sigma$. ¿Qué pasa si Ψ es satisfacible? Bueno, tendríamos un modelo $\mathfrak{A}$ de Ψ, así que $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ y de $\neg\sigma$. Por un lado, $\mathfrak{A}$ modela el hecho de que tiene más de n elementos para cada $n \in N$, es decir, $\mathfrak{A}$ debe ser infinito. Por otro lado $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$. Esto es, $\mathfrak{A}$ ¡no puede ser infinito! Esta contradicción se resolvería en el caso en que Ψ no fuese satisfacible.

Afirmación 1. Ψ es satisfacible.

Demostración de la afirmación 1. Apelamos al teorema de compacidad. Considere un subconjunto finito $\Psi_0 \subseteq \Psi$. Entonces, en Ψ_0 aparece una cantidad finita de enunciados

de la forma $\exists x_1, \ldots, \exists x_n \left(\bigwedge_{i<j}^{n} x_i \neq x_j\right)$ y existe un n más grande que aparece en uno de estos enunciados. Por otro lado, $\neg\sigma$ puede o no aparecer en Ψ_0. En cualquier caso, Ψ_0 expresa que deben existir al menos n elementos. Si $\neg\sigma$ aparece en Ψ_0, requerimos un modelo finito con al menos n elementos, lo cual es fácil de construir. De no aparecer $\neg\sigma$, requerimos un modelo con al menos n elementos. Escogemos por ejemplo a $\mathbb{N}$. El otro caso posible es que Ψ_0 sólo contenga a $\neg\sigma$, en cuyo caso escogemos cualquier conjunto finito. Hemos constatado que Ψ_0 es satisfacible, y como Ψ_0 es un subconjunto finito arbitrario de Ψ, por compacidad Ψ es satisfacible. (1)

Como arriba señalamos, que Ψ sea satisfacible es contradictorio. La contradicción aparece de haber supuesto que $\mathcal{K}$ es finito axiomatizable.

Lo más adecuado en este momento es presentar otras aplicaciones del teorema de compacidad, pero antes de incursionar en este vasto derrotero, retomemos un asunto pendiente. En el apartado sobre gráficas (página 231 del volumen I) estudiamos la teoría de gráficas y afirmamos que no hay una fórmula que defina la noción de conexidad (véase la página 237 del Volumen I). Disponemos de lo necesario para sostener nuestra afirmación.

Ejemplo 3.4.9.

Recuerde que una trayectoria en una gráfica $\mathfrak{G}$ de un vértice a a un vértice b es una sucesión de vértices adyacentes que comienza con a y termina con b. La longitud de la trayectoria es igual a la cantidad de vértices en la misma menos uno. El laborioso lector seguramente resolvió el ejercicio 3 del capítulo 3 del Volumen I que pide la descripción de una fórmula $d_n(x, y)$ que exprese la existencia de una trayectoria entre los vértices x y y de longitud n.

Por el contrario, no podemos expresar la noción de trayectorias, aunque sí podemos decir que existe una trayectoria de cierta longitud.

Suponga que sí podemos expresar la existencia de una trayectoria, es decir, que tenemos una fórmula $\varphi(x, y)$ que se cumple para cualesquier vértices x, y en una gráfica $\mathfrak{G}$ si y sólo si existe una trayectoria de x a y en $\mathfrak{G}$. Sean $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{a, b, R\}$ un lenguaje que extiende al lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}_G$ de la teoría de gráficas y

$$\Phi = \{\forall x \forall y \varphi(x, y), \neg d_1(a, b), \neg d_2(a, b), \neg d_3(a, b), \ldots\}.$$

El primer enunciado de Φ asegura que existe una trayectoria entre cualesquier dos vértices. Este enunciado se cumple en una gráfica si y sólo si la gráfica es conexa (según lo supusimos). Ya que el resto de enunciados afirma que no hay trayectorias entre a y b, Φ es contradictorio, por lo que no puede ser satisfacible. En consecuencia, no puede ser finito satisfacible según el teorema de compacidad. Sin embargo, cualquier subconjunto finito de Φ es satisfacible. Sin duda, si $\Delta \subseteq \Phi$ es finito, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta \subseteq \{\forall x \forall y \varphi(x,y), \neg d_1(a,b), \ldots, \neg d_m(a,b)\}$. Es fácil construir una gráfica conexa en la que los vértices que interpretan a a, b estén unidos por una sola trayectoria y de longitud $m+1$. Esto muestra que Φ es finito satisfacible, lo que conduciría a que Φ fuese satisfacible. El error aparece al haber supuesto que podemos construir la fórmula φ.

Ejemplo 3.4.10. Hicimos otra afirmación cuando tratamos con la teoría de gráficas: no existe un enunciado φ del lenguaje de la teoría de gráficas tal que, para toda gráfica $\mathfrak{G}$, se cumpla

$$\mathfrak{G} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{G} \text{ tiene una cantidad par de vértices.}$$

Capaces somos ahora mismo de demostrar nuestra afirmación. Suponga que existe tal enunciado φ. Para cada número natural l existe una gráfica $\mathfrak{G}_l$ con una cantidad par de vértices (es trivial construirla), que por tanto es modelo de φ. Esto significa que φ tiene modelos finitos de cardinalidad arbitrariamente grande. De acuerdo con el teorema 3.2.4, φ tiene un modelo infinito $\mathfrak{G}$, que por supuesto ya no tiene una cantidad par de vértices.

Modelos no estándar de la aritmética

Para estudiar con mayor precisión los números naturales recurrimos al lenguaje $\mathcal{L}_N = \{0, +, \cdot, \leq, s\}$, donde $+, \cdot$ son símbolo de 2-función, $0, 1$ son símbolos de constante, $\leq$ es un símbolo de 2-relación y s es un símbolo de 1-función. Recuerde que siempre trabajamos en presencia de los axiomas de ZFE, así que se puede probar la consistencia de la aritmética de Peano (en ZFE). En lo sucesivo trabajaremos en el lenguaje $\mathcal{L}_N$ a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.4.11.

1. Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1, s \rangle$ los números naturales con la interpretación usual de los símbolos de $\mathcal{L}_N$ y donde s se interpreta como la función sucesor, es decir, $s(n) = n+1$ para todo $n \in N$.
2. $Teo(\mathfrak{N})$ es el conjunto de enunciados que se cumplen en $\mathfrak{N}$; se llama la teoría de $\mathfrak{N}$.
3. Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de $Teo(\mathfrak{N})$, decimos que $\mathfrak{A}$ es un modelo de la aritmética. El modelo $\mathfrak{N}$ es el canónico o natural de $Teo(\mathfrak{N})$.

Para simplificar la notación, anotamos simplemente $\mathbb{N}$ en lugar de $\mathfrak{N}$, en el entendido de que $\mathbb{N}$ es realmente una $\mathcal{L}_N$-estructura con la interpretación recién descrita de los símbolos de $\mathcal{L}_N$.

Definición 3.4.12. Para todo término t y cada número natural n existe un término $s^n(t)$ (el n-ésimo sucesor de t) que se define por inducción como

$$\begin{aligned} s^0(t) &= t \\ s^{n+1}(t) &= ss^n(t). \end{aligned}$$

El término $s^n(0)$ tiene un papel preponderante, pues corresponde al número natural n, dado que $(s^n(0))^{\mathbb{N}} = n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4.13.

❶ Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de la aritmética. Los elementos finitos o estándar de $\mathfrak{A}$ son los elementos de la forma $a = (s^n(0))^{\mathfrak{A}}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. El resto de los elementos, en caso de existir, se llaman infinitos o no estándar.

❷ Para cualquier modelo $\mathfrak{A}$ de $Teo(\mathbb{N})$, sea

$$A_{Fin} = \{a \in A : a \text{ es finito}\} = \{(s^n(0))^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

❸ Un modelo $\mathfrak{A}$ de $Teo(\mathbb{N})$ es estándar si carece de elementos infinitos, es decir, si $A = A_{Fin}$. De lo contrario, $\mathfrak{A}$ no es estándar.

¿Qué caso tiene definir elementos y modelos no estándar si los únicos que conocemos son elementos y modelos estándar? El reto es encontrar modelos no estándar de $Teo(\mathfrak{N})$. Para ello recurrimos al teorema de compacidad.

Teorema 3.4.14. *Existen modelos no estándar de la aritmética.*

Demostración. Considere el lenguaje $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, donde c es un nuevo símbolo de constante. Sea

$$\Gamma = Teo(\mathbb{N}) \cup \{0 < c, s(0) < c, s^2(0) < c, s^3(0) < c, \ldots\}.$$

Afirmación 1. Γ es consistente.

Demostración de la afirmación 1. Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ finito; se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta \subseteq Teo(\mathbb{N}) \cup \{0 < c, s(0) < c, \ldots, s^n(0) < c\}.$$

Para probar que Δ es satisfacible, basta tomar nuestro modelo $\mathbb{N}$ y convertirlo en una $\mathcal{L}'$-estructura $\mathbb{N}'$ interpretando c como el natural $n+1$. Es inmediato que $\mathbb{N}' \models \Delta$, por lo que Γ es satisfacible de acuerdo con el teorema de compacidad. (1)

Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de Γ, digamos

$$\mathfrak{A} = \langle A, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, \leq^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Sea $a = c^{\mathfrak{A}} \in A$. Entonces para todo número natural n se cumple $\mathfrak{A} \models a > s^n(0)$. Ya que

$$\forall x(x > y \to x \neq y)$$

es un elemento de $Teo(\mathbb{N})$, $\mathfrak{A} \models c > s^n(0)$ implica que $\mathfrak{A} \models c \neq s^n(0)$, por lo que $\mathfrak{A} \models (a \neq s^n(0))$ para cualquier natural n.

Sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A}'$ es un modelo no estándar de la aritmética pues $\mathfrak{A}' \models a \neq s^n(0)$ para cada natural n. ❐

Note que en $\mathfrak{N}$ se cumple el siguiente $\mathcal{L}$-enunciado:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \exists y(x < y)$$

es decir, para cada natural n siempre podemos encontrar otro natural más grande que n. En consecuencia, este enunciado $\forall x \exists y(x < y)$ pertenece a $Teo(\mathfrak{N})$, por lo que también se debe cumplir en el modelo no estándar que recien construimos y de hecho en cualquier modelo estándar o no. En particular, en $\mathfrak{A}$ de la prueba, sabemos que a es un elemento no estándar, pero podemos aplicar este enunciado con $x = a$, lo que da lugar a que exista un elemento $a_1 \in A$ mayor que a. Este a_1 tampoco es estándar, pues no puede ser de la forma $s^{(m)}(0)$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, ya que a no lo es. Repetimos la aplicación del enunciado, pero esta vez con $x = a_1$ para encontrar $a_2 > a_1$ y asi sucesivamente. Esto nos indica que en realidad hemos introducido una cantidad infinita de elementos no estándar.

En un modelo no estándar $\mathfrak{B}$ arbitrario, sabemos que existe al menos un elemento $b \in B$ no estándar, por lo que si repetimos el razonamiento recién expuesto, se verifica que en $\mathfrak{B}$ existen una infinidad de elementos no estándar.

Lema 3.4.15. *Para todo modelo estándar $\mathfrak{M}$ de $Teo(\mathbb{N})$ existe un único isomorfismo $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$.*

Demostración. Primero probamos que existe a lo sumo un isomorfismo. Si $f_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$ son isomorfismos, deben cumplir ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} f_i(0) &= f_i(0^{\mathbb{N}}) = 0^{\mathfrak{M}} \\ f_i(1) &= f_i(s(0))^{\mathbb{N}} = (s(0))^{\mathfrak{M}} \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

por lo que $f_1 = f_2$, pues $\mathfrak{M}$ es un modelo estándar de $Teo(\mathbb{N})$, es decir, carece de elementos no estándar.

Ahora comprobemos que existe al menos un isomorfismo. Con este fin definimos

$\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$ mediante la siguiente prescripción obvia:

$$\pi(n) = (s^n(0))^{\mathfrak{M}}$$

para cada $n \in \omega$.

Afirmación 1. π es una biyección.

Demostración de la afirmación 1. Puesto que $\mathfrak{M}$ es estándar, π es sobre. Si n, m son dos naturales distintos, $(s^n(0))^{\mathbb{N}} = n \neq m = (s^m(0))^{\mathbb{N}}$, por lo que $\mathbb{N} \models s^n(0) \neq s^m(0)$, lo que indica que $s^n(0) \neq s^m(0)$ pertenece a $Teo(\mathbb{N})$ y se debe cumplir en $\mathfrak{M}$, de donde se deduce que $\mathfrak{M} \models s^n(0) \neq s^m(0)$, así que $\pi(n) \neq \pi(m)$. (1)

Afirmación 2. π es un isomorfismo.

Demostración de la afirmación 2. Ya vimos que es biyección; resta probar que respeta los símbolos no lógicos. Por definición, $0 = s^0(0)$, así que $\pi(0) = 0$. Además,

$$\pi(s^n(0)) = s^n(\pi(0)).$$

En cuanto a la suma $+$, debemos confirmar que $\pi(n +^{\mathbb{N}} m) = \pi(n) +^{\mathfrak{M}} \pi(m)$. Sea $k = n + m$, entonces $\mathbb{N} \models s^k(0) = s^n(0) + s^m(0)$, por lo que $\mathfrak{M} \models s^k(0) = s^n(0) + s^m(0)$, que indica $\pi(k) = \pi(n) +^{\mathfrak{M}} \pi(m)$. El producto $\cdot$ se trata en forma similar. Si $n <^{\mathbb{N}} m$, tenemos $\mathbb{N} \models s^n(0) < s^m(0)$, lo que da lugar a $\mathfrak{M} \models s^n(0) < s^m(0)$, es decir $\pi(n) <^{\mathfrak{M}} \pi(m)$. (2) □

Lema 3.4.16. *Existen a lo sumo $2^{\aleph_0}$ modelos numerables no isomorfos de $Teo(\mathbb{N})$.*

Demostración. Esto es más bien un ejercicio de aritmética cardinal. Dado un modelo numerable, su universo, sin considerar ninguna interpretación de símbolos del lenguaje, es esencialmente el mismo que para cualquier otro modelo numerable, pues existe una biyección entre ellos. Así que, lo que los distingue es la interpretación de los símbolos. El lenguaje en cuestión es $\mathcal{L}_N = \{0, +, \cdot, s, <\}$. Tenemos $\aleph_0$ posibles interpretaciones de 0, tenemos $\aleph_0^{\aleph_0}$ posibles interpretaciones de la 1-función s, tenemos $\aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$ posibles interpretaciones para cada 2-función, en particular para $+$ y $\cdot$. La relación $<$ debe consistir en parejas ordenadas de elementos del universo, así que tenemos a lo sumo $Pot(\aleph_0 \times \aleph_0)$ interpretaciones posibles para $<$. En resumen, tenemos a lo sumo

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \cdot \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

posibles interpretaciones de este lenguaje en un conjunto numerable. □

Lema 3.4.17. *Existe una cantidad innumerable de modelos numerables no isomorfos entre sí de $Teo(\mathbb{N})$.*

Demostración. Ya sabemos que tenemos a lo sumo $2^{\aleph_0}$ modelos numerables no isomorfos de $Teo(\mathbb{N})$, pero bien pudiera ocurrir que tuvieramos tan sólo uno, o dos, o una cantidad

numerable de modelos numerables de $Teo(\mathbb{N})$ no isomorfos entre sí, pero probaremos que esto no es posible, para lo cual apelamos al método diagonal de Cantor. Dada cualquier familia numerable $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$ de modelos numerables de $Teo(\mathbb{N})$, construiremos un modelo que no es isomorfo a ningúno en la lista. Sean $P \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de primos, y para cada natural n y todo $a \in M_n$

$$A_{n,a} = \{p \in P : \mathfrak{M}_n \models s^p(0) \mid a\},$$

donde $t_1 \mid t_2$ es una abreviación de la fórmula $\exists z(t_1 \cdot z = t_2)$. Es claro que cada $A_{n,a}$ es subconjunto de P y que $A_{n,a}$ es el conjunto de los primos que dividen a a en el modelo $\mathfrak{M}_n$. Note que $A_{n,a}$ puede ser finito o infinito, que para cada n tenemos a lo sumo una cantidad numerable de ellos, y que el conjunto

$$\{A_{n,a} : a \in M_n, n \in \mathbb{N}\}$$

es numerable. Dado que existen innumerables subconjuntos de P, podemos encontrar un conjunto $A \subseteq P$ que es diferente de cualquiera de los $A_{n,a}$; fijemos tal subconjunto A. En tal caso,

$$A \subseteq P \qquad \forall n \in \mathbb{N} \forall a \in M_n (A \neq A_{n,a}).$$

Construiremos un modelo de $Teo(\mathfrak{B})$ que no es isomorfo a ningún $\mathfrak{M}_n$. Sea $\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \boldsymbol{\mathcal{L}}(c)$, donde c es un símbolo nuevo de constante y Γ la siguiente $\boldsymbol{\mathcal{L}}(c)$-teoría.

$$\Gamma = Teo(\mathbb{N}) \cup \{s^p(0) \mid c : p \in A\} \cup \{\neg s^p(0) \mid c : p \in P - A\}.$$

Afirmación 1. Γ es consistente.

Demostración de la afirmación 1. Recurrimos a compacidad. Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito y verifiquemos que Γ_0 tiene modelo. En A existen sólo una cantidad finita de primos tales que la fórmula $s^p(0) \mid c$ está en Γ_0, porque Γ_0 es finito. Sea n el producto de esos primos y defina $\mathfrak{M}$ como $\mathfrak{M} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbb{N}$ y $c^{\mathfrak{M}} = n$. Es claro que $\mathfrak{M} \models Teo(\mathbb{N})$, por lo que para demostrar $\mathfrak{M} \models \Gamma_0$ requerimos verificar

$$\mathfrak{M} \models \Gamma_0 \cap \{s^p \mid c : p \in A\} \cup \{\neg s^p(0) \mid c : p \notin A\}.$$

Si $p \notin A$, sabemos que $p \nmid n$, por lo que $\mathfrak{M} \models p \nmid n$. Si $p \in A$, $s^p(0) \mid c \in \Gamma_0$, por definición ocurre que $p \mid n$, así que $\mathfrak{M} \models p \mid n$. Por compacidad, Γ es consistente. (1)

Sean $\mathfrak{M}$ un modelo de Γ, $n \in \mathbb{N}$ y $b = c^{\mathfrak{M}}$. Para terminar la prueba, constatamos que $\mathfrak{M} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}$ no es isomorfo a $\mathfrak{M}_n$. Suponga que $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}_n$ es un isomorfismo y sea

$a = f(b)$. Entonces para cada $p \in P$ se cumple que

$$\begin{aligned} p \in A \Leftrightarrow & \mathfrak{M} \models s^p(0) \mid c \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{M} \models s^p(0) \mid b \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{M}_n \models s^p(0) \mid a \\ \Leftrightarrow & p \in A_{n,a} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = A_{n,p}$, lo que se opone a nuestra elección de A. La contradicción surge de haber supuesto que podíamos enumerar mediante naturales a los modelos numerables no isomorfos de $Teo(\mathbb{N})$, así que no puede existir tal enumeración. □

Si queremos estudiar con mayor detalle nuestro modelo no estándar $\mathfrak{A}$, debemos tener presente que todo $\mathcal{L}$-enunciado φ que se cumpla en $\mathbb{N}$ se debe cumplir en $\mathfrak{A}$, pues $\varphi \in Teo(\mathbb{N})$ y $\mathfrak{A} \models Teo(\mathbb{N})$. Recíprocamente, de ocurrir que φ no se cumpla en $\mathbb{N}$, entonces $\neg\varphi$ se cumple en $\mathbb{N}$, por lo que $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

Lema 3.4.18. *Para todo $\mathcal{L}$-enunciado φ y cualquier modelo $\mathfrak{A}$ de la aritmética (estándar o no), tenemos*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{N} \models \varphi.$$

□

La gran diferencia entre $\mathfrak{A}$ y $\mathbb{N}$ se origina en que algunas propiedades de $\mathbb{N}$ no se pueden expresar en $\mathcal{L}$. Por ejemplo,

$$\forall x(x = 0 \vee x = s(0) \vee x = s^2(0) \vee \cdots)$$

se cumple en $\mathbb{N}$, con la semántica obvia, pero no es un enunciado de primer orden, pues esta lógica no permite disyunciones infinitas.

Sabemos muy poco de los elementos estándar porque no hay enunciados que describan sus propiedades, excepto enunciados que usan cuantificadores, por ejemplo $\forall x(x \geq 0)$, el cual se cumple para todo elemento x estándar o no.

En lo sucesivo fijamos un modelo no estándar $\mathfrak{A}$. Para cada natural n definimos una fórmula $\psi_n(x)$:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) \equiv & x \neq 0 \\ \psi_{n+1} \equiv & \psi_n \wedge x \neq s^{n+1}(0) \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \psi_1 \equiv & x \neq 0 \wedge x \neq s(0) \\ \psi_4 \equiv & x \neq 0 \wedge x \neq s(0) \wedge x \neq s^2(0) \wedge x \neq s^3(0) \wedge x \neq s^4(x) \end{aligned}$$

Lema 3.4.19. *Para cualquier número natural n,*

$$\mathbb{N} \models \forall x(\psi_n(x) \leftrightarrow x > s^n(0)).$$

Demostración. Procedemos por inducción en n. Si $n = 0$, entonces $s^0(0) = 0$ y $\psi_0(x) \equiv x \neq 0$. Sabemos que $\mathbb{N} \models \forall x(x \geq 0)$, por lo que si x es natural,

$$\mathbb{N} \models m \neq 0 \leftrightarrow m > s^0(0).$$

Supongamos cierto que

$$\mathbb{N} \models \forall x(\psi_n(x) \leftrightarrow x > s^n(0)),$$

y probemos la afirmación para $n+1$. Sea m un natural; queremos verificar que

$$\mathbb{N} \models \psi_{n+1}(m) \leftrightarrow m > s^{n+1}(0).$$

Supongamos que $\mathbb{N} \models \psi_{n+1}(m)$, entonces $m \neq s^n(0)$ y $m > s^n(0)$ por hipótesis de inducción pues $\psi_{n+1}(x) \equiv \psi_n(x) \wedge x > s^{n+1}(0)$. Como $\psi_{n+1}(m)$ se cumple en $\mathbb{N}$, sabemos también que $m \neq s^{n+1}(0)$. Si $m \leq s^{n+1}(0)$, entonces

$$s^n(0) < m < s^{n+1}(0)$$

porque $m = s^{n+1}(0)$ está excluido. Ya que $m = s^l(0)$ para algún l, se sigue que $l < n$, lo cual es imposible. En consecuencia, $m > s^{n+1}(0)$. Ahora suponga que $\mathbb{N} \models m > s^{n+1}(0)$. De inmediato obtenemos $m > s^n(0)$, así que $\mathbb{N} \models \psi_n(m)$ por hipótesis de inducción. Resta probar que $m \neq s^{n+1}(0)$, lo cual es obvio. ☐

Lema 3.4.20. *Si $a \in A_{Fin}$, $b \in A - A_{Fin}$, entonces $a <^{\mathfrak{A}} b$.*

Demostración. Sea $a = (s^n(0))^{\mathfrak{A}}$ para algún natural n. Sabemos que

$$\mathbb{N} \models \forall x(\psi_n(x) \rightarrow x > s^n(0)),$$

por lo que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\psi_n(x) \rightarrow x > s^n(0));$$

en particular,

$$\mathfrak{A} \models \psi_n(b) \rightarrow b > s^n(0).$$

Por definición de b

$$\mathfrak{A} \models \psi_n(b),$$

así que $\mathfrak{A} \models b > s^n(0) = a$. ☐

Lema 3.4.21. *Sea $\varphi(x)$ una $\mathcal{L}_N$-fórmula. Entonces*

1. *$\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ para todo $a \in A_{Fin}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$ para toda $b \in A$.*

2. $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$ *para alguna* $b \in A - A_{Fin}$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ *para una cantidad infinita de* $a \in A_{Fin}$.

3. $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$ *para toda* $b \in A - A_{Fin}$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ *para toda* $a \in A_{Fin}$ *excepto para una cantidad finita de tales* a.

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi(a) \text{ para toda } a \in A_{Fin} &\Leftrightarrow \text{para toda } n \in \mathbb{N},\ \ \mathfrak{A} \models \varphi(s^n(0)) \\ &\Leftrightarrow \text{para toda } n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{N} \models \varphi(s^n(0)) \\ &\Leftrightarrow \text{para toda } n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{N} \models \varphi(n) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{N} \models \forall x \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x \varphi(x).\end{aligned}$$

2. $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$ para alguna $b \in A - A_{Fin}$. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ sólo para una cantidad finita de $a \in A_{Fin}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models s^m(0) < y \to \neg\varphi(y).$$

Pero $b \in A - A_{Fin}$, de donde se sigue que $b >^{\mathfrak{A}} s^m(0)$, por lo que

$$\mathfrak{A} \not\models s^m(0) < b \to \neg\varphi(b),$$

una contradicción. Así que, $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ para una cantidad infinita de a.

En forma recíproca, suponga que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ para una cantidad infinita de $a \in A_{Fin}$. Se sigue que

$$\mathbb{N} \models \forall x \exists y (x < y \wedge \varphi(y));$$

en consecuencia, $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y (x < y \wedge \varphi(y))$. Ya demostramos que $\mathfrak{A}$ tiene un elemento $b \in A - A_{Fin}$ y como $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y (x < y \wedge \varphi(y))$, podemos tomar $x = b$ y obtener $\mathfrak{A} \models \exists y (b < y \wedge \varphi(y))$. Tal y es mayor que b, por lo que no debe ser estándar.

3. Para toda $b \in A - A_{Fin}$, $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$ implica que para toda $a \in A - A_{Fin}$,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \forall x (x > b \to \varphi(x)) \\ \Rightarrow \exists b \in A\ \ &\mathfrak{A} \models \forall x (x > b \to \varphi(x)) \\ &\Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \forall x (x > y \to \varphi(x)) \\ &\Rightarrow \mathbb{N} \models \exists y \forall x (x > y \to \varphi(x)),\end{aligned}$$

por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > k$ en $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \models \varphi(k)$.

En forma recíproca, si para todo $n > k$, $\mathbb{N} \models \varphi(n)$, entonces

$$\begin{aligned}&\mathbb{N} \models \forall x (x > s^k(0) \to \varphi(x)) \Rightarrow \\ &\mathfrak{A} \models \forall x (x > s^k(0) \to \varphi(x)),\end{aligned}$$

así que para toda $a \in A - A_{Fin}$, $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$. ❐

Corolario 3.4.22. *La propiedad «x es estándar» no se puede expresar en $\mathcal{L}_N$.*

Demostración. Si fuese expresable mediante, digamos, $\varphi(x)$, tendríamos que para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ si y sólo si $a \in A_{Fin}$, lo que estaría en contradicción con el lema 3.4.21(1). ❐

Definición 3.4.23. Sea $s = s^{\mathfrak{A}} : A \longrightarrow A$ la función sucesor en $\mathfrak{A}$. Definimos la función predecesor $p : A \longrightarrow A$ mediante

$$p(a) = \begin{cases} b, & \text{si } A \models a > 0 \text{ y } s(b) = a \\ 0, & \text{si } a = 0^{\mathfrak{A}}. \end{cases}$$

Esta definición tiene sentido pues

$$\mathbb{N} \models \forall x(x \neq 0 \to \exists\, !y s(y) = x),$$

de donde se sigue que

$$\mathfrak{A} \models \forall x(x \neq 0 \to \exists\, !y s(y) = x).$$

Recuerde que $\exists\, !z\varphi(z)$ es una abreviación de

$$\exists z\varphi(z) \wedge \forall x \forall y(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to (x = y)),$$

«existe un único z que satisface φ».

Note que $\mathfrak{A}$ tiene una función predecesor y que también se puede definir la resta: la fórmula $\forall x \forall y(x \leq y \to \exists\, !z(x + z = y))$ pertenece a $Teo(\mathbb{N})$, por lo que se cumple en $\mathfrak{A}$. En consecuencia, para todo $a \leq^{\mathfrak{A}} b$ en A,

$$\mathfrak{A} \models \exists\, !z(a + z = b).$$

Sea $b - a =$ el único $c \in A$ que satisface $\mathfrak{A} \models a + c = b$.

En forma similar, podemos extender a $\mathfrak{A}$ otras funciones definibles en $\mathbb{N}$.

También podemos tratar con relaciones.

Definición 3.4.24. Establecemos que $x \bowtie y$ si y sólo si existe un natural n tal que $s^n(x) = y$ o $s^n(y) = x$.

Las siguientes afirmaciones se obtienen de la definición:

1. La relación $\bowtie$ es de equivalencia.
2. La relación $\bowtie$ no es definible mediante una $\mathcal{L}_N$-fórmula pues $0 \bowtie x$ si y sólo si $x \in A_{Fin}$. Si existiera tal fórmula $\psi(x, y)$ con

$$\mathfrak{A} \models \psi(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad a \bowtie b,$$

entonces se cumpliría $a \in A_{Fin}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models a \bowtie 0$, lo que contradice el corolario 3.4.22.

3. Las clases de equivalencia respecto a $\bowtie$ son convexas, es decir, si $a < b < c$ y $a \bowtie c$, entonces $a \bowtie b$ pues si $\mathfrak{A} \models s^n(a) = c$ (es imposible $s^n(c) = a$ ya que $\mathfrak{A} \models s^n(c) = a \to c \leq a$, tenemos

$$\mathbb{N} \models \forall x \forall y \forall z (x < y < z \wedge s^n(x) = z \to (y = s(x) \vee y = ss(x) \vee \cdots \vee y = s^{n-1}(x)),$$

así que

$$\mathfrak{A} \models a < b < c \wedge s^n(a) = c \leftrightarrow (b = s(a) \vee b = s^2(a) \vee \cdots \; b = s^{n-1}(a)).$$

(Esta fórmula se debe definir por recursión.)

Definición 3.4.25.

❶ Dada $a \in A$, sea $[a]$ su clase de equivalencia respecto a $\bowtie$:

$$[a] = \{b \in A : a \bowtie b\}$$

❷ Sea $\overline{A} = \{[a] : a \in A\}$.

Ya que las clases de equivalencia son convexas, podemos definir un orden lineal entre clases.

Definición 3.4.26. Sean A, B dos clases de equivalencia distintas. Decimos que $A < B$ si para algún elemento $a \in A$ y para algún elemento $b \in B$ se cumple $a < b$.

Si tenemos dos clases de equivalencia A, B no necesariamente distintas, anotamos $A \leq B$ si $A < B$ o $A = B$.

Lema 3.4.27. *Sean A, B clases de equivalencia tales que $A < B$. Para toda $a \in A$ y toda $b \in B$, $a < b$.*

Podríamos haber definido

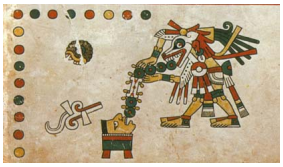
$$[a] < [b] \quad \Leftrightarrow \quad a \not\bowtie b \quad \text{y} \quad a < b.$$

Demostración. Supongamos lo contrario, que tenemos $b < a$ y $a_0 < b_0$, donde $a, a_0 \in A$ y $b, b_0 \in B$.

Caso 1. $b < a_0$, entonces $b < a_0 < b_0$, por lo que de la convexidad se sigue que $a \bowtie b$ y $A = B$, una contradicción.

Caso 2. $b > a_0$; en tal caso, $a_0 < b < a$ y otra vez $A = B$. □

Dejemos estos asuntos de la aritmética no estándar para presentar otras aplicaciones del teorema de compacidad.



Tlacuache mandaba a los demás animalitos. Un día vinieron a reclamarle. «Señor Ntlacuach, se pelearon Zorrillo y Mapache, y tu no pusiste paz. No te diste cuenta»... Luego se trenzaron Conejo y Venado, y Tlacuache tampoco puso paz. Y otra vez, fueron Venado y Zorrillo. Y otra, Zorrillo y Conejo. Y el señor Tlacuache como si nada... Había mucho disgusto entre los animales. Hasta muertes, porque no se respetaban. Eran como si no tuvieran dueño.

Leyenda mazahua

Tras el robo del fuego, la tlacuacha es destruida y vuelve a unir sus partes:

Corrieron hacia ella. Treparon y la alcanzaron. La despedazaron en mil pedacitos una parte para un lado, otra parte para el otro. Le quitaron cuanto tenía en las manos. Se la volvieron a llevar. Y bajaron, dejándola ahí. Allí esta tirada, muerta. Le habían quitado la vida, le habían quitado el fuego de su mano. Le habían quitado todo. Muerta.

Bueno, después de un rato reflexiona. Empieza a reflexionar en esto. Empieza a levantarse, a recoger sus pedacitos. De piel, de cabello, de corazón, de todo. De sandalias, de manos, de mollera, eso que es llamado la corona de la cabeza. De sesos, de todo. Puso todo otra vez en su lugar. Una vez que revivió, se sintió mejor. Todo estaba muy bien. Se puso feliz. Y dijo: «Ah ¿a poco se llevaron ese pedacito que me eché dentro de la bolsa. Ese pedacito que florecía de Tatewarí? ¿No se lo llevarían?» Buscó. Ahí estaba el pedacito. Lo sacó y comenzó a soplarle.

Leyenda huichol

Ejemplo 3.4.28. Primero retomamos la idea recién descrita para construir modelos no estándar de la aritmetica, pero esta vez construiremos conjunto de «reales» que tengan elementos infinitesimales, es decir elementos positivos pero infinitamente pequeños. Cuando Leibniz inventó el cáculo, el empleo de infinitesimales era algo recurrente sin mayor formalismo, pocos cuestionaban su existencia como objetos matemáticos, de hecho, Euler demostró varios resultados sin preocuparse por la validez del uso de infinitesimales. Por ejemplo, si se quería calcular la derivada de $f(x) = x^2$, se hacía lo siguiente,

$$\frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon,$$

y como ε era un infinitesimal, se podía depreciar y la respuesta es $2x$. En el siglo XIX, con la formalización de las matemáticas, se abandonó el uso de infinitesimales, y Weierstraß introdujo el uso de ϵ y δ para definir continuidad y límite. En la decada de los 60 del

siglo XX, A. Robinson retomó y formalizó la teoría de infinitesimales. Disertamos un poco sobre este trabajo de Robinson. Trabajamos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, y con la $\mathcal{L}$-estructura obvia:

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$$

con la interpretación natural. Sea $\boldsymbol{T} = Teo(\mathfrak{R})$ la teoría de $\mathfrak{R}$. Expandimos el lenguaje $\mathcal{L}$ mediante un nuevo símbolo de constante c, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ y generamos una $\mathcal{L}'$-teoría Γ:

$$\Gamma = \boldsymbol{T} \cup \left\{ 0 < c < \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Afirmación 1. Γ es consistente.

Si la afirmación 1 es cierta, disponemos de un $\mathcal{L}'$-modelo de $Teo(\mathbb{R})$ que contiene la interpretación de c. Digamos que $a = c^{\mathfrak{A}}$ y veamos que pasa con a. Resulta que a es positivo y es menor que $1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$. Este tipo de elementos se llaman infinitesimales pues son positivos pero son «muy chiquitos». Al igual que como se verificó para los modelos no estándar de la aritmética, se comprueba que no sólo hemos introducido un elemento no estándar, sino una infinidad de ellos. El modelo $\mathfrak{A}$ satisface todos los $\mathcal{L}$-enunciados que se cumplen en $\mathbb{R}$.

Demostración de la afirmación 1. Para comprobar que Γ es satisfacible, apelamos al teorema de compacidad. Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\boldsymbol{T} \subseteq \Gamma_0$ y que existe un mayor natural n tal que los enunciados

$$\left\{ 0 < c < 1, 0 < c < \frac{1}{2}, \ldots, c < \frac{1}{n} \right\}$$

están contenidos en Γ_0. Para probar que Γ_0 es consistente, debemos exhibir un modelo suyo. Escogemos, naturalmente, a $\mathfrak{R}$, pero debemos expanderlo para convertirlo en una $\mathcal{L}'$-estructura. Sólo debemos dar una interpretación a c. Simplemente escogemos $c = \frac{1}{n+n}$ y está elección nos permite afirmar que $\mathfrak{R}$ así expandido es modelo de Γ_0. (1)

El siguiente resultado ilustra el hecho de que la noción de «conjunto bien ordenado» no se puede axiomatizar en lógica de primer orden. Esta aseveración que parece ser inocua tiene enormes repercusiones en la lógica matemática. Es importante mencionar que en varias extensiones de la lógica clásica tampoco es posible tal axiomatización, por ejemplo en las lógicas infinitarias $L_{\kappa\omega}$ para cualquier cardinal κ. De hecho, que una lógica no permita tal axiomatización se reconoce como un cierto grado de compacidad.

Ejemplo 3.4.29. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con al menos un símbolo de 2-relación $<$. No existe un conjunto Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas tal que dada cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \Phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (A, <) \text{ está bien ordenado.}$$

Supongamos lo contrario, que Φ expresa que $(A, <)$ está bien ordenado y sea $\overline{\mathcal{L}}$ una extensión de $\mathcal{L}$ mediante una cantidad numerable de símbolos de constante, esto es,

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{c_n : n < \omega\}$$

y sea

$$\Delta = \Phi \cup \{c_{n+1} < c_n : n < \omega\}.$$

Es fácil ver que cada subconjunto finito de Δ tiene un modelo, ya que cualquier conjunto bien ordenado infinito (por ejemplo $\mathbb{N}$) tiene cadenas finitas decrecientes arbitrariamente largas. Se sigue que Δ tiene un modelo (la afirmación se sigue por compacidad), digamos $\mathfrak{A} = \langle A, <^{\mathfrak{A}}, a_0, a_1, \ldots\rangle$, donde $a_i = c_i^{\mathfrak{A}}$. En tal caso, $(A, <^{\mathfrak{A}})$ no está bien ordenado pues $\{a_i : i < \omega\}$ no tiene menor elemento.

Ahora cambiamos a cuestiones algebraicas.

Ejemplo 3.4.30. Recuerde que la característica de un campo, en general de un dominio entero, es el menor natural p tal que

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}} = 0.$$

Cuando no existe tal p, decimos que el campo tiene característica 0. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la aritmética. Se sigue del teorema fundamental de la aritmética que la característica de cualquier campo es cero o un número primo p.

Sea Car_p el $\mathcal{L}$-enunciado

$$1 + 1 + \cdots + 1 = 0 \qquad \text{con } p \text{ sumandos.}$$

No existe un conjunto Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas tal que para cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \Phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe un primo } p > 0 \text{ tal que } \mathfrak{A} \text{ es un campo de característica } p.$$

Supongamos que sí existe tal conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ. Sea Σ el conjunto de axiomas de la teoría de campos (véase página 99 del Volumen I).

Sabemos que existen campos de cualquier característica p o cero (considere $\mathbb{Q}$ y los $\mathbb{Z}_p$). Sea $\Delta = \Sigma \cup \Phi \cup \{\neg Car_p : p \text{ es primo}\}$. Entonces Δ es finito satisfacible considere

simplemente $\mathbb{Z}_q$ para q adecuado. Por lo tanto, Δ es satisfacible y tiene un modelo $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A} \models \Phi$, $\mathfrak{A}$ debe tener como característica un número primo p, pero $\mathfrak{A} \models \neg Car_p$, una contradicción que muestra lo equívoco de nuestra suposición sobre la existencia de Φ.

Ejemplo 3.4.31. Con la notación del ejemplo 3.4.30. No existe un conjunto finito Φ de $\mathcal{L}$-fórmulas tal que

$$\mathfrak{A} \models \Phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \text{ tiene característica cero.} \qquad (\text{✿})$$

Supongamos que sí existe tal conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas Φ. Como Φ es finito, tiene la forma $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y podemos tomar su conjunción $\varphi \equiv \bigwedge \Phi \equiv \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, por lo que φ es en realidad el enunciado que expresa la característica cero de $\mathfrak{A}$ en (✿).

Los modelos de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ son precisamente los campos de característica $p > 0$, para algún primo p, lo que contradice el ejemplo 3.4.30.

Ejemplo 3.4.32. Con la notación del ejemplo 3.4.30, si φ es un $\mathcal{L}$-enunciado que se cumple en todos los campos de característica cero, entonces existe $n_\varphi \in \mathbb{N}$ tal que φ se cumple en todo campo de característica $p \geq n_\varphi$. Sea φ tal $\mathcal{L}$-enunciado. Entonces $\Sigma \cup \{\neg Car_p : p \text{ es primo}\} \models \varphi$ por lo que se sigue del teorema de compacidad que φ es una consecuencia lógica de algún subconjunto finito de $\Sigma \cup \{\neg Car_p : p \text{ es primo}\}$, esto es, para algún $n_\varphi \in \mathbb{N}$,

$$\Sigma \cup \{\neg Car_p : p \text{ es primo} < n_\varphi\} \models \varphi.$$

En consecuencia, φ se cumple en todo campo de característica $p \geq n_\varphi$.

¿Dónde diablos está Coyonacazco? Dícese cuando alguien reprende y critica algo en público, pero no explica bien, dice muy poco.

Ejemplo 3.4.33. Sean $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de grupos, es decir, $\mathcal{L} = \{\cdot, e\}$, Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas que contiene los axiomas de la teoría de grupos (véase página

98 del Volumen I) y $\varphi(v)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Suponga que para todo n existe un modelo $\mathfrak{A}_n \models \Phi$ y $g_n \in A_n$ de orden finito $> n$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(g_n)$. Entonces existen un modelo $\mathfrak{A}$ de Φ y $g \in A$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(g)$ y g tiene orden infinito. En particular, no hay una fórmula $\psi(x)$ tal que para todo modelo $\mathfrak{B}$ de Φ y todo $b \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \psi(b) \qquad \Leftrightarrow \qquad b \text{ tiene orden finito.}$$

Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, donde c es un nuevo símbolo de constante. Sea

$$\Phi^* = \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} \neq e : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de Φ^* y g es la interpretación de c en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$ y g tiene orden infinito. Así que basta probar que Φ^* es satisfacible.

Con este fin, tome $\Delta \subseteq \Phi^*$ finito. Se sigue que

$$\Delta \subseteq \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} \neq e : n = 1, \ldots, m\}$$

para alguna $m \in \mathbb{N}$. Sea $\mathfrak{A}_m$ la $\mathcal{L}$-estructura que asegura nuestra hipótesis. La convertimos en una $\mathcal{L}^*$-estructura si hacemos $c^{\mathfrak{A}_m} = g_m$. Puesto que $\mathfrak{A}_n \models \Phi \cup \{\varphi(g_m)\}$ y g_m tiene orden $> m$, $\mathfrak{A}_m \models \Delta$. Así que Φ es finito satisfacible, por lo que es satisfacible.

Regresemos por un momento a la teoría de gráficas.

Ejemplo 3.4.34. Trabajamos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{E\}$, de una 2-relación. La clase $\mathfrak{G}$ de las gráficas infinitas es axiomatizable. En efecto, para cada $n \geq 1$ sea Σ_n el enunciado

$$\exists\, x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (x_i \neq x_j) \right)$$

que demanda la existencia de al menos n elementos distintos (aquí el símbolo $\bigwedge$ representa una conjunción de una cantidad finita de fórmulas). Por ejemplo, Σ_2 es el enunciado

$$\exists\, x_1, x_2 (x_1 \neq x_2).$$

Recuerde que una gráfica debe satisfacer

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \neg \exists\, x (E(x,x)) \\ \sigma_2 &\equiv \forall\, x, y (E(x,y) \to E(y,x)). \end{aligned}$$

Podemos tomar $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\} \cup \{\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ y obtener que la clase $\mathfrak{G}$ es axiomatizable mediante Σ, lo que el lector puede confirmar fácilmente.

Una gráfica finita, por supuesto, no puede satisfacer el conjunto de enunciados Σ del ejemplo, pero la clase $\mathfrak{Gf}$ de las gráficas finitas también tiene derecho a que nos ocupemos y preocupemos de ella.

Lema 3.4.35. *La clase $\mathfrak{Gf}$ no es axiomatizable.*

Demostración. Suponga que Ψ fuese un conjunto de axiomas tal que $\mathfrak{Gf} = Mod(\Psi)$. Es claro que cualquier gráfica finita debe pertenecer a $\mathfrak{Gf}$, es decir, dado cualquier número natural n, una gráfica G de cardinalidad n es un miembro de $\mathfrak{Gf}$, de donde se sigue que Ψ tiene modelos de cardinalidad $\geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Del teorema 3.2.4 se desprende que Ψ tiene modelos infinitos, absurdo. □

Ya sabemos que la clase $\mathfrak{G}$ sí es axiomatizable; no es el caso que sea finito axiomatizable, como a continuación mostramos.

Lema 3.4.36. *La clase $\mathfrak{G}$ de las gáficas no es finito axiomatizable.*

Demostración. Suponga que existe un conjunto finito $\boldsymbol{T}$ de enunciados tales que $\mathfrak{G} = Mod(\boldsymbol{T})$, digamos $\boldsymbol{T} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, y considere el siguiente conjunto $\boldsymbol{T}'$ de enunciados (del ejemplo 3.4.34): $\boldsymbol{T}' = \{\sigma_1, \sigma_2, \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \varphi_n)\}$. Se sigue que la clase de las gráficas finitas estaría axiomatizada por $\boldsymbol{T}'$, lo cual, ya vimos, es imposible. □

Ejemplo 3.4.37. Nos ocupamos de los campos ordenados. Antes usamos los axiomas que satisface un campo en el lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \{\cdot, +, 0, 1\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv \forall\, x, y, z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\
\sigma_2 &\equiv \forall\, x, y, z((x + y) + z = x + (y + z)) \\
\sigma_3 &\equiv \forall\, x(x + 0 = x) \\
\sigma_4 &\equiv \forall\, x \exists\, y(x + y = 0) \\
\sigma_5 &\equiv \forall\, x, y(x + y = y + x) \\
\sigma_6 &\equiv \forall\, x, y(x \cdot y = y \cdot x) \\
\sigma_7 &\equiv \forall\, x(x \cdot 1 = x) \\
\sigma_8 &\equiv \forall\, x, y, z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z) \\
\sigma_9 &\equiv \neg(0 = 1) \\
\sigma_{10} &\equiv \forall\, x(\neg(x = 0) \to \exists\, y(x \cdot y = 1)).
\end{aligned}$$

Como nos interesan los campos ordenados, habremos de incorporar un símbolo adicional $<$ de 2-relación; así, nuestro lenguajes es $\mathcal{L} = \{\cdot, +, 0, 1, <\}$. Por supuesto $\sigma_1 - \sigma_{10}$ siguen siendo expresables en este nuevo lenguaje. Requerimos incorporar el comportamiento del campo respecto al orden:

$$\begin{aligned} o_1 \equiv & \forall x \neg(x < x) \\ o_2 \equiv & \forall x, y, z(x < y \wedge y < z \to x < z) \\ o_3 \equiv & \forall x, y(x = y \vee x < y \vee y < x) \\ o_4 \equiv & \forall x, y, z(x < y \to x + z < y + z) \\ o_5 \equiv & \forall x, y(0 < x \wedge 0 < y \to 0 < x \cdot y). \end{aligned}$$

Así, la clase $\mathfrak{Ro}$ de los campos ordenados es finito axiomatizable mediante $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{10}, o_1, \ldots, o_5\}$.

Recuerde que la propiedad arquimediana de los números reales establece que para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ existe un natural n tal que $n \cdot a \geq b$. El puntos es ¿podemos expresar la propiedad arquimediana en nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ de los campos ordenados? ¿es la propiedad arquimediana una consecuencia de los axiomas Σ del ejemplo 3.4.37? En virtud del siguiente ejemplo, la respuesta a ambas preguntas es **no**.

Ejemplo 3.4.38. Sea T el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados que se cumplen en los números reales, es decir, en la estructura $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$, donde la interpretación de los símbolos en $\mathcal{L}$ es la natural. Considere un nuevo símbolo de constante c, al lenguaje $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ (es decir, una expansión de $\mathcal{L}$ mediante un símbolo de constante), y al conjunto de $\mathcal{L}''$-enunciados Ψ que consiste en los enunciados en Σ del ejemplo 3.4.37 (de un campo ordenado) juntos con los enunciados en T y los siguientes:

$$\begin{aligned} \psi_1 \equiv & \neg(c = 0) \\ \psi_2 \equiv & \neg(c = 1) \\ \psi \equiv & \{n \cdot 1 < c \vee n \cdot 1 = c : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Se afirma que Ψ tiene un modelo. Con este fin recurrimos al teorema de compacidad, de suerte que debemos verificar que cualquier subconjunto finito Ψ_0 de Ψ tiene un modelo; recuerde que Ψ consiste en los enunciados en Σ, los que viven en T y $\{\psi, \psi_2\}$ junto

con el conjunto ψ, y dado que Ψ_0 es un subconjunto finito de Ψ, y debemos encontrarle un modelo a Ψ_0, no perdemos generalidad si pensamos que en Ψ_0 están todos los enunciados de $\boldsymbol{T}$, de Σ y viven también ahí ψ_1 y ψ_2. Ψ_0 sólo puede contener una cantidad finita de enunciados en ψ, digamos

$$\sigma = \{n_1 \cdot 1 \leq c, n_2 \cdot 1 \leq c, \ldots, n_l \cdot 1 \leq c\}$$

donde hemos abreviado la notación empleando $\leq$ en lugar de $<$ y $=$. Tampoco perdemos generalidad si suponemos que en Ψ están presentes aquellos enunciados de ψ de la forma $m \cdot 1 \leq c$ para m un natural menor o igual que n_l.

La tarea es, pues, conseguir un modelo de Ψ_0 recién descrito. Podemos recurrir a $\mathfrak{R}$; en esta estructura se cumplen Σ, pues es un campo ordenado, y $\boldsymbol{T}$ porque así se definió $\boldsymbol{T}$. Ahora debemos pensar en $\mathfrak{R}$ como una $\boldsymbol{\mathcal{L}}''$-estructura, esto es, debemos interpretar los símbolos en $\boldsymbol{\mathcal{L}}''$ en $\mathfrak{R}$. Naturalmente, los símbolos en $\boldsymbol{\mathcal{L}}''$ que pertenencen a su vez a $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ conservan su interpretación, por lo que sólo debemos encontrar una interpretación adecuada de c. Debemos elegir como su interpretación un número real que sea distinto de 0 y de 1, pero además debe satisfacer los enunciados en σ. Esto es muy sencillo pues $n_j \cdot 1$ en $\mathfrak{R}$ es simplemente n_j para cualquier $n_j \in \mathbb{N}$, así que considere cualquier número real x que sea mayor que n_l y establezcamos la interpretación de c como ese número x, es decir, $c^{\mathfrak{R}} = x$. Se sigue que todos los enunciados en Ψ_0 se cumplen en $\mathfrak{R}$ si damos a c la interpretación recién establecida. Por tanto, Ψ es finito satisfacible, así que Ψ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ por el teorema de compacidad.

Bueno, en $\mathfrak{A}$ se deben cumplir todos los enunciados en Ψ, por lo que $\mathfrak{A}$ es un campo ordenado, que satisface todos los enunciados que se cumplan en los reales, esto es, en $\mathfrak{R}$, pero la propiedad arquimediana no se cumple para el 1 y $c^{\mathfrak{A}}$, pues $\mathfrak{A}$ debe satisfacer ψ. Se sigue que $\mathfrak{A}$ no tiene la propiedad arquimediana.

Ahora suponga que la propiedad arquimediana de los números reales se puede expresar en primer orden, digamos en un lenguaje $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ mediante un conjunto de $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$-fórmulas Θ. Así, la $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$-estructura $\mathfrak{A} \models \Theta$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ satisface la propiedad arquimediana. Por supuesto, estamos tratando de expresar la propiedad arquimediana de los números reales, por lo que el lenguaje $\overline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ debe ser interpretable en los reales. Podemos expander este lenguaje para formar uno que contenga al lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}''$ dado arriba.

Entonces esta expresabilidad está incluida en el conjunto $\boldsymbol{T}$ del ejemplo 3.4.38, pues $\boldsymbol{T}$ comprende todos los $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados que se valen en los reales. Pero acabamos de construir un ejemplo de un campo ordenado donde se cumple $\boldsymbol{T}$ pero no es arquimediano, contradicción. La propiedad arquimediana es equivalente al axioma del supremo, por lo que podemos deducir que el axioma del supremo no se puede expresar en primer orden.

De paso, este ejemplo también muestra que la propiedad arquimediana o el axioma del supremo, no son consecuencia de los axiomas de un campo ordenado.

Ejemplo 3.4.39. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$. Suponga que la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ está ordenada parcialmente por $<$. Existe una 2-relación $\prec$ tal que $(A, \prec)$ es un conjunto linealmente ordenado y $\prec$ extiende a $<$, es decir, para cualesquier $a, b \in A$,

$$a < b \qquad \Rightarrow \qquad a \prec b.$$

Primero confirmamos nuestra afirmación para A finito, lo que logramos por inducción en la cardinalidad de A. Si $A = 1$, no hay mucho que probar. Suponga que ha quedado demostrado para todo conjunto finito de cardinalidad m y que $(A, <)$ es un cpo de tamaño $m + 1$. Fijemos $a_0 \in A$ y considere $A' = A - \{a_0\}$ y $<' = < \cap (A' \times A')$. Sea $\prec'$ un orden lineal en A' tal que $<'$ es un subconjunto de $\prec'$. Sea

$$X = \{u \in A' : \exists v(v < a_0 \wedge u \preceq' v)\},$$

y definimos una relación $\prec$ en A prescribiendo, para $x, y \in A$,

$$x \prec y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in A' \wedge x \prec' y, & \vee \\ x \in X \wedge y = a_0, & \vee \\ x = a_0 \wedge y \in A - (X \cup \{a_0\}). \end{cases}$$

Se verifica que esto propicia un orden lineal que extiende a $<$. En efecto, es claro que $\prec$ es irreflexivo. Suponga que $x \prec y \prec a$; queremos verificar que $x \prec z$. Si $x, y, z \in A'$, esto es obvio. Restan tres casos.

Caso 1. $x = a_0$. Entonces, $y \in A - (X \cup \{a_0\})$. Como $y \notin X$, lo que implica que $z \neq a_0$ y suponga que $z \in X$. En forma correspondiente escogemos v tal que $v < a_0$ y $z \preceq' v$. Además, $y \prec' z$, por lo que $y \prec' v$, de donde se sigue $y \in X$, una contradicción. Por tanto, $z \notin X$, y $x \prec z$.

Caso 2. $y = a_0$. Así, $x \in X$, $z \in A - (X \cup \{a_0\})$. Como $x \in X$, escogemos v tal que $v < a_0$ y $x \preceq' v$. Es claro que $z \neq x$; suponga que $z \prec' x$. Se sigue que $z \prec' v$, así que $z \in X$, una contradicción. La única posibilidad que resta es $x \prec' z$, lo que da paso a $x \prec z$.

Caso 3. $z = a_0$. En tal situación $y \in X$ y $x \prec' y$. De la definición de X se desprende que $x \in X$ y $x \prec' z$.

En seguida mostramos que $(A, \prec)$ es un orden lineal, para lo cual tomamos $x, y \in A$. Si ambos están en A', $x \prec' y$ o $y \prec' x$, por lo que $x \prec y$ o $y \prec x$. Suponga que uno de ellos, digamos x, es a_0. Entonces, $y \in X$, en cuyo caso $y \prec x$ o $y \notin X$, de donde se sigue $x \prec y$.

Resta mostrar que $<$ es un subconjunto de $\prec$. Suponga que $x < y$. Si $x, y \in A'$, deducimos $x \prec' y$; así $x \prec y$. Suponga que $x = a_0$. Si $y \in X$, escogemos v con $v < a_0$ y $y \preceq' v$. Entonces, $v < a_0 < y$, por lo que $v < y$, de donde se dedcue $v \prec' y$, una contradicción. En consecuencia, $y \notin X$, lo que da lugar a $x \prec y$. Finalmente, suponga que $y = a_0$. Por tanto, $x \in X$ por definición de X, lo que abre paso a $x \prec y$.

Esto completa el caso en que A es finito. Ahora consideramos una estructura parcial-

mente ordenada $(A, <)$ con A infinito. Consideramos un lenguaje que tiene la 2-relación $<$. Lo expandimos a un lenguaje $\mathcal{L}$ que contiene símbolos de constante $\dot{a}$, para cada $a \in A$. Construimos el siguiente conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Enunciados que aseguran $<$ es un orden lineal, además $\dot{a} < \dot{b}$ siempre que $a < b$, para culesquier $a, b \in A$.

Debemos mostrar que Γ es satisfacible, para lo cual recurrimos al teorema de compacidad. Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Podemos suponer que en Γ aparecen los enunciados que afiman que $<$ es un orden parcial, y una cantidad finita de enunciados $\dot{a} < \dot{b}$. Confomamos un conjunto finito H con los símbolos de constante $\dot{a}$ que aparecen en Γ_0. Tratamos a los símbolos de constante $\dot{a}$ como si fueran propiamente los $a \in A$, así que H es un conjunto parcialmente ordenado. Por lo previamente tratado, podemos extender este orden parcial en H a un orden lineal, de donde se sigue que Γ_0 tiene modelo. Por lo tanto, Γ tiene modelo, digamos $\mathfrak{B}$. En $\mathfrak{B}$ se interpretan los símbolos de constante $\dot{a}$, para cada $a \in A$ y el orden lineal en $\mathfrak{B}$ extiende al orden parcial en A. Resta extender este orden parcial en A a uno lineal, para lo cual empleamos el de $\mathfrak{B}$. Si $a, a' \in A$, prescribimos $a \prec a'$ si $\dot{a}^{\mathfrak{B}} < \dot{a'}^{\mathfrak{B}}$. Es claro que $(A, \prec)$ es un conjunto linealmente ordenado. Si $a, a' \in A$ y $a < a'$, el enunciado $\dot{a} < \dot{a}'$ parece en Γ, por lo que se cumple en $\mathfrak{B}$, lo que significa que $\dot{a}^{\mathfrak{B}} < \dot{a'}^{\mathfrak{B}}$, lo que implica $a \prec a'$.

A continuación un resultado relevante sobre finito axiomatizabilidad.

Lema 3.4.40. *Suponga que una $\mathcal{L}$-teoría $\boldsymbol{T}$ se puede axiomatizar mediante un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados Σ y que Λ es un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados tal que para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \Sigma$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \Lambda$. Entonces $\boldsymbol{T}$ es finito axiomatizable.*

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{T}$ no es finito axiomatizable. En particular, Σ es infinito. Se sigue que cualquier subconjunto finito de Σ tiene un modelo que no es modelo de $\boldsymbol{T}$. Porque si todo modelo de Σ_0 fuese modelo de $\boldsymbol{T}$, Σ_0 axiomatizaría a $\boldsymbol{T}$. Sea $\Gamma = \Sigma \cup \Lambda$. Por lo recién descrito, Γ resulta finito satisfacible, de donde se sigue que Γ mismo es satisfacible, lo cual es absurdo. La contradicción proviene de haber supuesto que $\boldsymbol{T}$ no es finito axiomatizable. ❐

Una consecuencia interesante del lema 3.4.40 es que la clase de los conjuntos finitos no es axiomatizable en primer orden. Si fuese axiomatizable, digamos mediante el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados Λ, estariamos en la situación del lema 3.4.40, donde Σ axiomatiza a la clase de los conjuntos infinitos (ya vimos antes que esto ocurre). Se seguiría que la clase de los conjuntos infinitos es finito axiomatizable, algo que ya antes descartamos.

3.5 Análisis no estándar

Es interesante y provechoso, para nuestro tratamiento de la lógica matemática, ahondar los asuntos tratados en el ejemplo 3.4.28. Allí introdujimos un infinitesimal, en realidad, mostramos que existe una estructura, no estándar, en la que se cumple cualquier

enunciado del lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$ válido en $\mathbb{R}$. En esta continuación modificamos un poco el escenario para propiciar resultados y aplicaciones diversas. El lenguaje se enriquece, tiene los siguientes símbolos

$$\{0, 1, <, +, -, \cdot, |\cdot|\}$$

Estos símbolos tienen un significado evidente, donde el último refiere a la función valor absoluto, y la interpretación de todos ellos en $\mathbb{R}$ es la natural. Igualmente añadimos al lenguaje símbolos de constante $\{c_r : r \in \mathbb{R}\}$ (donde c_r se interpreta en $\mathbb{R}$ como r); el lenguaje así enriquecido se denota $\mathcal{L}$, pero también agregamos una nueva constante α, para formar $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\alpha\}$. Considere la siguiente $\mathcal{L}'$-teoría.

- Los $\mathcal{L}$-enunciados que se cumplen en $\mathbb{R}$;
- Las $\mathcal{L}'$-fórmulas $\{0 < \alpha < c_r : r \in R^+\}$ ($\mathbb{R}^+$ son los reales > 0).

En forma enteramente similar a como se procedió en el ejemplo 3.4.28, se verifica que Σ es satisfacible.

Definición 3.5.1 (Reales no estándar)**.** Sea $\mathbb{R}^*$ una $\mathcal{L}'$ estructura que satisface Σ.

En esta estructura $\mathbb{R}^*$ aparecen (una copia) de los reales estándar así como un infinitesimal que interpreta a α.

Lema 3.5.2. *Existe una encaje de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$.*

Demostración. La aplicación $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ que buscamos es simplemente la obvia: cada $r \in \mathbb{R}$ se aplica en $c_r^{\mathbb{R}^*}$, que resulta inyectiva por el hecho de que las constantes c_r se deben interpretar como elementos de $\mathbb{R}^*$ diferentes entre sí, pues está implicito el enunciado $c_r \neq c_s$ siempre que $r \neq s$. ∎

El lector que continue su formación en teoría de modelos averiguará que π es, en realidad, un encaje elemental, modo que los reales $\mathbb{R}$ son una subestructura elemental de $\mathbb{R}^*$: todo lo que podamos lograr en $\mathbb{R}^*$ y se expresable en $\mathcal{L}$, se puede transferir a $\mathbb{R}$. Por supuesto, esto no ocurre con la presencia del infinitesimal $\alpha^{\mathbb{R}^*}$.

Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^*$.

- $\mathfrak{b} = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists\, r \in \mathbb{R}^+(|x| < r)\}$.
- $\mathfrak{o} = \{x \in \mathbb{R}^* : \forall\, r \in \mathbb{R}^+(|x| < r)\}$.

El conjunto $\mathfrak{b}$ es la colección de los elemento acotados (aquellos que no son «infinitamente grandes»), mientras que $\mathfrak{o}$ es el conjunto de infinitesimales («infinitamente cercanos a 0»). Es claro que $\mathfrak{o} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Lema 3.5.3. *El conjunto $\mathfrak{b}$ es un anillo, y el conjunto $\mathfrak{o}$ es un ideal de $\mathfrak{b}$.*

Demostración. Un ejercicio sencillo para el lector. ☐

Ahora definimos un isomorfismo $\mathfrak{b}/\mathfrak{o} \cong \mathbb{R}$.

Definición 3.5.4. Para cualquier $x \in \mathfrak{b}$ no negativo, sea $es(x)$ la menor cota superior de $\{r \in \mathbb{R} : r < x\}$. Para x negativa, definimos $es(x)$ como $es(x) = -es(-x)$.

Tiene sentido nuestra definición, porque $\mathbb{R}$ es Dedekind completo. Sea $x \in \mathfrak{b}$ no negativo; el subconjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ de $\mathbb{R}$ no es vacío y está acotado superiormente porque $x \in \mathfrak{b}$. Por consiguiente, A tiene mínima cota superior en $\mathbb{R}$, de modo que $es(x)$ está bien definida.

Lema 3.5.5. *La aplicación es es un homomorfismo de anillos con núcleo* $\mathfrak{o}$.

Demostración. Ejercicio. ☐

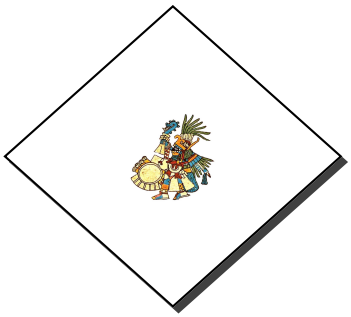
Ya que $ex(x)$ es una aplicación sobre $\mathbb{R}$ (es la identidad en $\mathbb{R}$), se deduce que $es(x)$ induce un isomorfismo $\mathfrak{b}/\mathfrak{o} \cong \mathbb{R}$. En particular, cualquier elemento $x \in \mathfrak{b}$ se puede escribir en forma única como la suma de un número real $es(x)$ (su parte estándar) y un infinitesimal $\varepsilon \in \mathfrak{o}$. Por supuesto, esto no es cierto para elementos de $\mathbb{R}^* - \mathfrak{b}$, pues son inifinitamente grandes.

Con lo previo el lector está preparado para continuar en esta dirección y efectuar cálculos, propios de los reales, en forma elegante y concisa empleando infinitesimales. Por ejemplo, la función f es continua en $a \in \mathbb{R}$ si para todo infinitesimal ε, $f(a+\varepsilon) - f(a)$ es infinitesimal.

El descubrimiento del maíz
Así pues de nuevo dijieron los dioses:
¿Qué comerán los hombres, ah dioses?
¡que descienda el maíz, nuestro sustento!
Pero entonces la hormiga va a tomar
el maíz desgranado, dentro del monte de nuestro sustento
Quetzalcóatl se encuentra a la hormiga,
le dice:
¿Dónde tomaste el maíz?,
dímelo,
Mas la hormiga no quiere decírselo.
Quetzalcóatl con insistencia le hace preguntas.
Al cabo dice la hormiga:
«En verdad allí».
Entonces guía a Quetzalcóatl,
éste se transforma enseguida en hormiga negra.
La hormiga roja lo guía,
lo introduce luego al monte de nuestro sustento.
Entonces ambos sacan y sacan maíz.
Dizque la hormiga roja

guió a Quetzalcóatl
hasta la orilla del monte,
donde estuvieron colocando el maíz desgranado.
Luego Quetzalcóatl lo llevo a cuestas e Tamoanchan.
Allí abundantemente comieron los dioses,
después en nuestros labios puso maíz Quetzalcóatl,
para que nos hiciéramos fuertes.
Y luego dijieron los dioses:
¿Qué haremos con el monte de nuestro sustento?
Mas el monte allí quiere quedarse,
Quetzalcóatl lo ata,
pero no puede moverlo.
Entre tanto echaba suertes Oxomoco,
y también echaba suertes Cipactónal,
la mujer de Oxomoco,
porque era mujer Cipactónal.
Luego dijieron Oxomoco y Cipactónal:
«Tan sólo si lanza un rayo Nanáhuatl,
quedará abierto el monte de nuestro sustento».
Entonces bajaron los tlaloques
los tlaloques azules,
los taloques blancos,
los tlaloques amarillos,
los tlaloques rojos.
Nanáhuatl lanzó enseguida un rayo
entonces tuvo lugar el robo
del maíz, nuestro sustento,
por parte de los tlaloques.
El maíz blanco, el oscuro, el amarillo,
el maíz rojo, los frijoles,
la chía, los bledos,
los bledos de pez,
nuestro sustento,
fueron robados para nosotros.

Leyenda de los soles.



3.6 ➠ Ejercicios

1. Una gráfica es k-coloreable si podemos asociar un color a sus vértices (tenemos al menos k colores) de tal forma que dos vértices del mismo color compartan el mismo borde. Muestre que no existe un enunciado φ_k tal que $\mathfrak{G} \models \varphi_k$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ es k-coloreable.

2. Sea κ un cardinal infinito. Demuestre que existe un modelo no estándar de la aritmética de tamaño al menos κ.

3. En referencia al apartado 3.4, demuestre que para todo término sin variables t existe un natural n tal que $t^{\mathfrak{A}} = (s^n(0))^{\mathfrak{A}}$.

4. En referencia a la definición 3.4.25, pruebe que $<$ define un orden lineal en $\overline{A}$ cuyo menor elemento es $[0] = A_{Fin}$.

5. En referencia a la definición 3.4.25, muestre que $\bowtie$ respeta la suma: si $a \bowtie a'$ y $b \bowtie b'$, entonces $a + b \bowtie a' + b'$ y podemos definir la suma de clases como $[a] + [b] = [a + b]$.

6. En la página 205 se describe un modelo para un conjunto de Henkin. Llamemos a este modelo $\mathfrak{C}$. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de 1-relación.

   (i) Considere $\Phi = \{\exists x R(x)\} \cup \{\neg R(y) : y \in Var\}$. Muestre que:

   a) Φ es satisfacible y por tanto, consistente.

   b) Para ningún $\mathcal{L}$-término t, $\Phi \vdash_N R(t)$.

   c) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de Φ, entonces $A - \{t^{\mathfrak{A}} : t \text{ es un } \mathcal{L}\text{-término}\}$ no es vacío.

   (ii) Sean x, y variables distintas y $\Phi = \{R(x) \vee R(y)\}$. Muestre que:

   a) No se cumple $\Phi \vdash_N R(x)$ y tampoco $\Phi \vdash_N \neg R(x)$, es decir, Φ no es completa respecto a la negación.

   b) No se cumple $\mathfrak{C} \models \Phi$.

7. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras. Podemos hablar de la clase complemenaria $\mathcal{K}^c$, pues $\mathcal{K}^c$ consiste en todas aquellas $\mathcal{L}$-estructuras que no pertenezcan a $\mathcal{K}$. Suponga que tanto $\mathcal{K}$ como $\mathcal{K}^c$ son axiomatizables. Demuestre que tanto $\mathcal{K}$ como $\mathcal{K}^c$ son finito axiomatizables. [Sugerencia: Digamos que Σ axiomatiza a $\mathcal{K}$ y Γ axiomatiza

a $\mathcal{K}^c$. Note que $\Sigma \cup \Gamma$ **no** es satisfacible, así que por compacidad... complete el argumento].

8. Sean $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ el lenguaje apropiado para la teoría de campos ordenados y $\boldsymbol{T}$ el conjunto de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados que se cumplen en los reales, vistos como la estructura $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$ con la interpretación usual. Demuestre que existe un modelo de $\boldsymbol{T}$ que no es isomorfo a $\mathfrak{R}$. [Sugerencia: use el teorema 3.2.6].

9. En el texto se demostró que la propiedad de una gráfica de ser conexa no es expresable mediante un enunciado en el lenguaje de gráficas $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{E\}$. Demuestre que tampoco es expresable mediante un conjunto de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados. [Sugerencia: suponga que la clase de las gráficas conexas $\mathfrak{Gc}$ es axiomatizable mediante el conjunto de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados Γ. Tome una gráfica $G \in \mathfrak{Gc}$ y sea $\boldsymbol{T}$ el conjunto de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados que se cumplen en G. La gráfica elegida G puede pensarse infinita, simplemente considere una sucesión infinita de puntos conectados entres sí, es decir uno conectado con el que le sigue en la sucesión. Esta es una gráfica infinita conexa. Ahora establezca los siguientes $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$-enunciados, donde $\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \boldsymbol{\mathcal{L}} \cup \{a, b\}$ con a, b símbolos de constante:

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv a \neq b \\
\sigma_1 &\equiv \neg E(a, b) \\
\sigma_2 &\equiv \neg \exists\, x_1 (E(a, x_1) \wedge E(x_1, b)) \\
\sigma_3 &\equiv \neg \exists\, x_1, x_2 (E(a, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, b)) \\
&\vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\sigma_{n+1} &\equiv \neg \exists\, x_1, \ldots x_n (E(a, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \cdots E(x_n, b)) \\
&\vdots\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Sea $\Sigma = \boldsymbol{T} \cup \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ y muestre que Σ es satisfacible apelando a compacidad y a la gráfica G (como se hizo en el ejemplo 3.4.38). El modelo H es una gráfica que no es conexa, pero que sí satisface Γ, pues supusimos que $\Gamma \subseteq \boldsymbol{T}$.]

Demuestre que H y G no son isomorfas.

10. Muestre que la clase de los grupos cíclicos no es axiomatizable, como tampoco lo es la clase de los p-grupos para p un primo.

11. Dada una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$, decimos que el elemento $a \in A$ es definible cuando existe una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que $\{a\} = \{b \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$. Trabajamos en el lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ de los campos ordenados; y sea $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$ la interpretación natural.

   a) Constate que 1 es definible en $\mathfrak{R}$.

b) Verifique que cualquier entero positivo es definible en $\mathfrak{R}$.

c) Muestre que todo racional positivo es definible en $\mathfrak{R}$.

12. Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, < \rangle$ la interpretación usual de los naturales en el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$.

a) Corrobore que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_m(x)$ tal que $\mathfrak{N} \models \varphi[m]$ y $\mathfrak{N} \models \exists\, ! x \varphi_m(x)$.

b) Describa una $\mathcal{L}$-fórmula $\rho(x)$ tal que $\mathfrak{N} \models \rho[p]$ si y sólo si p es primo. Encuentre un modelo no estándar de la aritmética y que tenga un elemento infinito (es decir, no estándar) primo.

c) Cerciórese de que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) Existen una cantidad de primos estándar p tales que $p + 2$ también es primo.
2) Existe un modelo no estándar que tiene al menos un primo no estándar p tal que $p + 2$ también es primo.
3) En cualquier modelo no estándar de la aritmética existe un primo no estándar p tal que $p + 2$ también es primo.

13. Sea G un grupo que tiene elementos de orden arbitrariamente grande. Sea Γ el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados ($\mathcal{L}$ es el lenguaje de la teoría de grupos) que se cumplen en G. Muestre que Γ tiene un modelo que contiene un elemento de orden infinito.

14. El problema de los 4 colores puede formularse de la siguiente manera. Suponga que los vértices de una gráfica son países en un mapa. Los países comparten una arista en la gráfica si tienen frontera común. El problema de los cuatro colores afirma que todo país en el mapa se puede colorear con uno de los cuatro colores de tal suerte que aquellas naciones con una frontera común reciben color diferente. En este caso diremos que la gráfica es 4-coloreable.

a) Establezca un lenguaje $\mathcal{L}$ para expresar que una gráfica es 4-coloreable. [Sugerencia: Considere el lenguaje de la teoría de gráficas y extiéndalo con cuatro 1-predicados $C_1, \ldots, C_4$. Un enunciado es $\forall\, x, y((E(x, y) \wedge C_2(x)) \rightarrow \neg C_2(y))$.]

b) Suponga que (G, E) es una gráfica cuyas subgráficas finitas son 4-coloreables. Muestre que G es 4-coloreable. [Sugerencia: Para cada vértice $a \in G$, genere un nuevo símbolo de constante $\dot{a}$. Mediante estos nuevos símbolos de constante extiende al lenguaje $\mathcal{L}$ arriba empleado. Construya un conjunto Σ de enunciados que incluyan los que expresan que la gráfica es 4-coloreable, enunciados $E(\dot{a}, \dot{b})$ siembre que $E(a, b)$ y enunciados $\neg(\dot{a} = \dot{b})$ para cualesquier $a \neq b$ elementos de G. Constate que Σ tiene un modelo y use este para mostrar que la gráfica original G es 4-coloreable.]

15. *Grosso modo* una gráfica plana es aquella que se puede dibujar en un plano. Se puede demostrar que una gráfica es plana cuando no contiene subgráficas de alguno de los siguientes tipos.

    ① Cinco vértices, cada uno de los cuales está conectado a los restantes.

    ② Seis vértices agrupados en dos conjuntos A, B cada uno con tres vértices, de tal suerte que cada vértice en A y todo vértice en B están conectados por una arista, pero los vértices en A no se conectan entre sí; los de B tampoco lo hacen entre sí.

    a) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje para la teoría de gráficas. Describa $\mathcal{L}$-enunciados para la teoría de graficas planas.

    b) Sea (G, E) una gráfica cuyas subgráficas finitas son planas. Muestre que G es plana.

16. Muestre que si φ es el enunciado de la teoría de grupos

$$\exists\, x \forall\, y(y \circ x = e)$$

    tiene la propiedad de que ni φ ni $\neg\varphi$ se puede demostrar a partir de T_G.

17. Sea $\mathfrak{A} = \langle A, \circ, ^{-1}, e\rangle$. Determine si $\mathfrak{A}$ es un grupo respecto a las siguientes interpretaciones.

    a) $A = \{-1/2, 0, 1/2\}$, $x \circ y = x + y$, $x^{-1} = -x$, $e = 0$.

    b) $A = \{1, 2\}$, $x \circ y = \text{mín}\{x, y\}$, $x^{-1} = x$, $e = 1$.

18. En ocasiones es conveniente definir ciertas propiedades en una teoría. Por ejemplo en la teoría de grupos, un grupo puede no ser abeliano pero tener elementos x, y tales que conmutan

$$x \circ y = y \circ x$$

    Definimos un nuevo símbolo de relación binaria C tal que $C(x, y)$ es una abreviación de $y \circ x = x \circ x$. Para probar teoremas sobre C, debemos añadir C como un nuevo símbolo no lógico a nuestro lenguaje y, además, agregar un nuevo axioma,

$$\varphi_4 \equiv \forall\, x, y[C(x, y) \leftrightarrow (x \circ y = y \circ x)].$$

    Este enunciado sirve como definición del símbolo C.

    a) Demuestre el siguiente enunciado,

$$\forall\, x(x \circ x = e) \rightarrow \forall\, x, y C(x, y).$$

    [Sugerencia: complete el siguiente bosquejo (justifique cada renglón).

(i) $x \circ x = e$
(ii) $(x \circ y) \circ (x \circ y) = e$ de (a)
(iii) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = y \circ [x \circ (x \circ y)]$
(iv) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = y \circ [(x \circ x) \circ y]$
(v) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = y \circ (e \circ y)$
(vi) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = y \circ (y \circ e)$
(vii) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = y \circ y$
(viii) $(y \circ x) \circ (x \circ y) = e$
(ix) $(x \circ y) \circ (x \circ y) = (y \circ x) \circ (x \circ y)$
(x) $x \circ y = y \circ x$
(xi) $C(x, y)$.

b) También se pueden agregar nuevos símbolos de función.

1) Suponga que se añade un nuevo símbolo de función f y que se le define mediante el axioma

$$\forall\, x, y, z[f(x, y) = z \leftrightarrow z = (x \circ y) \circ (x^{-1} = y^{-1})]. \tag{1}$$

Corrobore que (1) es equivalente a (2), donde

$$\forall\, x, y[f(x, y) = (x \circ y) \circ (x^{-1} \circ y^{-1})]. \tag{2}$$

$f(x, y)$ es una abreviación de $(x \circ y) \circ (x^{-1} \circ y^{-1})$.

2) Si añadimos un nuevo símbolo de función g y un axioma

$$\forall\, x, y, z[g(x, y) = z \leftrightarrow (x \circ z = y \vee y \circ z = x)], \tag{3}$$

Demuestre, usando (3), el siguiente enunciado

$$\forall\, x(x = x^{-1}). \tag{4}$$

[Sugerencia: Complete el siguiente bosquejo,
(i) $T_G \vdash_N x \circ x^{-1}$
(ii) $\boldsymbol{T}_G \cup \{(3)\} \vdash_N g(x, e) = x^{-1}$
(iii) $\boldsymbol{T}_G \vdash_N e \circ x = x \circ s$
(iv) $\boldsymbol{T}_G \vdash_N e \circ x = x$
(v) $T_G \cup \{(3)\} \vdash_N g(x, e) = x$
(vi) $T_G \cup \{(3)\} \vdash_N x = x^{-1}$
El enunciado (4) no es un teorema de T_G. Exhiba un grupo donde (4) es falso.

3) El problema con la fórmula (3) es que la fórmula

$$x \circ z = y \vee y \circ z = x \tag{5}$$

no define una función de x, y, pues pueden existir más de un z que satisfaga (5). La fórmula (3) define un 3-predicado más que un símbolo de 2-función. Para definir un símbolo f de función de n variables, debemos agregar un axioma de la forma

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y[f(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow \varphi], \tag{6}$$

donde la fórmula φ satisface las siguientes propiedades,

(i) El símbolo f no aparece en φ.

(ii) La fórmula φ contiene como variables libres sólo $x_1, \ldots, x_n$ y y.

(iii) $\boldsymbol{T}_G \vdash_N \forall x_1, \ldots, x_n \exists y[\varphi \wedge \forall z(\varphi(y) \rightarrow y = z)]$.

Sea $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ un lenguaje con al menos dos símbolos: $\circ$ un símbolo de 2-función y e un símbolo de constante; Γ es una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-teoría con dos axiomas:

B1 $\forall x \exists y(x \circ y = e)$

B2 $\forall x, y, z(z \circ x = z \circ y \rightarrow x = y)$

Pruebe que se puede definir un nuevo símbolo de función f en Γ de tal suerte que

B3 $\forall x, y(f(x) = y \leftrightarrow x \circ y = e)$.

[Sugerencia: Se debe confirmar que si φ es la fórmula

$$x \circ y = e \tag{7}$$

entonces φ satisface las condiciones recién dadas (i)-(iii). B3 corresponde a la fórmula (6). Es claro que (8) satisface las condiciones (i), (ii). Para (3), se debe confirmar que

$$\{B1, B2\} \vdash_N \forall x \exists y[x \circ y = e \wedge \forall z(x \circ z = e \rightarrow y = z)]. \tag{8}$$

Bosquejo de la prueba: de B1 se sigue que

$$\forall x \exists y(x \circ y = e).$$

(Prueba de existencia). Suponga que

$$x \circ y = e \qquad \text{y} \qquad x \circ z = e.$$

De B2 se desprende que $y = z$ (unicidad). Se usa que las fórmulas

$$\forall x[\exists y(x \circ y = e) \wedge \forall y, z(x \circ y = e \wedge x \circ z = e \rightarrow y = z)]$$

y

$$\forall x \exists y[x \circ y = e \wedge \forall z(x \circ z = e \rightarrow y = z)].$$

19. Muestre que los siguientes enunciados no son teoremas de T_G, como tampoco lo

son sus negaciones.

a) $\exists x \forall y(x = y)$

b) $\exists x \exists y[x \neq y \wedge \forall z(z = x \vee z = y)$

c) $\forall x, y(x = x \circ y)$

d) $\exists y \forall x(x \circ y = y)$

e) $\forall x \exists y(x \circ y = y)$

f) $\exists x(x \neq x^{-1} \rightarrow \exists x, y(x \circ y \neq y \circ x)$

g) $\forall x, y((x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1})$

h) $\forall x, y[\exists z(x \circ z = z \circ y) \rightarrow x \circ y = y \circ x)]$.

20. ¿Qué axiomas se deben añadir a los axiomas de T_G para asegurar que todo modelo $\mathfrak{A} = \langle A, \circ, ^{-1}, e\rangle$ satisface lo siguiente?

a) $\mathfrak{A}$ tiene exactamente dos elementos.

b) $\mathfrak{A}$ tiene al menos tres elementos

c) $\circ$ es conmutativa

d) $\mathfrak{A}$ es un grupo linealmente orenado.

e) Existe una relación de equivalencia que tiene exactamente tres clases de equivalencia.

De ser necesario, añada nuevos símbolos no lógicos.

21. Relaciones de equivalencia. Consideramos el lenguaje $\mathcal{L} = \{E\}$ con una 2-relación. La teoría de una relación de equivalencia es Θ en este lenguaje y consiste en todas los enunciados derivables a partir de los siguientes tres axiomas.

E1 $\forall x(E(x, x))$

E2 $\forall x, y, (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$

E3 $\forall x, y, z(E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))$

a) Suponga que $\mathfrak{A} = \langle A, E\rangle$ es una $\mathcal{L}$-estructura. Muestre que $\mathfrak{A}$ es un modelo de Θ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones.

(1) A es la unión de conjuntos A_i para $i \in I$. Esto es

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

(2) Para cualesquier $i, j \in I$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Esto es, A es la unión de conjuntos ajenos entre sí.

(3) Para cualesquier $x, y \in A$,

$$E(x,y) \leftrightarrow \exists\, x(x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

b) Construya una $\mathcal{L}$-teoría T tal que todo modelo de T tiene exactamente dos clases de equivalencia. [Sugerencia: expanda el lenguaje$\mathcal{L}$ incorporando dos símbolos de constante a, b y considere los siguientes enunciados

E4 $a \neq b$
E5 $\forall\, x(E(x,a) \vee E(x,b))$
E6 $\neq E(a,b)$

22. En relación con los modelos no estándar de $\mathbb{R}$ (ejemplo 3.4.28), efectúe las siguientes variaciones.

a) Construya un modelo de $Teo(\mathfrak{R})$ en el que existen una infinidad de elementos infinitamente grandes, es decir, elementos a tales que $a > x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

b) Exhiba que se puede construir un modelo de $Teo(\mathfrak{R})$ en el que existen κ elementos infinitesimales, donde κ es un cardinal infinito.

c) Recuerde que un elemento i es infinitesimal cuando $0 < i < x$ para cada real positivo x. Demuestre las siguientes afirmaciones. Suponga que i, j son infinitesimales, x, y reales estándar, w es un elemento infinitamente grande.

1) $i + j$ existe y es infinitesimal.
2) $x + i$ existe y es estándar.
3) $x + y$ es estándar.
4) $i \cdot j$ existe y es infinitesimal.
5) $i \cdot x$ existe y es infinitesimal.
6) $w + x$ existe y es infinitamente grande.
7) $\frac{1}{i}$ existe y es infinitamente grande.
8) $\frac{1}{w}$ existe y es infinitesimal.

23. Dado un entero $n \geq 2$ y una relación binaria S en un conjunto E, un ciclo de orden n (o un n-ciclo) para S es una n-ada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de E que satisfacen $(a_1, a_2) \in S$, $(a_2, a_3) \in S$,...,$(a_{n-1}, a_n) \in S$. El orden estricto usual en $\mathbb{R}$ no tiene n-ciclos, en cambio la relación binaria en $\{1,2,3\}$ dada por $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ tiene 3-ciclos pero no 2-ciclos.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con sólo un símbolo de 2-relación R. Considere, para todo $n \geq 2$, la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula φ_n:

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \neg(R(x_1,,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1},x_n) \wedge R(x_n,x_1)).$$

Fijemos $\boldsymbol{T} = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. Decimos que una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ está libre de ciclos cuando para toda $n \geq 2$, $R^{\mathfrak{A}}$ no tiene n-ciclos; en caso contrario, decimos que la estructura tiene ciclos. Es claro que los modelos de $\boldsymbol{T}$ son las $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras libres de ciclos.

a) Para todo $n \geq 2$, exhiba un modelo de la fórmula

$$\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi_n.$$

b) Pruebe que si ψ es un $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciado consecuencia de $\boldsymbol{T}$, existe al menos un entero $p \geq 2$ tal que ψ se satisface en toda $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura en la que la interpretación de R no tenga ciclos de orden menor o igual que p.

c) Muestre que todo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciado que sea consecuencia de $\boldsymbol{T}$ tiene al menos un modelo que tiene ciclos.

[Sugerencia: (a) Tome como universo $\mathbb{Z}_{n+1}$, y como interpretación de R sea $\overline{R}$ el conjunto definido por: para cualesquier elementos $a, b \in \mathbb{Z}_{n+1}$, $(a, b) \in \overline{R}$ si y sólo si $b = a + 1$. En otras palabras, $\overline{R}$ es la suma en $\mathbb{Z}_{n+1}$. El tuplo $(0, 1, \ldots, n)$ es un $(n+1)$-ciclo para $\overline{R}$, por lo que la estructura recién definida no satisface φ_{n+1}. Más aún, verifique que si $2 \leq k \leq n$, no hay k-ciclos en la estructura; deduzca que la estructura satisface $\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

(b) Si $\boldsymbol{T} \vdash \psi$, por compacidad, existe $\boldsymbol{T}' \subseteq \boldsymbol{T}$ finito tal que $\boldsymbol{T}' \vdash \psi$. Encuentre un entero $p \geq 2$ tal que $\boldsymbol{T}' \subseteq \{\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_p\}$; infiera que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\} \vdash \psi$, lo que significa que ψ se satisface en cualquier estructura que no tenga ciclos de longitud $\leq p$.

(c) Sean ψ un enunciado consecuencia de $\boldsymbol{T}$ y $p \geq 2$ tal que ψ se satisface en cualquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura que no tenga ciclos de longitud $\leq p$. Considere un modelo de la fórmula

$$\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \cdots \wedge \varphi_p \wedge \neg\varphi_{p+1}$$

((a) garantiza la existencia de tal modelo); ψ se satisface en este modelo que contiene al menos un ciclo de longitud $p + 1$.

24. Sean $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura y R una relación binaria de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. La cerradura transitiva de $R^{\mathfrak{A}}$ es el conjunto de todas las parejas de elementos $(a, b) \in A^2$ para las que existe un $R^{\mathfrak{A}}$-camino finito de a a b, es decir, una sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, n \geq 1$, de elementos de A con $a_0 = a$, $a_n = b$, y $R^{\mathfrak{A}}(a_i, a_{i+1}), 0 \leq i < n$. Muestre que la cerradura transitiva no se puede definir en lógica de primer orden; esto es, muestre que no existe una fórmula $CT(x, y)$ tal que para cualesquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$ y $a, b \in A$, $\mathfrak{A} \models CT[a, b]$ si y sólo si (a, b) está en la cerradura transitiva de $R^{\mathfrak{A}}$. [Sugerencia: defina fórmulas $\rho_n(x, y)$ en forma inductiva:

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &\equiv R(x, y). \\ \rho_{n+1}(x, y) &\equiv \exists z(R(x, z) \wedge \rho_n(z, y)). \end{aligned}$$

Muestre que en cualquier estructura $\mathfrak{A}$, la pareja (a, b) está en la cerradura transitiva de $R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \rho_n(a, b)$ para alguna n. Suponga que existe la fórmula $CT(x, y)$ para definir la cerradura transitiva de R. Considere el conjunto infinito de enunciados

$$\{CT(a, b)\} \cup \{\neg\rho_n(a, b) : n \geq 1\}.$$

Logre una contradicción mediante el teorema de compacidad.]

25. Se sabe que el axioma de elección es equivalente a la afirmación $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ para todo cardinal infinito κ (aritmética cardinal). Esto significa que existe una biyección entre $\kappa \times \kappa$ y κ. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje que tiene un símbolo de 2-función f. Considere modelos del enunciado,

$$\forall x, y, x', y'(f(x, y) = f(x', y') \to (x = x' \wedge y = y') \wedge \forall z \exists x, y(f(x, y) = z)$$

y muestre que los teoremas de LS implican que esto es equivalente al AE. [*Sugerencia*: reflexione si el enunciado tiene un modelo infinito numerable]

26. Demuestre que ninguna de las siguientes teorias se pueden axiomatizar en un lenguaje numerable.

    a) La teoría de los conjuntos innumerables.

    b) La teoría de los conjuntos linealmente ordenados innumerables.

    c) La teoría de los espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$.

    d) La teoría de los espacios vectoriales finito dimensionales sobre el campo $\mathbb{Z}_p$, donde p es un primo.

4

Cómo funciona la lógica de primer orden y extensiones de ésta

Este apartado tiene una filosofía distinta al resto del libro. Por principio de cuentas queremos presentar a la lógica de primer orden como realmente actúa. Esto es, examinar en detalle una teoría de primer orden mediante sus posibles axiomatizaciones, extensiones, modelos y repercusiones. Esto promueve un acercamiento para el lector a la práctica cotidiana de la teoría de modelos, y para continuar, incorporamos un enramado fundamental en la extensión de la lógica de primer orden a lógicas infinitarias. Después, nos acercamos a la lógica más poderosa que existe: la lógica de segundo orden, enseguida abordamos una lógica con cuantificadores generalizados, para que al final aglutinemos estas lógicas en un marco unificado, dando paso a una breve introducción a las lógicas abstractas.

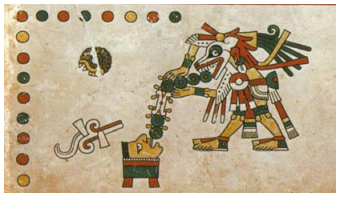
Para empezar, examinamos en detalle a las estructuras con universo $\mathbb{N}$ y que interpretan las operaciones usuales en los naturales. Precisamente, el análisis lo se lleva a cabo conforme se incorporan los diversos símbolos. No obstante, el principal motivo de esto esdejar claro algunos aspectos prácticos del trabajo con lenguajes formales. Esto abarca desde la elección del lenguaje, hasta la forma de demostrar algunos hechos, cómo se efectúan en la práctica diaria, por ejemplo, en teoría de modelos. Aparecen también una demostración del primer teorema de incompletud de Gödel, pero, como ya dijimos, el objetivo es establecer un puente entre la teoría que se ha visto y situaciones más concretas; es un ejemplo valioso de lo que puede esperar el lector al ahondar más en estas disciplinas.

Posteriormente presentamos un estudio detallado de las propiedades de consistencia. La gran relevancia de estos artilugios aparece más claramente cuando abandonamos la lógica de primer orden y consideramos lógicas más generales, concretamente las infinitarias. Esa excursión conlleva en la mayoría de los casos, la pérdida de el teorema de compacidad. Las propiedades de consistencia son una alternativa a éste, y aún en primer

orden su empleo facilita la demostración de algunos teoremas relevantes.

El capítulo continua con un examen introductorio del enorme reino de las lógicas infinitarias, la lógica de segundo orden y lógicas con cuantificadores «no clásicos», todas ellas se engloban en lo que se conoce como lógicas abstractas, que son el motivo y culminación de esta vertiente de nuestra obra en el último apartado. Hemos procurado no agotar al lector, pero sí confrontarlo con una serie de ventajas y desafios que ofrece estás lógicas tan poderosas, propiciando su involucramiento en una disciplina que ha retomado gran interés entre diversos investigadores. Es importante señalar ahora mismo que la lógica de segundo orden tiene una gran capacidad expresiva, pero a la vez son muy pocos los teoremas de la de primer orden que se conservan, por lo que esta lógica es poco amigable; en cambio, son muchos los aspectos a investigar en ella. Como ya mencionamos antes, es de gran interés para nosotros exponer al lector a lógicas abstractas, para motivarlo a continuar sus estudios en estas disciplinas, haciéndole notar, entre otras cosas, que la lógica matemática no es una materia inmovil o inerte, sino que por el contrario, cada vez encuentra nuevas vías de desarrollo, y constantemente se desfía lo hasta ahora alcanzado.

Es de gran relevancia el siguiente relato. En el capítulo estudiaremos los conjuntos hereditariamente finitos V_ω que también se denotan H_ω, aunado a la complejidad de ciertas fórmulas. Este proceder es la llave para trasladar la teoría de recursión clásica, que se efectúa en ω ($\mathbb{N}$) a un universo de conjuntos: H_ω. Este traslado se lleva a cabo, ya sea mediante un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y H_ω, o bien apelando a las fórmulas asociadas a conjuntos primitivo recursivos, recursivos, etc. (fórmulas Σ_1, Δ_1). A su vez, este es el inicio de la generalización de la teoría de recursión: llevarla a otros ordinales mayores que ω, o a otros universos de conjuntos, por ejemplo conjuntos admisibles, pr cerrados y otros. Nosotros no tratatamos a la teoría de recursión, pero llamamos la atención del lector sobre su enorme relevancia y cómo se extiende con la breve descripción previa. En varias secciones de este capítulo nos hemos apoyado en [Fi07], [Ko18] y [Sc09].



Entonces se sentó el tlacuache. El anciano permaneció ahí y se durmió. Al estar durmiendo, tomó el tlacuache el fuego con la cola. Poco a poco la fue retirando y el anciano despertó.

«Te estás llevando el fuego, nieto mio.»

«No, lo estoy soplando.»

Nuevamente se durmió el anciano. Esta vez se durmió profundamente. Mientras éste roncaba, el tlacuache se fue levantando poco a poco y cogió el fuego. Y lo fue deslizando lentamente. Pronto se encontró en las cercanías de la cornisa.

En esto se despertó el anciano y observó aquello. En seguida llevó el tlacuache el fuego hasta las cercanías de la cornisa. De inmediato se levantó el anciano y lo persiguió. Lo alcanzó en la cornisa y el fuego resbaló, yéndose en picada.

Su abuelo llegó corriendo hasta muy cerca. En la carrera lo golpeó repetidas veces con un palo. Él también lo agarró y lo tiró al suelo muchas veces con su bastón. Prendió fuego, se hizo pedazos y se deslizó hacia abajo. Al tiempo que hacía esto, se alejó: «No me vas a quitar el fuego, tlacuache...»

Mito cora

4.1 La aritmética

Comenzamos con el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$, donde S es un símbolo de 1-función, $+, \cdot$ son símbolos de 2-función, y 0 un símbolo de constante. Se pretende interpretarlos con el significado natural, donde $S(n) = n+1$ es la función sucesor, aunque no tengamos el 1, porque cualquier natural n es el cero o el sucesor de algún natural.

Un numeral (estándar) de $\mathcal{L}$ es un término que se obtiene del 0 usando la función sucesor una cantidad finita de veces, es decir, son expresiones de la forma $SS\cdots S(0)$, con cero o más apariciones de S. Usamos las abreviaciones obvias: 1 para $S(0)$, 2 para $SS(0)$, en general $\overline{n}$ para $SS\cdots S(0)$ con n ocurrencias de S. Si interpretamos S en el universo $\mathbb{N}$, $S(0) = 1$, $SS(0) = 2$, etc. Para tratar con la función sucesor, introducimos dos axiomas,

Axioma 1 $\forall x(0 \neq S(x))$.

Axioma 2 $\forall x, y(S(x) = S(y) \to x = y)$.

Note que estos axiomas nos permiten deducir de inmediato que el 0 no es el sucesor de alguien y que el sucesor de un numeral es único, pero no son suficientemente poderosos para excluir la posibilidad de que existan otros individuos que no sean sucesores.

Axioma 3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x = S(y)))$.

En seguida establecemos las propiedades de la suma y el producto.

Axioma 4 $\forall x(x + 0 = x)$.

Axioma 5 $\forall x, y(x + S(y) = S(x + y))$.

Axioma 6 $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.

Axioma 7 $\forall x, y(x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$.

La teoría T que se genera mediante estos axiomas se llama la aritmética de Robinson y se denota mediante Q. Esto es, T es el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados φ tales que

$$T \vdash \varphi$$

que por los teoremas de completud y correctud es equivalente a

$$T \models \varphi.$$

Aquí podemos emplear cualquier método de prueba de los que hemos tratado, aunque, en lo posible, privilegiamos los sistemas de Hilbert o de deducción natural. Una hecho por demás conocido en los naturales es que el 0 es la identidad respecto a la suma, algo que desafortunadamente no se puede probar en Q.

Teorema 4.1.1.

$$Q \nvdash \forall x(0 + x = x).$$

Demostración. ¿Cómo probamos que algo no se puede demostrar? Tenemos las herramientas necesaria, esto es, los teoremas de completud y correctud de Gödel,

$$Q \vdash \forall x(0 + x = x) \qquad \Leftrightarrow \qquad Q \models \forall x(0 + x = x).$$

Así que para confirmar $Q \nvdash \forall x(0 + x = x)$ debemos mostrar que $Q \not\models \forall x(0 + x = x)$. Esto es, construiremos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M}$ que sea modelo de Q pero no de $\forall x(0 + x = x)$. Tomamos como universo de $\mathfrak{M}$ al conjunto $M = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$, donde a, b son objetos que no viven en $\mathbb{N}$ y que son distintos entre sí. La interpretación $S^{\mathfrak{M}}$ es como la usual para elementos en $\mathbb{N}$, es decir $S(n) = n + 1$ cuando $n \in \mathbb{N}$, mientras que $S^{\mathfrak{M}}(a) = a$, $S^{\mathfrak{M}}(b) = b$. Es un ejercicio sencillo mostrar que los axiomas 1-3 se cumplen en $\mathfrak{M}$.

Para corroborar el resto de los axiomas, debemos interpretar la suma y el producto. Comenzamos con la suma y establecemos que $m +^{\mathfrak{M}} n = m + n$, esto es la suma usual, cuando se trata de elementos de $\mathbb{N}$. Además,

$$a +^{\mathfrak{M}} n = a$$
$$b +^{\mathfrak{M}} n = b,$$

En cambio, para cualquier x, $x +^{\mathfrak{M}} a = b$ y $x +^{\mathfrak{M}} b = a$. Otra vez, es fácil probar que los axiomas 4 y 5 se satisfacen en $\mathfrak{M}$ con esta interpretación. Por otra parte, en $\mathfrak{M}$, $0 +^{\mathfrak{M}} a = b \neq a$. Hemos logrado, casi, nuestro propósito, lo único que falta es dar la interpretación del producto, que si bien ya no interfiere en la invalidez de $\forall x(0 + x = x)$, si debe asegurar la validez en $\mathfrak{M}$ de los axiomas 6 y 7.

Primero establecemos que

$$x \cdot^{\mathfrak{M}} 0 = 0,$$

para cualquier x.

Si $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot^{\mathfrak{M}} n = n \cdot^{\mathfrak{M}} m = m \cdot n$$

Lo difícil es definir la multiplicación cuando aparecen los nuevos objetos; primero la multiplicación a la derecha,

$$x \cdot a = x + b$$
$$x \cdot b = x + a,$$

para cualquier x. Para la multiplicación a la izquierda, si $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$,

$$a \cdot x = b + \cdots + b \qquad x \text{ veces.}$$
$$b \cdot x = a + \cdots + a \qquad x \text{ veces.}$$

Es sencillo cerciorarse de que esta definición hace cierto al axioma 7 en $\mathfrak{M}$. □

Teorema 4.1.2.

$$Q \nvdash \neg\forall x(0 + x = x).$$

Demostración. Como indicamos en la prueba del teorema 4.1.1, basta encontrar una estructura $\mathfrak{A}$ que satisfaga los axiomas 1-7, pero no al enunciado $\neg\forall x(0 + x = x)$. Esto es muy fácil, pues basta considerar a $\mathfrak{A}$ con universo $\mathbb{N}$ y la interpretación usual de los símbolos no lógicos. □

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y T un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Recuerde que T es completo si para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado φ ocurre que $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$. Es obvio de nuestros métodos de prueba que si T es un conjunto de enunciados y $\varphi \in T$, $T \vdash \varphi$. De los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 se deduce que Q no es completa, pues $\theta \notin Q$ y $\neg\theta \notin Q$, donde $\theta \equiv \forall x(0 + x = x)$. Si bien Q parece ser muy débil, pues no es capaz de decidir algo tan evidente en $\mathbb{N}$ como θ, si podemos probar algunas afirmaciones importantes. Vamos a examinar con cierto detalle nuestro lenguaje y sus posibles interpretaciones teniendo en cuenta Q. Los símbolos no lógicos son 0, S, $+$ y $\cdot$ (supusimos que siempre aparece $=$ en un lenguaje formal). Un $\mathcal{L}$-término se constituye a partir del 0 y de S, así que cualquier $\mathcal{L}$-término t tiene la forma 0 o $SSS\cdots S(0)$, pero también puede involucar a la suma y a la multiplicación, por lo que puede ser, digamos $S(0) + x$, $SSS(0) \cdot (S(x) + y)$, etc. Iniciamos nuestro recorrido mostrando algunos hechos a partir de algunos de los axiomas 1-7.

Lema 4.1.3. *Para cualesquier m, n, si $m \neq n$, entonces $Q \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$.*

Demostración. Dado que $m \neq n$, podemos suponer que $m < n$ y poner $(n - m) - 1 = k$, por lo que $k \geq 0$. Damos una prueba «casi» formal, pues sólo mostramos su inicio, pero es evidente como continuarla.

1. $0 \neq S(\overline{k})$ (1)
2. $S(0) = SS(\overline{k}) \to 0 = S(\overline{k})$ (2)
3. $S(0) \neq SS(\overline{k})$ De 1,2
4. $SS(0) = SSS(\overline{k}) \to S(0) = SS(\overline{k})$ (2)
5. $SS(0) \neq SSS(\overline{k})$ De 3,4

6. . . . . .

Continuamos de esta forma, añadiendo S a cada lado hasta que, en el renglón $2m+1$, logramos $\overline{m} \neq \overline{n}$. □

Ejemplo 4.1.4. Con pocos axiomas podemos derivar, por ejemplo, que $2+3=5$, esto es, que $SS(0)+SSS(0)=SSSSS(0)$. Sin duda,

1. $SS(0)+0=SS(0)$ (4)
2. $SS(0)+S(0)=S(SS(0)+0)$ (5)
3. $SS90)+S(0)=SSS(0)$ De 1,2
4. $SS(0)+SS(0)=S(SS(0)+S(0))$ (5)
5. $SS(0)+SS(0)=SSSS(0)$ De 3,4
6. $SS(0)+SSS(0)=S(SS(00+SS(0))$ (5)
7. $SS(0)+SSS(0)=SSSSS(0)$ De 5,6.

Es evidente que la prueba es sencilla pero muy engorrosa.

Con un procedimiento similar el lector puede elaborar una demostración del siguiente lema.

Lema 4.1.5. *Para cualesquier m, n, $Q \vdash \overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}$.*

□

En cuanto a la multiplicación, las derivaciones son igualmente sencillas.

Ejemplo 4.1.6. Mostramos que $2 \cdot 3 = 6$.

1. $SS(0) \cdot 0 = 0$ (6)
2. $SS(0) \cdot S(0) = (SS(0) \cdot 0) + SS(0)$ (7)
3. $SS(0) \cdot S(0) = 0 + SS(0)$ De 1,2
4. $0 + SS(0) = SS(0)$ Lema 4.1.5

5. $SS(0) \cdot S(0) = SS(0)$ De 3,4
6. $SS(0) \cdot SS(0) = (SS(0) \cdot S(0)) + SS(0)$ (7)
7. $SS(0) \cdot SS(0) = SS(0) + SS(0)$ De 5,6
8. $SS(0) + SS(0) = SSSS(0)$ Lema 4.1.5
9. $SS(0) \cdot SS(0) = SSSS(0)$ De 7,8
10. $SS(0) \cdot SSS(0) = (SS(0) \cdot SS(0)) + SS(0)$ (7)
11. $SS(0) \cdot SSS(0) = SSSS(0) + SS(0)$ de 9,10
12. $SSSS(0) + SS(0) = SSSSSS(0)$ Lema 4.1.5
13. $SS(0) \cdot SSS(0) = SSSSSS(0)$ De 11,12.

Con este tedioso método de prueba se consigue demostrar el siguiente lema.

Lema 4.1.7. *Para cualesquier m, n, $Q \vdash \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}$.*

□

Con lo anterior se corrobora que Q evalúa correctamente cualquier término de la forma $\overline{m} + \overline{n}$ o $\overline{m} \cdot \overline{n}$. De hecho, evalúa bien cualquier término.

Lema 4.1.8. *Si τ es un $\mathcal{L}$-término que toma el valor t en $\mathbb{N}$ (con la interpretación natural), entonces*

$$Q \vdash \tau = \overline{t}.$$

Demostración. Es importante notar los siguientes hechos.

(i) Si Q evalúa bien τ, también evalúa correctamente a $S(\tau)$. Sin duda, suponga que τ toma el valor t, por lo que $S(\tau)$ toma el valor $t+1$. Por hipótesis, Q prueba $\tau = \overline{t}$, de donde podemos derivar, en Q, que $S(\tau) = S(\overline{t})$, lo que significa que Q prueba $S(\tau) = \overline{t+1}$, pues $S(\overline{t})$ es $\overline{t+1}$.

(ii) Si Q evalúa correctamente a σ y τ, también lo logra con $\sigma + \tau$. En efecto, suponga que σ toma el valor s, que τ es t, y que Q prueba $\sigma = \overline{s}$ y $\tau = \overline{t}$. En tal caso $\sigma + \tau$ toma el valor $s + t$ y por hipótesis, Q deriva $\sigma + \tau = \overline{s} + \overline{t}$. De acuerdo con el lema 4.1.5, Q prueba $\overline{s} + \overline{t} = \overline{s+t}$, de donde se sigue que $\sigma + \tau = \overline{s+t}$.

(iii) En forma similar, si Q evalúa correctamente σ y τ, hace lo mismo con $\sigma \cdot \tau$.

Todo término, por más complejo que sea, se construye mediante aplicaciones repetidas de S, $+, \cdot$, comenzando con 0, lo que da lugar, por las observaciones previas, a la conclusión que buscamos. □

Es conveniente que el lector formalice la prueba previa, usando inducción en la construcción del término τ. Nuestro lenguaje no contiene el símbolo $\leq$, pero podemos definirlo: $m \leq n$ si y sólo si existe k tal que $n = m + k$, pensando su validez en $\mathbb{N}$. En nuestro pobre lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $m \leq n$ si y sólo si $\exists\, v(v + \overline{m} = \overline{n})$. La pregunta es si Q es capaz de probar esta situación. Supongamos que $m \leq n$, así que para algún $k \geq 0$, $k + m = n$. Por lo antes visto sabemos que $Q \vdash \overline{k} + \overline{m} = \overline{n}$. Según la regla de introducción del cuantificador existencial, podemos establecer que

$$Q \vdash \exists\, v(v + \overline{m} = \overline{n}).$$

Ahora toca el turno de $m > n$. Es de esperarse que

$$Q \vdash \nexists\, v(v + \overline{m} = \overline{n}).$$

Primero lo mostramos para un caso particular, $m = 4, n = 2$ y probemos $\neg\exists\, v(v + 4 = 2)$ a partir de Q. Informalmente, tenemos la siguiente prueba.

1.	$a + SSSS(0) = SS(0)$	Premisa.
2.	$a + SSSS(0) = S(a + SSS(0))$	axioma 5
3.	$S(a + SSS(0)) = SS(0)$	de 1 y 2.
4.	$S(a + SSS(0)) = SS(0) \to a + SSS(0) = S(0)$	axioma 2
5.	$a + SSS(0) = S(0)$ de 3,4	MP
6.	$a + SSS(0) = S(a + SS(0))$	axioma5
7.	$S(a + SS(0)) = S(0)$	de 5,6
8.	$S(a + SS(0)) = S(0) \to a + SS(0) = 0$	axioma 2
9.	$a + SS(0) = 0$	7,8 MP
10.	$a + SS(0) = S(a + S(0))$	axioma 5
11.	$S(a + S(0)) = 0$	9,10 MP
12.	$0 \neq S(a + S(0))$	axioma 1
13.	$0 \neq 0$	11,12
14.	$0 = 0$	identidad
15.	$\bot$	13,14
16.	$\neg(a + SSSS(0)) = SS(0))$	1-15 regla
17.	$\forall\, v \neg(v + SSSS(0) = SS(0))$	15 regla

18. $\neg\exists v(v + SSSS(0) = SS(0))$ 17 definición de $\exists$.

Este caso particular exhibe claramente como proveer una demostración en el caso general. Suponga que $a + \overline{m} = \overline{n}$. Como en los renglones 2-9, quitamos ocurrencias iniciales de S en los numerales $\overline{m}$ y $\overline{n}$ hasta lograr $a + \overline{m - n} = 0$. Procediendo en forma correspondiente a 1-15, se logra una contrdicción, para deducir $\neg(a + \overline{m} = \overline{n})$. Finalmente se concluye $\neg\exists v(v + \overline{m} = \overline{n})$. En lo sucesivo, $\xi \leq \zeta \Leftrightarrow \exists v(v + \xi = \zeta)$. Esto nos permite introducir lo que se conoce como cuantificación acotada, algo que ya hemos empelado en el desarrollo de teoría de conjuntos.

- $\forall \xi \leq \kappa \varphi(\xi)$ es una abreviación de $\forall \xi(\xi \leq \kappa \to \varphi(\xi))$.
- $\exists \xi \leq \kappa \varphi(\xi)$ es una abreviación de $\exists \xi(\xi \leq \kappa \wedge \varphi(\xi))$,

donde κ es un término.

Definición 4.1.9. Decimos que un conjunto de enunciados T es orden-adecuado si se cumplen las siguientes propiedades.

O1 $T \vdash \forall x(0 \leq x)$.

O2 Para cualquier n, $T \vdash \forall x(\{x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = \overline{n}\} \to x \leq \overline{n})$.

O3 Para toda n, $T \vdash \forall x(x \leq \overline{n} \to \{x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = \overline{n}\})$.

O4 Para cada n, si $T \vdash \varphi(0)$, $T \vdash \varphi(1)$, ..., $T \vdash \varphi(\overline{n})$, entonces $T \vdash \forall x \leq \overline{n}\varphi(x)$.

O5 Para cualquier n, si $T \vdash \varphi(0)$ o $T \vdash \varphi(1)$, ..., o $T \vdash \varphi(\overline{n})$, entonces $T \vdash \exists x \leq \overline{n}\varphi(x)$.

O6 Para toda n, $T \vdash \forall x(x \leq \overline{n} \to x \leq s(\overline{n}))$.

O7 Para cualquier n, $T \vdash \forall x(\overline{n} \leq x \to (\overline{n} = x \vee S(\overline{n}) \leq x))$.

O8 Para cualquier n, $T \vdash \forall x(x \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq x)$.

O9 Para cada $n > 0$, $T \vdash \forall x \leq \overline{n - 1}\varphi(x) \to \forall x \leq \overline{n}(x \neq \overline{n} \to \varphi(x))$.

Teorema 4.1.10. *Q es orden-adecuada.*

Demostración. Sólo probamos algunas de las afirmaciones Oi, quedan como ejercicio el resto.

O1 Para un a arbitrario, Q prueba que $a + 0 = a$, por lo que $\exists x(v + 0 = a)$, es decir, $0 \leq a$. Mediante generalización se obtiene el resultado.

O2 Trabajando con Q, suponga que $a = 0 \vee a = 1 \vee \cdots \vee a = \overline{n}$. Verificamos antes que si $k \leq m$, entonces Q prueba $\overline{k} \leq \overline{m}$ (por la definición de $\leq$). Esto significa que de cada disyunto podemos derivar $a \leq \overline{n}$. En consecuencia, si procedemos por casos, $a \leq \overline{n}$. Se sigue que Q prueba $(a = 0 \vee a = 1 \vee \cdots \vee a = \overline{n}) \rightarrow a \leq \overline{n}$. Dado que a fue arbitraria, deducimos el resultado.

O3 Procedemos por inducción. El caso base, es decir, que se cumple para $n = 0$, requerimos una prueba de $\forall x(x \leq 0 \rightarrow x = 0)$. Es suficiente suponer que $a \leq 0$, para a arbitraria, y deducir $a = 0$. Así, supongamos que $a \leq 0$, es decir, $\exists v(v + a = 0)$. Se sigue que para algún b, $b + a = 0$. El axioma 3 es equivalente a $\forall x(x = 0 \vee \exists y(x = S(y))$, de donde se deduce que $a = 0$ o $a = S(a')$ para algún a'. El último caso implica que $b + S(a') = 0$, y con el axioma 5, $S(b + a') = 0$, lo que se opone al axioma 1. Nos queda el caso 1, que establece la etapa base.

Ahora supongamos que Q prueba $\forall x(x \leq \overline{n} \rightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = \overline{n}))$. Requerimos derivar de Q que $\forall x(x \leq \overline{n+1} \rightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = \overline{n+1}))$. Basta suponer, en una prueba en Q, que $a \leq \overline{n+1}$, para a arbitraria, para entonces deducir $a = 0 \vee a = 1 \vee \cdots \vee a = \overline{n+1}$. Nuestra suposición es $\exists v(v + a = \overline{n+1})$ y por el axioma 3, $a = 0$ o $a = S(a')$ para alguna a'. En el último caso tenemos $\exists v(v + S(a') = S(\overline{n}))$, del axioma 5 y del 2 derivamos $\exists v(v + a' = \overline{n})$; esto es, $a' \leq \overline{n}$. Usamos nuestra suposición de que el resultado se cumple para n, y deducimos $a' = 0 \vee a' = 1 \vee \cdots \vee a' = \overline{n}$ En consecuencia, $a = S(a')$, lo que implica $a = 1 \vee \cdots \vee a = \overline{n+1}$. Si se cumple el primer o segundo caso, $a = 0 \vee a = 1 \vee a = 2 \vee \cdots \vee a = \overline{n+1}$. En cualquier evento, obtenemos lo requerido.

O8 Procedemos por inducción. (i) En la prueba de O1, vimos que para toda a, $0 \leq a$, así que $0 \leq a \vee a \leq 0$. Mediante generalización obtenemos el caso base $n = 0$.

(ii) Supongamos que el resultado se cumple para $n = k$ y mostraremos que se vale para $n = k + 1$. Para una a arbitraria se cumple que,

(a) $a \leq \overline{k} \vee \overline{k} \leq a$ Por hipótesis

(b) $a \leq \overline{k} \rightarrow a \leq \overline{k+1}$ Por O6

(c) $\overline{k} \leq a \rightarrow (\overline{k} = a \vee \overline{k+1} \leq a)$ O7.

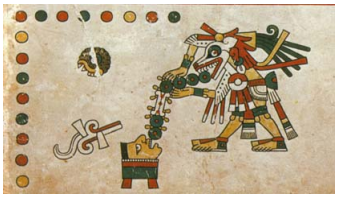
Esto demuestra $\overline{k} \leq \overline{k+1}$, de donde se sigue que

(d) $a = \overline{k} \rightarrow a \leq \overline{k+1}$

(e) $a \leq \overline{k+1} \vee \overline{k+1} \leq a$ De (a)-(d).

Dado que a es arbitrario, usando generalización terminamos.

□



«No me vas a quitar el fuego, tlacuache.»

Aquellos que esperaban miraban el fuego; poco después se venía para abajo. Lo esperaban con sus cobijas. Cayó, pero no ahí, sino en el suelo. De ahí lo cogieron, pero la tierra ya había empezado a incendiarse.

Cuando aquellos la iban apagando, llegó el tlacuache a toda velocidad. Lo vieron llegar y caer muerto sobre la tierra. Entonces lo cubrieron con una de sus cobijas. Después de cubrirlo comenzó a moverse por un momento. Estaba vivo, se levantó pesadamente y se sentó. Poco a poco fue recobrando el conocimiento. Al volver en sí se puso de pie y les preguntó: «¿Llegó el fuego? se los lancé para abajo. Mi mismo abuelo me mató; él me prendió fuego».

Le dijieron: «Por aquí cayó el fuego, pero nadie lo pescó. Cayó a la tierra y ésta está incendiándose. ¿Cómo vamos a apagarlo? Nos es imposible apagarlo».

Entonces llamaron a nuestra madre la diosa de la tierra y ésta lo apagó con su leche. Así mitigó el fuego. Entonces recuperaron el fuego y permaneció aquí.

Mito cora

El tlacuache es un ladrón: ¡Cómo no ha de serlo, si sus manitas son casi de cristiano!

Relato mazahua

Con ellas abre las tapas, corre las trancas, quita, en busca de aguamiel, las piedras que cubren el cuenco de los magueyes, y atrapa gallinas para chuparles los sesos y la sangre. Cuando el origen del mundo, subió a un cerro empinado y de la cumbre robó el fuego que guardaban siete jaguares. Con su cola agitó las ascuas, y las chispas cayeron en los ojos de las fieras, cegándolas. Huyó con el fuego y lo entregó a los hombres en cuatro piras. En este tiempo ascendió por las escarpas cubiertas de espinos y bebió el pulque de la anciana poseedora del secreto de su fabricación. Volvió con el vientre repleto y regaló el licor a los hombres, transvasándolo a cuatro grandes ollas. También por aquellos días primeros fue a la fiesta de los diablos y, fingiéndose borracho, cargó en su bolsa el mezcal y los cigarros para huir con ellos, llevándose de paso el fuego.

Desde entonces los animales disfrutaron en sus fiestas de la lumbre, del aguardiente y del tabaco.

Mito tlapaneco

4.2 Otra axiomatización

Seguimos con el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot, E\}$, y llamamos a

$$\langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, E \rangle$$

la estructura estándar, donde S se interpreta como $S(n) = n + 1$ y el resto de los símbolos en la forma natural. No obstante, no seguimos con los axiomas que teníamos, haremos algunos pequeños cambios. Después hablaremos de E.

PA1 $\forall x(S(x) \neq 0)$.

PA2 $\forall x, y(S(x) = S(y) \to x = y)$.

PA3 $\forall x(x+0=x)$.

PA4 $\forall x,y(x+S(y)=S(x+y))$.

Note que la validez de los dos primeros axiomas en una estructura obliga a que ésta tenga universo infinito. Sin duda, por el primer axioma existen al menos dos elementos: el 0 y $S(0)$, así que $0 \neq S(0)$, de donde se deduce, por PA2, que $S(0) \neq SS(0)$. Usamos PA1 para confirmar que $0 \neq SS(0)$. Si seguimos de esta forma, damos paso a la afirmación.

Por su parte PA3 y PA4 son suficientes para definir la suma. Sea T_1 la teoría generada (en el sentido antes mencionado) por PA1-PA4. Los siguientes ejemplos simplemente muestran que con PA1-PA4 se puede probar algunos hechos que ya habíamos demostrado.

Ejemplo 4.2.1.

$$T_1 \vdash \overline{2}+\overline{2}=\overline{4}.$$

1. $T_1 \vdash SS(0)+SS(0)=S(SS(0)+S(0))$ PA4
2. $T_1 \vdash SS(0)+S(0)=S(SS(0)+0)$ PA4
3. $T_1 \vdash SS(0)+0=SS(0)$ PA3
4. $T_1 \vdash S(SS(0)+0)=S(SS(0))$ de 3, axiomas de igualdad
5. $T_1 \vdash SS(0)+S(0)=S(SS(0))$ de 4 y 2, axiomas de igualdad
6. $T_1 \vdash S(SS(0)+S(0))=S(S(SS(0)))$ de 5, axiomas de igualdad
7. $T_1 \vdash SS(0)+SS(0)=S(S(SS(0)))$ de 6 y 1, axiomas de igualdad.

Ejemplo 4.2.2. En general, para cualesquier números naturales m,n, se cumple que

$$T_1 \vdash \overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}.$$

Fijamos m y usamos inducción en n. Es claro que

$$T_1 \vdash \overline{m}+\overline{0}=\overline{m+0},$$

por PA3.

Como $\overline{n+1}$ es $S(n)$, si suponemos $T_1 \vdash \overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}$, logramos

1. $T_1 \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$
2. $T_1 \vdash \overline{m} + \overline{n+1} = S(\overline{m} + \overline{n})$ PA4
3. $T_1 \vdash S(\overline{m} + \overline{n}) = S(\overline{m+n})$ 1, axiomas de igualdad
4. $T_1 \vdash \overline{m} + \overline{n+1} = S(\overline{m+n})$ axiomas de igualdad.

Tenemos los siguientes axiomas adicionales, donde m^n representa a $E(m,n)$.

PA5 $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.

PA6 $\forall x, y(x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$.

PA7 $\forall x(x^0 = S(0))$.

PA8 $\forall x, y(x^{S(y)} = x^y \cdot x)$.

Se verifica, el lector debe hacerlo, que PA1-PA8 se cumplen en la estructura estándar. Estos axiomas son suficientes para establecer cálculos aritméticos, pero no para determinar a $\mathbb{N}$. Esto es, existen modelos de PA1-PA8 que no son isomorfos a $\mathbb{N}$, son intrínsecamente diferentes de $\mathbb{N}$.

Ejemplo 4.2.3. Sea A un conjunto no vacío y fijemos $a_0 \in A$. Definimos un modelo $\mathfrak{M}$ como sigue. Su universo es $\mathbb{N} \times A$, así que los individuos en el universo son parejas ordenadas (n,a) con n un natural y $a \in A$. Establecemos las siguientes prescripciones.

❶ $0^{\mathfrak{M}} = (0, a_0)$.

❷ $S^{\mathfrak{M}}(n,a) = (n+1, a)$.

❸ $(n,a) +^{\mathfrak{M}} (n',a') = (n+n', a)$.

❹ La exponenciación y multiplicación se definen en forma similar (sobre la primera coordenada).

Se confirma fácilmente que $\mathfrak{M}$ es modelo de PA1-PA8. Sin embargo, si A tiene más de un elemento, $\mathfrak{M}$ no puede ser isomorfo a $\mathbb{N}$, de hecho, la suma no es conmutativa.

Así, requerimos un axioma adicional para poder caracterizar a $\mathbb{N}$. Por esta razón se introducen los axiomas de inducción. Cualquier modelo $\mathfrak{M}$ que satisfaga PA1-PA2 debe ser infinito, como ya vimos, debe contener al conjunto $\{0^{\mathfrak{M}}, (S(0))^{\mathfrak{M}}, \ldots\}$, pero queremos un axioma que asegure que cualquier elemento del modelo está en este conjunto. Esto es

muy fácil de lograr si «salimos» de la lógica de primer orden, por ejemplo, si admitimos conjunciones infinitas,

$$\forall x(x = 0 \vee x = S(0) \vee x = SS(0) \vee \cdots).$$

Otra posibilidad es admitir cuantificación sobre subconjuntos del universo (segundo orden), no sólo sobre elementos del mismo, así como añadir un símbolo de 2-relación al lenguaje, uno que ya conocemos: la pertenencia $\in$. En tal caso, podemos escribir

$$\forall A[0 \in A \wedge \forall x(x \in A \to S(x) \in A) \to \forall x(x \in A)].$$

No usaremos estas alternativas, porque las lógicas involucradas son muy poderosas, pero difíciles de manejar. La alternativa dada en segundo orden, no obstante, sugiere una posible solución en primer orden. En lugar de involucrar a cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que son muchos, tantos como números reales, nos ocupamos sólo de aquellos que son definibles mediante una fórmula de nuestro lenguaje.

Definición 4.2.4. Para cada fórmula $\varphi(x)$, mediante IND_φ denotamos la fórmula

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x\varphi(x).$$

De hecho, podemos establecer una versión más general que permite la presencia de parámetros en la fórmula φ.

Definición 4.2.5. Si $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$, IND_φ es la fórmula

$$\forall x_1, \ldots, x_n[\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall x_0(\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x_0), x_1, \ldots, x_n)) \to \forall x_0\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)].$$

Ya podemos establecer el último axioma de la aritmética de Peano.

Definición 4.2.6. P9 consiste exactamente en todas las fórmulas IND_φ para cada $\mathcal{L}$-fórmulas φ.

En lo inmediato PA^- representa a los axiomas PA1-PA8, mientras que PA es PA1-PA9. Una buena idea ahora mismo es dar algunos ejemplos de prueba en PA.

Ejemplo 4.2.7. Todo número distinto de cero tiene un predecesor,

$$PA \vdash \forall x(x = 0 \vee \exists t(x = S(t)).$$

Procedemos por inducción en x para la fórmula $\varphi(x) \equiv \forall x(x = 0 \vee \exists t(x = S(t)))$.

Esto es, apelamos al axioma de inducción después de probar que

$$PA \vdash 0 = 0 \vee \exists t(S(t) = 0),$$

y que

$$PA \vdash x = 0 \vee \exists t(S(t) = x \to S(x) = 0 \vee \exists t(S(t) = S(x))),$$

lo cual es inmediato porque $PA \vdash 0 = 0$ y $PA \vdash S(x) = S(x) \to \exists t(S(t) = S(x))$.

Ejemplo 4.2.8.

$$PA \vdash x + r = 0 \to r = 0$$

Procedemos por casos, x es cero o un sucesor. Formalmente, probamos que

$$PA \vdash r = 0 \to (x + r = 0 \to r = 0),$$

que es una tautología y

$$PA \vdash \exists t(r = S(t) \to (x + r = 0 \to r = 0), \qquad (\bigstar)$$

y después usamos 4.2.7 para lograr el resultado.

1. $\{r = S(t)\} \cup PA \vdash x + r = x + S(t)$ axiomas de igualdad e inicio
2. $\{r = S(t)\} \cup PA \vdash x + r = S(x + t)$ PA4
3. $\{r = S(t)\} \cup PA \vdash S(x + t) \neq 0$ PA1
4. $\{r = S(t)\} \cup PA \vdash x + r \neq 0$ 2,3 axiomas de igualdad
5. $\{r = S(t)\} \cup PA \vdash x + r = 0 \to r = 0$ tautologías
6. $PA \vdash r = S(t) \to (x + r = 0 \to r = 0)$ deducción
7. $PA \vdash \exists t(r = S(t)) \to (x + r = 0 \to r = 0)$ $\exists$-introducción.

Recuerde que establecimos la relación $\leq$ mediante la prescripción $x \leq y$ para $\exists r(x + r = y)$, y $x < y$ cuando $x \leq y \wedge x \neq y$.

Ejemplo 4.2.9. 1. $PA \vdash x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$

2. $PA \vdash x \leq S(y) \leftrightarrow x \leq y \vee x = S(y)$.

1. Tenemos la siguiente prueba.

1. $PA \cup \{x + r = 0\} \vdash r = 0$ Ejemplo 4.2.8
2. $PA \cup \{x + r = 0\} \vdash x = 0$ 1, usando PA3
3. $PA \vdash x + r = 0 \to x = 0$ Deducción
4. $PA \vdash \exists r(x + r = 0) \to x = 0$ $\exists$-introducción.
5. $PA \vdash x \leq 0 \to x = 0$ Definición de $\leq$
6. $PA \vdash x = 0 \to x \leq 0$ Ejercicio
7. $PA \vdash x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$ 5,6.

2. Procedemos por inducción en x. La base de la inducción es

$$PA \vdash 0 \leq S(y) \leftrightarrow 0 \leq y \vee 0 = S(y),$$

que se verifica con facilidad. Para la etapa inductiva, otra vez tenemos casos, r es cero o un sucesor.

1. $PA \cup \{S(x) + r = S(y), r = 0\} \vdash S(x) = S(y)$ PA3
2. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash r = 0 \to S(x) = S(y)$ deducción
3. $PA \cup \{S(x) + r = S(y), r = S(t)\} \vdash S(x) + S(t) = S(y)$ axiomas de la igualdad
4. $PA \cup \{S(x) + r = S(y), r = S(t)\} \vdash S(S(x) + t) = S(y)$ PA4
5. $PA \cup \{S(x) + r = S(y), r = S(t)\} \vdash S(x) + t = y$ PA2
6. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash S(x) \leq y$ $\exists$-introducción
7. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash r = S(t) \to S(x) \leq y$ deducción
8. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash \exists t(r = S(t)) \to S(x) \leq y$ Definición de $\leq$
9. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash r = 0 \vee \exists t(r = S(t)) \to S(x) = S(y) \vee S(x) \leq y$ 2,8
10. $PA \cup \{S(x) + r = S(y)\} \vdash S(x) = S(y) \vee S(x) \leq y$ Ejemplo 4.2.8
11. $PA \vdash S(x) + r = S(y) \to S(x) = S(y) \vee S(x) \leq S(y)$ deducción.
12. $PA \vdash S(x) \leq S(y) \to S(x) = S(y) \vee S(x) \leq y$.

Ejemplo 4.2.10.

$$x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$$
$$x \leq \overline{1} \leftrightarrow x = 0 \vee x = \overline{1}$$
$$x \leq \overline{2} \leftrightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee x = \overline{2}$$
$$x \leq \overline{3} \leftrightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee x = \overline{2} \vee x = \overline{3}$$

en el caso general para n

$$x \leq \overline{n} \leftrightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \cdot \vee x = \overline{n}.$$

Por supuesto, no podemos cuantificar «para todo n» en PA, así que para probar el teorema usamos inducción «desde afuera», esto es, inducción en los números naturales usuales. El caso $n = 0$ se trató en 4.2.9(1). Sea $n = k + 1$ y como $\overline{n} = \overline{k+1} = S(\overline{k})$, podemos aplicar 4.2.9(2) para deducir

$$PA \vdash x \leq \overline{k+1} \leftrightarrow x \leq \overline{k} \vee x = \overline{k+1},$$

y por hipótesis de inducción se infiere que

$$PA \vdash x \leq \overline{k+1} \leftrightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = \overline{k}) \vee x = \overline{k+1}.$$

Ejemplo 4.2.11. La ley asociativa para la suma,

$$PA \vdash \forall\, x, y, z((x + y) + z = x + (y + z)).$$

La prueba procede por inducción en z, es decir, probaremos lo siguiente.

(1) $PA \vdash (x + y) + 0 = x + (y + 0)$

(2) $PA \vdash [(x + y) + z = x + (y + z) \rightarrow (x + y) + S(z) = x + (y + S(z))]$.

(1) Se deduce de PA1 y los axiomas de igualdad. Sin duda,

1. $PA \vdash (x + y) + 0 = x + y$ PA1

2. $PA \vdash x + (y + 0) = x + y$ PA1

3. $PA \vdash (x + y) + 0 = x + (y + 0)$ 1,2.

(2) Requerimos PA2 y los axiomas de igualdad.

1. $PA \cup \{(x + y) + z = x + (y + z)\} \vdash (x + y) + S(z) = S((x + y) + z)$ PA2

2. $PA \cup \{(x + y) + z = x + (y + z)\} \vdash x + (y + S(z)) = x + S(y + z)$ PA2

3. $PA \cup \{(x + y) + z = x + (y + z)\} \vdash x + S(y + z) = S(x + (y + z))$ PA2

4. $PA \cup \{(x + y) + z = x + (y + z)\} \vdash S(x + (y + z)) = S((x + y) + z)$ hipótesis de inducción.

5. $PA \cup \{(x + y) + z = x + (y + z)\} \vdash (x + y) + S(z) = x + (y + S(z))$ 1,4,3,2,

ahora usamos el teorema de deducción y el de generalización para derivar el resultado que buscamos.

Ejemplo 4.2.12.

$$PA \vdash x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z.$$

Suponga que $x \leq y$ y $y \leq z$. Entonces, existen z' y z'' tales que $z' + x = y$ y $z'' + y = z$, de donde se sigue que $z' + (z'' + x) = z$. Apelamos a asociatividad para escribir $(z' + z'') + x = z$. Por tanto, existe x' tal que $x' + x = z$ (tomamos $x' = z' + z''$), por lo que $x \leq z$. El lector debe escribir una prueba formal a partir de este argumento.

Ejemplo 4.2.13.

$$PA \vdash x \leq y \wedge y \leq x \to x = y.$$

Suponga que $x \leq y$ y $y \leq x$, por lo que existen números z, z' tales que $z + x = y$ y $z' + y = x$. Podemos entonces deducir que $z' + (z + x) = x$, asociamos, $(z' + z) + x = x$. Dado que $PA \vdash 0 + x = x$, $(z' + z) + x = 0 + x$. Por cancelación, $z' + z = 0$ y como $PA \vdash x + y = 0 \to y = 0$, deducimos $z = 0$. En consecuencia, $0 + x = y$, así que $x = y$.

Ejemplo 4.2.14.

$$PA \vdash S(x) \leq \overline{n+1} \to x \leq \overline{n}.$$

Si $S(x) \leq \overline{n+1}$, existe z con $z + S(x) = \overline{n+1}$, por lo que $S(z+x) = S(\overline{n})$, de donde se sigue que $z + x = \overline{n}$, y deducimos $x \leq \overline{n}$.

Ejemplo 4.2.15.

$$PA \vdash \neg(x < 0),$$

y

$$PA \vdash x < S(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y.$$

Bosquejamos la prueba de estos hechos. El lector debe formalizar una demostración. En presencia de PA, $x = 0 + x$ y $x = x + 0$, por generalización existencial, $x \leq x$ y $0 \leq x$.

Como antes, escribimos $\forall\, x < y\varphi$ para abreviar $\forall\, x(x < y \to \varphi)$, y $\exists\, x < y\varphi$ para abreviar $\exists\, x(x < y \wedge \varphi)$.

Ejemplo 4.2.16. (1) $PA \vdash \forall\, x < 0\ \varphi$.

(2) $PA \vdash \forall\, y < S(x)\varphi(y) \leftrightarrow [\forall\, y \leq x\varphi(y)] \wedge \varphi(x)$.

Para probar estas afirmaciones procedemos como sigue.
(1) De acuerdo con el ejemplo 4.2.15, $PA \vdash x < 0 \to \varphi$.
(2) Otra vez acudimos al ejemplo 4.2.15 para deducir

$$PA \vdash (y < S(x) \to \varphi(y)) \leftrightarrow ((y < x \to \varphi(y)) \wedge (y = x \to \varphi(y))$$

que es equivalente a

$$PA \vdash (y < S(x) \to \varphi(y)) \leftrightarrow (y < x \to \varphi(y)) \wedge \varphi(x).$$

Ejemplo 4.2.17. Suponga que φ es una fómula con única variable libre x. Entonces,

$$PA \vdash \forall\, x[(\forall\, y < x\varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall\, x\varphi(x).$$

Si hacemos $\psi \equiv \neg\varphi$, podemos transformar la fórmula en la siguiente forma, «el principio del mínimo»,

$$PA \vdash \exists\, x\psi(x) \to \exists\, x[\psi(x) \wedge \forall\, y < x\neg\psi(y)].$$

En palabras, si existe un número que satisface ψ, existe un número que es el menor que satisface ψ.

Probaremos que

$$PA \vdash \forall x[(\forall y < x\varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall x \forall y < x\ \varphi(y)$$

y que

$$PA \vdash \forall x \forall y < x\varphi(y) \to \forall x\varphi(x).$$

La primer fórmula se prueba por inducción en x. Requerimos

(1) $PA \cup \{\forall x[(\forall y < x\varphi(y) \to \varphi(x))]\} \vdash \forall y < 0\varphi(y)$,

(2) $PA \cup \{\forall x[(\forall y < x\varphi(y) \to \varphi(x))]\} \vdash \forall y < x\varphi(y) \to \forall y < S(x)\varphi(y)$,

que se desprenden del ejemplo 4.2.16, mientras que la segunda fórmula arriba se deriva de

$$PA \cup \{\forall x \forall y < x\varphi(y)\} \vdash \forall y < S(x)\varphi(y),$$

y de

$$PA \vdash x < S(x).$$

Ejemplo 4.2.18. Existen una cantidad infinita de primos.

Para expresar todo correctamente, primero damos una fórmula para la noción de ser primo, $primo(p)$,

$$\neg(\exists x, y(x > \overline{1} \wedge y > \overline{1} \wedge x \cdot y = p)$$

Así que lo que debmos probar es

$$\forall x \exists p(x < p \wedge primo(p))$$

La idea de la prueba es la siguiente. Fijamos un número x y sea y el producto de los números $\leq x$ (que no sean cero). En consecuencia, y es divisible por todos los números $\leq x$ (excepto por el 0). En tal caso, $y + 1$ no es divisible por ningún número $z \leq x$.

Después, encontramos un primo p que divida a $y + 1$, que claramente no puede ser $\leq x$, así que p debe ser $> x$. ¿Cómo encontramos p? Requerimos el siguiente hecho: siempre que $x > 1$, x tiene un factor primo p. Para probar esto, considere el conjunto $A = \{n : n > 1, n|x\}$. El conjunto A no es vacío pues $x \in A$, por lo que A tiene menor elemento p. Se afirma que p es primo. Sin dudad, si $p = r \cdot s$, con $r, s > 1$, entonces r, s son divisores de x que son menores que p pero mayores que 1, lo que da lugar a que $r, s \in A$, una contradicción con la definición de p.

Para formalizar la prueba, escribimos $x|y$ para abreviar $\exists z(x \cdot z = y)$, es decir, x divide a y. La primera etapa requiere lo siguiente.

(A) $PA \vdash \forall x \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq x \wedge z > \overline{1} \rightarrow z|y)]$

(B) $PA \vdash \forall x \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq x \wedge z > \overline{1} \rightarrow \neg z|y)]$

(C) $PA \vdash \forall y(y > \overline{1} \rightarrow \exists p(primo(p) \wedge p|y)$

(D) $PA \vdash \forall x \exists p(primo(p) \wedge p \geq x)$.

(A) Procedemos por inducción, debemos probar que

(A1) $PA \vdash \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(x \leq 0 \wedge z > \overline{1} \rightarrow z|y)]$

(A2) $PA \cup \{\exists y[y > \overline{1} \wedge \forall x(x \leq x \wedge z > \overline{1} \rightarrow \neg z|y)]\} \vdash \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq S(x) \wedge z > \overline{1} \rightarrow \neg z|y)]$.

(A1), (A2) quedan como ejercicio. Note que para (A2) basta probar que

$$PA \vdash (\forall z \leq x(z > \overline{1} \rightarrow z|y) \rightarrow (\forall z \leq S(x)(\forall z \leq S(x)(z > \overline{1} \rightarrow z|y \cdot S(x)).$$

De la fórmula arriba y usando $\exists$-introducción, obtenemos

$$PA \vdash \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq x \wedge z > \overline{1} \rightarrow z|y)] \rightarrow \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq S(x) \wedge z > \overline{1} \rightarrow z|y)].$$

(B) Se obtiene de (A) mediante $\exists$-introducción y el hecho de que

$$PA \vdash z|y \wedge z > \overline{1} \rightarrow \neg z|S(y).$$

(C) Usamos inducción en la forma del principio del menor elemento. Escribimos $\varphi(x,p)$ para la fórmula $p|x \wedge p > \overline{1} \wedge \forall z < p(z > \overline{1} \rightarrow \neg z|x)$ es decir, p es el menor divisor de x no trivial, y queremos probar que $\varphi(x,p) \rightarrow primo(p)$.

1. $PA \cup \{\varphi(x,p), r \cdot s = p, r > \overline{1}\} \vdash r|x$ porque $PA \vdash p|x \wedge r \cdot s = p \rightarrow r|x$
2. $PA \cup \{\varphi(x,p), r \cdot s = p, r > \overline{1}\} \vdash r \geq p$ usando la definición de φ.
3. $PA \cup \{\varphi(x,p), r \cdot s = p, r > \overline{1}\} \vdash s = \overline{1}$ porque $PA \vdash r \cdot s = p \wedge r \geq \overline{1} \rightarrow s = \overline{1}$
4. $PA \cup \{\varphi(x,p)\} \vdash \neg(r \cdot s = p \wedge r > \overline{1} \wedge s > 1)$
5. $PA \cup \{\varphi(x,p)\} \vdash primo(p)$ por definición de primo.
6. $PA \vdash \varphi(x,p) \rightarrow primo(p) \wedge p|x$
7. $PA \vdash \varphi(x,p0 \rightarrow \exists p[primo(p) \wedge p|x]$
8. $PA \vdash \exists p\varphi(x,p) \rightarrow \exists p(primo(p) \wedge p|x)$
9. $PA \vdash \exists p(p > \overline{1} \wedge p|x) \rightarrow \exists p\varphi(x,p)$ por el principio del mínimo.

10. $PA \cup \{x > \overline{1}\} \vdash (x > \overline{1} \wedge x|x)$

11. $PA \cup \{x > \overline{1}\} \vdash \exists\, p\varphi(x, p)$

12. $PA \cup \{x > \overline{1}\} \vdash \exists\, p(primo(p) \wedge p|x)$

(D) Ahora es inmediata.

De todos estos ejemplos es visible que PA es una teoría poderosa; de ella se pueden derivar numerosos resultados conocidos sobre números naturales, esto es, si $\mathbb{N} \models \varphi$ hemos visto que $PA \vdash \varphi$ para muchos enunciados φ, así que parecería natural suponer que se cumple para todo enunciado φ. Es más o menos evidente que

$$PA \vdash \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{N} \models \varphi$$

porque los axiomas de PA se cumplen en $\mathbb{N}$. No obstante, el primer teorema de incompletud de Gödel establece que existe un enunciado φ que se cumple en $\mathbb{N}$ pero que no se deriva de PA, en forma equivalente, existe un enunciado φ tal que ni φ ni $\neg\varphi$ se pueden demostrar a partir de PA.

Por supuesto, el enunciado φ es en el lenguaje que hemos empleado y en algún sentido debe referirse a los números naturales. No obstante, su significado real aparece sólo al traducirlo en una afirmación «metamatemática», es decir, un enunciado no sobre números, si no sobre fórmulas. En efecto, el significado de φ es φ no es demostrable en PA, un enunciado que se cumple en $\mathbb{N}$, pero que no es demostrable a partir de PA.

4.3 Un teorema de incompletud

Es nuestra intención presentar, en este apartado, la demostración de una versión del primer teorema de incompletud de Gödel, trataremos de seguir [Sc09]. Trabajamos con el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <, E\}$, donde E es una 2-relación y representa a la exponenciación. Asociado a este lenguaje tenemos la $\mathcal{L}$-estructura estándar

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, E \rangle$$

con la interpretación natural de los símbolos de lenguaje.

Usamos como axiomas de la aritmética de Peano (PA) los siguientes.

1. $\forall\, n(n + 1 \neq 0)$

2. $\forall\, n, m(n + 1 = m + 1 \rightarrow n = m)$.

3. $\forall\, n(n + 0 = n)$.

4. $\forall\, n, m(n + (m + 1) = (n + m) + 1)$

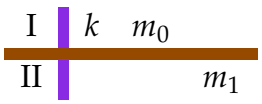
5. $\forall n(n \cdot 0 = 0)$
6. $\forall n, m(n \cdot (m+1) = (n \cdot m) + n)$
7. $\forall n(n^0 = 1)$.
8. $\forall n, m(n^{m+1} = n^m \cdot n)$
9. $\forall n, m(n < m+1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m))$
10. $\forall n(\neg n < 0)$
11. $\forall n, m(n < m \vee n = m \vee m < n)$.
12. El esquema de inducción. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(n, m_1, \ldots, m_k)$ se cumple $(Ind)_\varphi$, esto es,

$$\begin{aligned}&\forall m_1, \ldots, m_k((\varphi(0, m_1, \ldots, m_k) \wedge \\ &\forall n(\varphi(n, m_1, \ldots, m_k) \rightarrow \varphi(n+1, m_1, \ldots, m_k))) \\ &\rightarrow \forall n \varphi(n, m_1, \ldots, m_k)).\end{aligned}$$

Teorema 4.3.1. *Existe un $\mathcal{L}$-enunciado σ tal que σ se cumple en $\mathfrak{N}$, pero existe un modelo no estándar de la E-aritmética de Peano en la que σ es falsa.*

Antes de demostrarlo, requerimos llevar a cabo algunos preparativos. Sea $s : B \longrightarrow \mathbb{N}$ una sucesión monótona creciente finita o infinita, donde B es un segmento inicial de $\mathbb{N}$. En el caso $B \subsetneqq \mathbb{N}$, aquel $n \in \mathbb{N}$ tal que $B = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, es la longitud de s; si $B = \mathbb{N}$, decimos que s tiene longitud ∞. La longitud de s la denotamos $lh(s)$, y por lo anterior $lh(s) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Para simplificarnos la vida extendemos al orden $<$ en $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como es obvio, haciendo ∞ más grande que cualquier natural. Escribimos s_k en lugar de $s(k)$, es decir, el k-ésimo elemento de s (cuando $k < lh(s)$; en otro caso s_k no está definido). Se cumple $s = s_0, s_1, \ldots, s_{lh(s)}$ con $s_0 < s_1 < \cdots < s_{lh(s)-1}$, cuando $lh(s) < \infty$ y $s = s_0, s_1, \ldots$ con $s_0 < s_1 < \cdots$ en el caso de que $lh(s) = \infty$.

Sean s dada con $lh(s) \geq 2$ y $lh(s) \leq \infty$ y $\varphi(v_0, v_1)$ una fórmula de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$. Consideremos el siguiente juego $\mathcal{G}(s, \varphi)$ entre dos participantes I y II. El jugador I tira primero un natural $k < lh(s) - 1$ y un natural $m_0 < s_k$. El participante II tira entonces un natural $m_1 < s_{k+1}$,

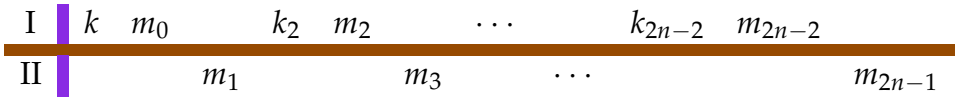


El primer participante que no respete estas reglas pierde el juego $\mathcal{G}(s, \varphi)$; mientras ambos respeten las reglas, el participante II gana cuando $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, m_1)$; en otro caso

gana I. También se dice que II tiene una estrategia ganadora para $\mathcal{G}(s,\varphi)$ o también que s satisface la fórmula φ cuando

$$\forall\, k < lh(s) - 1 \forall\, m_0 < s_k \exists\, m_1 < s_{k+1} \;\; \mathfrak{N} \models (m_0, m_1).$$

En general, dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sea s una sucesión monótona, creciente, estricta, finita o infinita, con $lh(s) \geq 2n$. Sea $\varphi(v_0, \ldots, v_{2n-1})$ una fórmula de $\mathcal{L}$. Mediante $\mathcal{G}(s,\varphi)$ denotamos el siguiente juego entre I y II.



Las reglas de la partida se describen a continuación. Se cumple $k_0 < lh(s) - 1$, $m_0 < s_{k_0}$, $m_1 < s_{k_0+1}$, y para cada $i < n-1$ se cumple que $k_{2i+1} < k_{2i+2} < lh(s) - 1$, $m_{2i+2} < s_{k_{2i+2}}$ y $m_{2i+3} < s_{k_{2i+3}}$. El primer jugador que viole una regla pierde; cuando ambos participantes se conducen conforme a las reglas, II gana si

$$\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \ldots, m_{2n-1})$$

en otro caso, triunfa I. Definimos «II tiene una estrategia ganadora para II» o «s satisface φ» en forma totalmente análoga al juego arriba descrito para $n = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} \forall\, k_0 < lh(s) - 1 \forall\, m_0 < s_{k_0} \exists\, m_1 < s_{k_0+1} \cdots (\cdots \\ \forall\, k_{2n-2}) k_{2n-4} + 1 < k_{2n-2} < lh(s) - 1 \\ \rightarrow \forall\, m_{2n-2} < s_{k_{2n-2}} \exists\, m_{2n-1} < s_{k_{2n-2}+1} \\ \mathfrak{N} \models \varphi(m_0, m_1, \ldots, m_{2n-2}, m_{2n-1})) \cdots). \end{aligned}$$

Cuando s, con $lh(s) < \infty$, satisface la fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{2n-1})$, es claro que $lh(s) \geq 2n$, porque entonces

$$s_{k_0} < s_{k_0} + 1 < s_{k_2} < s_{k_2} + 1 < \cdots < s_{k_{2n-2}} < s_{k_{2n-2}}.$$

Cuando $lh(s) = \infty$, la sucesión s diverge a ∞, porque hemos supuesto que s es monótona creciente estricta. De esto se sigue la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Sean s una sucesión monótona creciente estricta de naturales con $lh(s) = \infty$, y $\varphi(v_0, \ldots, v_{2n-1})$ una fórmula. Si s satisface la fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{2n-1})$, entonces se cumple que

$$\mathfrak{N} \models \forall\, m_0 \exists\, m_1 \cdots \forall\, m_{2n-2} \exists\, m_{2n-1} \varphi(m_0, \ldots, m_{2n-1}).$$

Demostración de la afirmación 1. Sean $i \leq n$, $i > 0$ y $u = (m_0, m_2, \ldots, m_{2i-2})$ una sucesión de naturales. Definimos una sucesión $(k_0(u), k_2(u), \ldots, k_{2i-2}(u))$ de naturales como sigue. Sean $k_0(u)$ es el menor $k \in \mathbb{N}$ con $m_0 < s_k$, y para $j < i$, $j > 0$, $k_{2j}(u)$ el menor $k \in \mathbb{N}$ con $k_{2i-2}(u) + 1 < k$ y $m_{2j} < s_k$. La sucesión $(k_0(u), k_2(u), \ldots, k_{2m-2}(u))$ está bien definida, porque s es monótona creciente estricta y $lh(s) = \infty$, y claramente $k_{2j}(u)$ depende sólo de la subsucesión $(m_0, m_2, \ldots, m_{2j})$.

Suponemos que s satisface la fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{2n-1})$, por lo que existe, para cada $m_0 \in \mathbb{N}$, un $m_1 < s_{k_0((m_0))+1}$, tal que para todo $m_2 \in \mathbb{N}$ existe un $m_3 < s_{k_2((m_0,m_2))+1}$, de tal naturaleza que ...así que para cualquier $m_{2n-2} \in \mathbb{N}$ existe

$$m_{2n-1} < s_{k_{2n-2}((m_0,m_2,\ldots,m_{2n-2}))+1},$$

tal que

$$\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, m_1, \ldots, m_{2n-2}, m_{2n-1}).$$

Por ejemplo, los m_{2j+1} son las tiradas de II en el juego $\varphi(s, \varphi)$ según una estrategia ganadora,

I	$k_0((m_0))$	m_0	$\cdots$	$k_{2n-2}((m_0, \ldots, m_{2n-2}))$	m_{2n-2}				
II			m_1	$\cdots$					m_{2n-1}

En particular, ocurre que

$$\mathfrak{N} \models \forall\, m_0 \exists\, m_1 \cdots \forall\, m_{2n-2} \exists\, m_{2n-1} \varphi(m_0, \ldots, m_{2n-1}).$$

(1)

Una sucesión finita s es buena cuando $s_0 > lh(s)$ y para $0 < i < lh(s)$ siempre se cumple que $s_i > (s_{i-1})^{s_i - 1}$.

Afirmación 2. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\varphi_0(v_0, \ldots, v_{2n_0-1})$, ..., $\varphi_k(v_0, \ldots, v_{2n_k-1})$ fórmulas. Si todas las afirmaciónes siguientes

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{N} \models \forall\, m_0 \cdots \forall\, m_{2n_0-2} \exists\, m_{2n_0-1} \varphi_0(m_0, \ldots, m_{2n_0-1}) \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&\mathfrak{N} \models \forall\, m_0 \exists\, m_1 \cdots \forall\, m_{2n_k-2} \exists\, m_{2n_k-1} \varphi_k(m_0, \ldots, m_{2n_k-1})
\end{aligned}$$

son ciertas, existe una sucesión buena s que satisface cada fórmula φ_l, $l \leq k$.

Demostración de la afirmación 2. Para $m \in \mathbb{N}$ sea $z(m)$ el menor z tal que para cualquier $l \leq k$, para todo $i < n_l$ y cualesquier $m_0, \ldots, m_{2i} < m$ se cumple que, si

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} \models \exists\, m_{2i+1} \forall\, m_{2i+2} \cdots \exists\, m_{2n_l-1} \\
\varphi_l(m_0, \ldots, m_{2i}, m_{2i+1}, \ldots, m_{2n_l-1}),
\end{aligned}$$

entonces existe $m_{2i+1} < z$ con

$$\mathfrak{N} \models \forall\, m_{2i+2} \cdots \exists\, m_{2n_l+1} \varphi(m_0, \ldots, m_{2i}, m_{2i+1}, \ldots, m_{2n_l+1}).$$

Es claro que $z(m)$ está bien definida para toda m. Sea n el mayor de los números $n_0, \ldots, n_k$, y s una sucesión de longitud $m \geq 2n$ $m < \infty$ tal que $s_0 > m$ y para $0 < i < m$ siempre se cumple, que $s_i > (s_{i-1})^{s_i - 1}$ y también $s_i \geq z(s_{i-1})$. Se verifica que s satisface cada fórmula φ_l, $l \leq k$. (2)

En lo sucesivo $(\varphi_m : m \in \mathbb{N})$ es una enumeración «natural» de los axiomas de PA. Podemos suponer que la enumeración mencionada tiene elementos redundantes, de tal suerte que φ_m es equivalente a una fórmula de la forma

$$\forall\, v_0 \exists\, v_1, \cdots \forall\, v_{2m-2} \exists\, v_{2m-1} \psi_m(v_0, v_1, \ldots, v_{2m-2}, v_{2m-1}),$$

donde ψ_m tiene exactamente a las variables $v_0, \ldots, v_{2m-1}$ y carece de cuantificadores. Sea $m \in \mathbb{N}$ y dado que las φ_l, $l \in \mathbb{N}$ se cumplen en $\mathfrak{N}$, por la afirmación 2 existe una sucesión buena s, tal que s satisface cualquier ψ_l para $l \leq m$. El enunciado σ, que atestiguará la veracidad del teorema 4.3.1, debe afirmar que para toda m existe una sucesión buena s que satisface toda ψ_l para $l \leq m$.

Sea C el conjunto de $n \in \mathbb{N}$ de la forma $\prod_{i<k} p_1^{j(i)+1}$ para k apropiado, $j(0), \ldots, j(k-1) \in \mathbb{N}$. Se sigue que C es el conjunto de «códigos» para sucesiones finitas de números naturales. Cuando $n = \prod_{i<k} p_i^{j(i)+1} \in C$, decimos que n codifica a la sucesión $(j(0), \ldots, j(k-1))$. Se verifica que el conjunto G de parejas $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que n codifica una sucesión buena que satisface a todas las fórmulas ψ_l, $l \geq m$, es definible. Digamos que $\theta(v_0, v_1)$ es una ffomula de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ tal que para cualesquier $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$(n, m) \in G \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{N} \models \theta(n, m).$$

Sea σ el enunciado

$$\forall\, v_1 \exists\, v_0 \theta(v_0, v_1).$$

De acuerdo con la afirmación 2 se cumple que

$$\mathfrak{N} \models \sigma. \qquad (\divideontimes)$$

Sólo nos resta construir un modelo de PA en el que no se cumple σ. Comenzamos por construir un modelo no estándar, como antes lo hicimos (teorema IV.6.13), en el que aparece un elemento que interpreta a la constante c, con la propiedad de que tal elemento es mayor estrictamente que cualquier sucesor de 0. Sean

$$\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}^*, <^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, E^{\mathfrak{M}} \rangle$$

el modelo no estándar de $Teo(\mathfrak{N})$ y $\pi_{\mathfrak{M}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ la aplicación dada por la siguiente

prescripción. Si $n \in \mathbb{N}$, obtenemos n a partir de sumar n veces 1 al 0, así que ponemos

$$\pi(0) = 0^{\mathfrak{M}}$$
$$\pi(n+1) = \pi(n) +^{\mathfrak{M}} 1^{\mathfrak{M}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se verifica que π es un homomorfismo que no puede ser sobre, por la presencia de la intepretación de c en $\mathfrak{M}$. De ser necesario, desordenamos un poco a $\mathfrak{M}$ para que $\pi_{\mathfrak{M}}$ sea la identidad en $\mathbb{N}$, es decir $\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$ y $\pi_{\mathfrak{M}}(n) = n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \in \mathbb{N}^*$ un número no estándar. Sabemos que $\mathfrak{M}$ es modelo de $Teo(\mathfrak{N})$ y por (✳) ocurre que

$$\mathfrak{M} \models \forall v_1 \exists v_0 \theta(v_0, v_1),$$

por lo que

$$\mathfrak{M} \models \exists v_0 \theta(v_0, N).$$

Según $\mathfrak{M}$, existe un elemento $<^{\mathfrak{M}}$-mínimo S con

$$\mathfrak{M} \models \theta(S, N),$$

esto es,

$$\mathfrak{M} \models \theta(S, N) \wedge \forall n(n < S \to \neg\theta(n, N)). \qquad (✸)$$

También S debe ser no estándar. En efecto, sea s la sucesión codificada por $S \in \mathbb{N}^*$. En virtud de que $\mathfrak{M} \models \theta(S, N)$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N}^* : n <^{\mathfrak{M}} 2 \cdot^{\mathfrak{M}} N\}$ está contenido en el dominio de s. Sabemos que N no es estándar, así que cualquier número estándar está en el dominio de s, por lo que ocurre que

$$\mathfrak{M} \models p_n | S$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que S no es estándar.

Para $n \in N$ escribimos s_n para el n-ésimo elemento de s. Si $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se cumple que $s_n \in \mathbb{N}^*$, pero no necesariamente $s_n \in \mathbb{N}$. La sucesión

$$s \restriction \mathbb{N} = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$$

no es definible en $\mathbb{N}^*$, aunque esto no será necesario.

Hacemos

$$H = \{n \in \mathbb{N}^* : \exists k \in \mathbb{N} \text{ con } n <^{\mathfrak{M}} s_k\}.$$

Ya que $s \restriction \mathbb{N}$ no es definible en $\mathfrak{M}$, tampoco H lo es. Considere el modelo

$$\mathfrak{M} \restriction H = \langle H, <^{\mathfrak{M}} \restriction H, 0, 1, +^{\mathfrak{M}} \restriction H, \cdot^{\mathfrak{M}} \restriction H, E^{\mathfrak{M}} \restriction H\rangle.$$

Afirmación 3. $\mathfrak{M} \restriction H$ es una $\mathcal{L}$-estructura.

Demostración de la afirmación 3. Debemos cerciorarnos de que H es cerrada respecto a las operaciones del lenguaje, esto es, que si $n, m \in H$, $n +^{\mathfrak{M}} m$, $n \cdot^{\mathfrak{M}} m$ y $E^{\mathfrak{M}}(n, m)$

pertenecen a H.

Podemos suponer que $2 \leq^{\mathfrak{M}} n, m$ y sean $k_2, k_1 \in \mathbb{N}$ tales que $n <^{\mathfrak{M}} s_{k_1}$ y $m <^{\mathfrak{M}} s_{k_2}$. Sea k el mayor de k_1, k_2; se sigue que $n <^{\mathfrak{M}} s_{k_1} \leq^{\mathfrak{M}} s_k$ y $m <^{\mathfrak{M}} s_{k_2} \leq^{\mathfrak{M}} s_k$, por lo que

$$\begin{aligned} n +^{\mathfrak{M}} m &\leq^{\mathfrak{M}} n \cdot^{\mathfrak{M}} m \\ &\leq^{\mathfrak{M}} E^{\mathfrak{M}} n, m) \\ &<^{\mathfrak{M}} E^{\mathfrak{M}}(s_k, s_k) \\ &<^{\mathfrak{M}} s_{k+1}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se deriva de que

$$\mathfrak{M} \models \text{«}S \text{ codifica una sucesión buena»}.$$

(3)

Afirmación 4. $\mathfrak{M} \restriction H$ es modelo de PA.

Demostración de la afirmación 4. Sea $m \in \mathbb{N}$ una número estándar. Basta probar que $\mathfrak{M} \restriction H \models \varphi_m$. Tomamos $i \leq m$, $i > 0$ y sea $u = (n_0, n_2, \ldots, n_{2i-2})$ una sucesión de elementos de H de longitud i. Definimos una sucesión $(k_0(u), k_2(u), \ldots, k_{2i-2}(u))$ de números estándar como sigue. Para empezar, $k_0(u)$ es el menor $k \in \mathbb{N}$ con $n_0 <^{\mathfrak{M}} s_k$, y para $j < i$, $j > 0$, sea $k_{2j}(u)$ el menor $k \in \mathbb{N}$ con $k_{2j-2}(u) + 1 < k$ y $n_{2j} <^{\mathfrak{M}} s_k$. La sucesión $(k_0(u), k_2(u), \ldots, k_{2m-2}(u))$ está bien definida, pues para toda $n \in H$ existe $k \in H$ con $n <^{\mathfrak{M}} s_k$ y es claro que que $k_{2j}(u)$ sólo depende del segmento inicial $(n_0, n_2, \ldots, n_{2j})$ de u.

Ya que $\mathfrak{M} \models \theta(S, N)$ y $m <^{\mathfrak{M}} N$, también es cierto que $\mathfrak{M} \models \theta(S, m)$, por lo que existe, para cada $n_0 \in H$, un $n_1 <^{\mathfrak{M}} s_{k_0((n_0))+1}$, tal que para cada $n_2 \in H$ existe $n_3 <^{\mathfrak{M}} s_{k_2((n_0,n_2))+1}$ tal que, ... para cada $n_{2m-2} \in H$ existe $n_{2m-1} <^{\mathfrak{M}} s_{k_{2m-2}((n_0,n_2,\ldots,n_{2m-2}))+1}$ con

$$\mathfrak{M} \models \psi_m(n_0, n_1, \ldots, n_{2m-2}, n_{2m-1}).$$

Por ejemplo, los n_{2j+1} son las tiradas de II en el juego $\mathcal{G}(S, m)$ según la estrategia para II, calculada en $\mathfrak{M}$,

I	$k_0((n_0))$	n_0	$\cdots$		$k_{2m-2}((n_0, \ldots, n_{2n-2}))$	n_{2m-2}	
II			n_1	$\cdots$			n_{2m-1}

En particular, se cumple que

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \varphi_m.$$

Afirmación 5.

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \neg\sigma.$$

Demostración de la afirmación 5. Ya que $\{n \in \mathbb{N}^* : n <^{\mathfrak{M}} 2 \cdot^{\mathfrak{M}} N\}$ está contenido en el dominio de s, y puesto que

$$\mathfrak{M} \models \text{«}S \text{ codifica una sucesión buena»}$$

ocurre que $2 \cdot^{\mathfrak{M}} N <^{\mathfrak{M}} s_0$, en particular $N \in H$. Ahora verificamos que

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \neg\exists\, v_0 \theta(v_0, N).$$

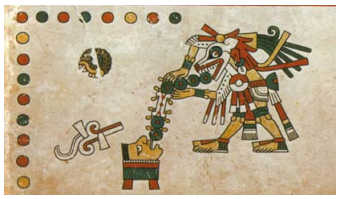
Supongamos que $\mathfrak{M} \restriction H \models \theta(R, N)$, donde $R \in H$. En tal caso se cumple también que $\mathfrak{M} \models \theta(R, N)$, y por la elección de S (véase (✸)) tenemos que $S = R$ o $S <^{\mathfrak{M}} R$, lo que da lugar en el caso $S \in H$ a que $S <^{\mathfrak{M}} s_k$ para un $k \in \mathbb{N}$ apropiado.

Por otro lado, para cada $n \in H$ existe $k \in \mathbb{N}$ con $n <^{\mathfrak{M}} s_k$. Para un $k \in \mathbb{N}$ arbitrario, es claro que se cumple que $s_k <^{\mathfrak{M}} S$, pues

$$\mathfrak{M} \models p_k^{s_k+1} | S.$$

En consecuencia, $S <^{\mathfrak{M}} S$, una contradicción. ❐

De acuerdo con el teorema 4.3.1, existen enunciados que no son demostrables ni refutables en PA.



Dicen que esta era una vieja que consiguió detener la lumbre cuando apenas se desprendió de algunas estrellas o planetas. Ella no tuvo miedo y fue a traerla donde se cayó la lumbre y así la detuvo mucho tiempo, hasta que llegó un tiempo en que todos pensaron que esa lumbre iba a ser para todos y no sólo para la vieja y entonces se iban las gentes a la casa de la vieja a pedir lumbre; pero la vieja se puso brava y no quería dar a ninguno. Y así corrió el tiempo y corría la voz de que aquella vieja consiguió detener la lumbre, pero no quería regalar. Entonces intervino el Tlacuache y dijo a los asistentes:

«Yo, Tlacuache, me comprometo a regalar la lumbre, y si no me van a comer ustedes.»

Entonces hubo una burla muy grande al pobre animal, pero éste, muy sereno, contestó así:

«No me sigan burlando, porque la burla es para ustedes mismos, no es para mí, así que esta misma tarde verán ustedes cumplidas mis promesas.»

Al caer la tarde del mismo día, pasó el Tlacuache visitando casa por casa diciendo que él iba a traer la lumbre hasta donde está la vieja pero que los demás recogieran cuanto puedan. Y así llego hasta la cas de la vieja y le habló así:

«Buenas tardes, Señora Lumbre, ¡qué frío hace! Yo quisiera estar un rato junto a la lumbre y calentarme, porque me muero de frío.»

La vieja creyó que era cierto que tenía frío el Tlacuache y le admitió acercarse a la lumbre al Tlacuache; pero éste, muy astuto, se fue arrimando más y más hasta poder meterse a la lumbre, metiendo su cola y así poder llevar. Pues una vez ardiendo su cola se fue corriendo a repartir la lumbre hasta donde pudo alcanzar.

Y fue por eso que hasta ahora los tlacuaches tiene la cola pelada.

Relato mazateco

4.4 Teoría de números y de conjuntos

En esta sección presentamos una tratamiento distinto de lo que hemos hecho hasta ahora. Vamos a incorporar la teoría de conjuntos para expresar nuestra teoría y resultados aritméticos en el universo de conjuntos. En realidad, el asunto es más profundo, pues parte de lo que se pretende es realizar o transferir la teoría clasica de recursión en $\mathbb{N}$ a un universo H_ω, no de números, sino de conjuntos. Esto tiene enormes repercusiones, pues ya que se logra trabajr la recursión «clásica» en conjuntos, se extiende esta teoría a universos más grandes y se incorporan otro tipo de funciones: la funciones primitivo recursivas (véase [FeVi17]). Por otro lado, dado que la recursión clásica se efectúa en en $\mathbb{N}$ que se identifica con el ordinal ω, también se puede extender a otros ordinales; es aquí donde aparece la llamada α-recursión, o recursión en ordinales admisibles. Pero esta recursión está indisolublemente ligada a recursión en conjuntos (conjuntos admisibles). Es posible realizar recursión aceptablemente bien en otro tipo de ordinales y de conjuntos, por ejemplo la llamada β-recursión, en ordinales con cierto grado de inadmisiblidad; en lo que a conjuntos concierne, se lleva a cabo la E-recursión. Para todos estos asuntos se recomienda revisar la obra [Fr17]. En la sección sobre teoría de conjuntos hemos establecido los fundamentos de la teoría y diversas abreviaciones y construcciones asociadas con ellos. Empezamos por tratar con los conjunto hereditariamente finitos. Un conjunto hereditariamente finito es aquel que es finito y sus elementos son conjuntos finitos, los elementos de éstos últimos son conjuntos finitos, y así sucesivamente. Cuando representamos funciones y relaciones como conjuntos, las finitarias son precisamente las que quedan representadas por conjuntos hereditariamente finitos.

Definición 4.4.1. La colección H de conjuntos hereditariamente finitos es el conjunto generado mediante las siguientes reglas.

1. $\varnothing \in H$
2. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$, entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in H$

En general, en la literatura, H se denota H_ω. Es claro que cualquier subconjunto finito de H es un elemento de H. Esta forma de definir a H tiene muchas ventajas, pero en ocasiones requerimos otra representación que pronto veremos.

Definición 4.4.2. Se define un segmento de la jerarquía de Zermelo como sigue.

$$\begin{aligned} V_0 &= \varnothing \\ V_{n+1} &= Pot(V_n) \\ V_\omega &= V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cdots \end{aligned}$$

La jerarquía de Zermelo es más grande que la recién dada, que sólo involucra al inicio de la jerarquía total. Para más detalles de esta jerarquía referimos al lector a [FeVi17]. Hemos descrito dos conjuntos: H y V_ω. Resulta que son iguales.

Lema 4.4.3. *Si $x \in V_n$, entonces $x \subseteq V_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, se cumple que $V_m \subseteq V_n$.*

Demostración. Probamos la primera afirmación por inducción en n. Si $n = 0$, no hay nada que hacer, así que supongamos válida la afirmación para n y sea $x \in V_{n+1}$, de donde se desprende que $x \subseteq V_n$ por construcción de la jerarquía. Si $z \in x$, $z \in V_n$, y por hipótesis de inducción $z \subseteq V_n$, de donde se sigue que $z \in V_{n+1}$, dando lugar a $x \subseteq V_{n+1}$.

En cuanto a la segunda afirmación, procedemos por inducción en n a probar que $V_m \subseteq V_n$ para cualquier $m \leq n$. Si $n = 0$, no hay nada que probar, de suerte que supongamos que se cumple para n y probemos para $n+1$. Sea $m \leq n+1$; si $m = n+1$ no hay nada que probar. Si $m < n$, por hipótesis de inducción $V_m \subseteq V_n$, así que basta confirmar que $V_n \subseteq V_{n+1}$. Tomamos $u \in V_n$, por lo previo, $u \subseteq V_n$, así que $u \in V_{n+1}$. ☐

Lema 4.4.4. *Para cada n, $V_n \subseteq H$, dando paso a que $V_\omega \subseteq H$.*

Demostración. Dado que $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, si sabemos que $V_n \subseteq H$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es inmediato corroborar que $V_\omega \subseteq H$. Resta, entonces, probar la primera afirmación del lema para obtener la segunda, lo cual logramos por inducción en n.

Primero probemos por este método que cada V_n es finito. Es claro para V_0 y si suponemos que V_n es finito, dado que $V_{n+1} = Pot(V_n)$, podemos hacer la siguiente cuenta. Digamos que $V_n = \{a_1, \ldots, a_l\}$. Tenemos l subconjuntos de V_n con un sólo elemento, tenemos $l \cdot l$ subconjuntos de V_n con 2 elementos y asi sucesivamente, añadimos el vacío y el total, los sumamos todos y obtenemos una cantidad finita de subconjuntos de V_n.

Si $n = 0$, es claro que $V_0 \subseteq H$, porque el conjunto vacío $\varnothing$ está contenido en cualquier conjunto. Supongamos que $V_n \subseteq H$ y probemos que $V_{n+1} \subseteq H$. Sea $x \in V_{n+1}$, esto es $x \subseteq V_n$, así que x es finito y como $x \subseteq V_n \subseteq H$, $x \in H$ por definición de H. ☐

Lema 4.4.5.

$$H \subseteq V_\omega.$$

Demostración. Apelamos a la descripción para formar H. Primero, $\varnothing \in H$, y también $\varnothing \in V_1$, por lo que $\varnothing \in V_\omega$. Suponga que hemos generado lo conjuntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que ya verificamos que cada uno de ellos pertnece a V_ω. Por definición de H, $\{x_1, \ldots, x_n\} \in H$ y veremos que también está en V_ω. Como todos están en V_ω y V_ω es la unión de los estratos previos, cada x_i debe aparecer en algún estrato V_i, se sigue que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in V_m$, por lo que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V_m$, esto es $\{x_1, \ldots, v_n\} \in V_{m+1} \subseteq V_\omega$. ☐

Ahora tenemos dos representaciones para H, y por tanto para V_ω. Ambos son la colección de los conjuntos hereditariamente finitos. En lo sucesivo, usaremos sólo la notación V_ω. Antes usamos el hecho de que si $x \in V_\omega$, x debe aparecer en algún V_n, $n \in \mathbb{N}$, y podemos elegir el primero de tales n.

Definición 4.4.6. Un conjunto x hereditariamente finito tiene rango n si $x \in V_{n+1}$, pero $x \notin V_n$. Esto es, V_{n+1} es el primer V_i al cual x pertenece.

Recuerde que en la sección de teoría de conjuntos definimos a cada natural como el conjunto de sus predecesores, esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0,1\} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n+1 &= \{0,1,\ldots,n\} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Lema 4.4.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \in V_{n+1}$ pero $n \notin V_n$.*

Demostración. Por inducción en n. Si $n = 0$, $0 = \varnothing \notin \varnothing = V_0$, pero $\varnothing \subseteq V_0$, así que $\varnothing \in V_1$. Supongamos cierto para n y confirmemos para $n+1$. Ocurre que $n \in V_{n+1}$, por lo que $n \subseteq V_{n+1}$, $n \notin V_n$; $n+1 = \{0,1,\ldots,n\}$. En consecuencia, $n+1 \subseteq V_{n+1}$, de donde se deduce que $n+1 \in V_{n+2}$. Por otro lado, $n+1$ no puede pertenecer a V_{n+1}, de lo contrario, $n+1 \subseteq V_n$, por definición de la jerarquía. Así, $n \in V_n$, una contradicción. ☐

En consecuencia, el rango del natural n es precisamente n.

Lema 4.4.8. *Si x es un conjunto hereditariamente finito, el rango de cualquier elemento suyo es menor que el de x.*

Demostración. Como x es herditariamente finito, $x \in V_\omega$, por lo que $x \in V_{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$ el menor posible. Por definición de V_{n+1}, $x \subseteq V_n$, así que cualquier elemento z de x apareció en V_n, de donde se desprende que el rango de z es menor que $n+1$. ☐

Hemos visto que los naturales se representan mediante conjuntos, y que tales conjuntos son hereditariamente finitos. En lo sucesivo usaremos el símbolo ω (la letra griega omega) en lugar de $\mathbb{N}$. Por lo ya dicho, $\omega \subseteq V_\omega$. De hecho, la relación entre ω y V_ω es más fuerte de lo que parece. Existe un isomorfismo entre ellos. Esto es, los conjuntos hereditariamente finitos se pueden «codificar» en forma única mediante naturales de tal suerte que manipulaciones básicas entre conjuntos corresponden a manipulaciones aritméticas fácilmente caracterizables. Por simplicidad, empezamos con el inverso de la codificación, y la idea es muy elegante empleando notación binaria. Suponga que enumeramos las posiciones de los dígitos que aparecen en base 2, de la derecha a la izquierda empezando con 0. Por ejemplo, si escribimos la posición de los números como subíndices, 10010 tiene posiciones numeradas como sigue: $1_4 0_3 0_2 1_1 0_0$

Definición 4.4.9. Establecemos una función $\beth$ (la letra hebrea beth) con dominio ω y contradominio V_ω mediante la siguiente prescripción.

$$\beth(n) = \{\beth(k) : 1 \text{ ocurre en la posición } k \text{ en la representación binaria de } n\}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\beth(0) &= \varnothing \\
\beth(1) &= (1)_2 = \{\beth(0)\} = \{\varnothing\} \\
\beth(2) &= (10)_2 = \{\beth(1)\} = \{\{\varnothing\}\} \\
\beth(3) &= (11)_2 = \{\beth(0), \beth(1)\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.
\end{aligned}$$

El siguiente teorema es fundamental y no difícil de probar, por lo que su demostración queda como un ejercicio ineludible.

Teorema 4.4.10. *La aplicación $\beth : \omega \longrightarrow V_\omega$ es una biyección.*

Definición 4.4.11. La aplicación $\daleth : V_\omega \longrightarrow \omega$ (letra hebrea Daleth) es precisamente la inversa de la función $\beth$.

Así, la función $\daleth$ codifica conjuntos hereditariamente finitos mediante naturales. Llamamos a $\daleth(s)$ el número de Gödel del conjunto s. En lo inmediato, DIV significa el cociente de una división, MOD el residuo.

Proposición 4.4.12. *Si $s, t \in V_\omega$, ocurre que $s \in t$ si y sólo si $[\daleth(t) DIV 2^{\daleth(s)}] MOD 2 = 1$.*

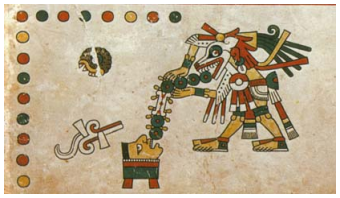
Demostración. Ejercicio.

En lo que sigue, $BITAND$ es la operación que combina (fusiona) dos expansiones binarias sumándolas posición por posición. Con más detalle, $n\ BITAND\ m$ es el número cuyo k-ésimo dígito binario es 1 si el k-ésimo dígito binario de n y m es 1, en otro caso es 0. En forma similar, $BITNOR$ es la operación correspondiente a disyunción. La siguiente proposición tiene una demostración sencilla que el lector debe proveer.

Proposición 4.4.13. *Si $s, t \in V_\omega$, se cumplen las siguientes aseveraciones.*

1. $\daleth(s \cap t) = \daleth(s)\ BITAND \daleth(t)$
2. $\daleth(s \cup t) = \daleth(s)\ BITOR\ \daleth(t)$
3. $\daleth(\{t\}) = 2^{\daleth(t)}$

4. $\urcorner(s \cup \{t\}) = \urcorner(x)\ BITOR\ 2^{\urcorner(t)}$.



Había una vez en medio de la selva un tlacuache. Estaba encaramado en una mata de coconabe comiendo la fruta, cuando en un momento dado andaba paseando por ahí un tigre. Al escuchar un ruidito alzó la vista y logró ver al tlacuache, y le hizo una pregunta: «¿Qué andas haciendo en esa mata de coconabe?»

El otro le respondió que estaba comiendo fruta.

El tigre volvió a preguntar:

«¿Qué es esa fruta?»

A lo que le respondió: «Son los coyoles».

Entonces el tigre decidió comer uno también para saber si es sabroso el fruto.

Le pidió al tlacuache que aventara uno para que lo probara. Entonces como el tigre llevaba mucha hambre lo quiso tragar entero, pero no pudo, quedó trabado en su garganta, de allí se quedó privado hasta que se sacó la fruta. Cuando se recuperó empezó a perseguir al tlacuache para comérselo. Pero como el tlacuache andaba deteniendo una piedra para construir su casa, cuando llegó el tigre, éste le preguntó qué estaba haciendo. Entonces el tlacuache le pidió ayuda al tigre para que él pudiera ir a buscar unos palos. Pero de allí ya nunca volvió, entonces el tigre decidió soltar la piedra, pero como le había dicho que no fuera a soltarla porque se quedaría aplastado, no lo hizo, pero se había cansado, entonces la soltó y pegó un brinco pero la piedra siguió en su lugar.

Entonces el tigre se enfureció y persiguió al tlacuache hasta encontrarlo. Al fin el tigre encontró una galera en medio de un cañaveral, y allí estaba el tlacuache cruzado de piernas, tocando guitarra porque allí iba a realizarse una fiesta de boda. Entonces el tlacuache dijo al tigre que si quería tocar la guitarra, porque él iba a alcanzar al padre y a los que iban a contraer matrimonio. Pero le dijo que no dejara de tocarla y que no fuera a voltear la vista hasta que escuchara el primer cuetazo, y así lo hizo, cuando escuchó ese ruido volteó la vista, pero estaba rodeado de fuego, entonces dejó tirada la guitarra y se echó a correr saliendo todo chamuscado y muy molesto, iba con mucha decisión de encontrar al tlacuache y comerlo, por lo que se dedicó a perseguirlo.

Por fin llegó a una lagunita y casi en medio de ella se encontraba un árbol, entonces el tigre quiso tomar un poco de agua, cuando de pronto se dio cuenta que el tlacuache estaba allí, debajo del agua, entonces el tigre se puso a beber toda el agua, pero no pudo terminarla, se llenó mucho de tanta agua. Se acostó boca arriba, y se dio cuenta que arriba del árbol estaba trepado el tlacuache. Entonces el tigre le dijo que bajara de allí, pero el tlacuache no quiso. Entonces el tlacuache dijo que sí, pero que el tigre se lo tragara entero, y así lo hizo el tigre, se lo tragó vivo y entero. Al rato el tigre fue a arrojar, y ahí quedó tirado el tlacuache por un momento, y después le dijo al tigre:

«Te gané de nuevo.»

Al volver la vista el tigre, vio cómo salió corriendo el tlacuache.

Relato chontal

4.5 Más sobre aritmética

Dejamos por el momento nuestro trabajo en conjuntos hereditariamente finitos para retomarlo en los naturales directamente. Nuestro lenguaje es

$$\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot, \leq\}$$

con la interpretación ya mencionada. A nuestras $\mathcal{L}$-fórmulas las llamaremos también fórmulas aritméticas. Para $i \in \mathbb{N}$ y un $\mathcal{L}$-término t, definimos el término $s^i(t)$ como sigue.

$$s^0(t) = t$$
$$s^{i+1}(t) = s(s^i(t))$$

Como antes, el numeral $\overline{n}$ está definido como el término $s^n(0)$. Si $\mathfrak{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, $Teo(\mathfrak{M}) = \{\sigma\colon \Sigma \text{ es un } \mathcal{L}\text{-enunciado y } \mathfrak{M} \models \sigma\}$. En particular, $Teo(\mathbb{N})$ es el conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados que se cumplen en $\mathbb{N}$.

Definición 4.5.1. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^k$; decimos que una fórmula aritmética $\varphi(\vec{x})$ define a R si

$$\mathbb{N} \models \varphi[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k] \qquad \Leftrightarrow \qquad (n_1, \ldots, n_k) \in R.$$

Una relación $R \subseteq \mathbb{N}^k$ es aritmética definible si existe una fórmula $\varphi(\vec{x})$ que define a R.

Ejemplo 4.5.2. El conjunto de números pares está definido por la fórmula aritmética

$$Par(x) \equiv \exists y(y \cdot \overline{2} = x)$$

El conjunto de números primos se puede definir a través de la siguiente fórmula

$$primo(x) = \forall y(\exists z(z \cdot y = x \to y = 1 \vee y = x) \wedge x \neq \overline{1}.$$

Este conjunto también se puede definir con la fórmula,

$$\varphi(x) \equiv \forall y_1, y_2(\exists z(z \cdot x = y_1 \cdot y_2 \to (\exists z(z \cdot x = y_1) \vee \exists z(z \cdot x = y_2)) \wedge x \neq \overline{1}.$$

Así, el mismo conjunto pude ser definido mediante diversas fórmulas. Decimos que las fórmulas $\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x})$ son equivalentes cuando definen a la misma relación, es decir, $\mathbb{N} \models \forall \vec{x}(\varphi_1(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_2(\vec{x}))$.

Definición 4.5.3. Si t es un término que no contiene a x y φ es una fórmula, $\exists x \leq t\varphi$ es una abreviación de $\exists x(x \leq t \wedge \varphi)$ y $\forall x \leq t\varphi$ representa a la fórmula $\forall x(x \leq t \to \varphi)$. Las

cadenas $\exists\, x \leq t$ y $\forall\, x \leq t$ se llaman cuantificadores acotados. La cuantificación acotada $\exists\, x < t$, $\forall\, x < t$ alude a los significados obvios.

Definición 4.5.4. Una fórmula se llama acotada cuando todos los cuantificadores que aparecen en φ son acotados. Definimos a las fórmulas Σ_0 como aquellas que son acotadas. También las llamaremos fórmulas Π_0. Definimos a las fórmulas Σ_1 como aquellas fórmulas φ que podemos escribir como $\exists\, x\psi$, donde ψ es una fórmula Π_0 o Σ_0. Una fórmula ψ es Π_1 cuando la podemos escribir como $\forall\, x\varphi$, donde φ es Σ_0 o Π_0. En general, una fórmula φ es Σ_{n+1} cuando la podemos representar como $\exists\, x\psi$, donde ψ es una fórmula Π_n. Decimos que la fórmula ψ es Π_{n+1}, si la podemos escribir como $\forall\, x\varphi$, donde φ es una fórmula Σ_n.

Definición 4.5.5. Sean $n \geq 0$ y $R \subseteq \mathbb{N}^k$. Entonces, R es Σ_n-definible, cuando existe una Σ_n-fórmua que define a R; en cambio, R es Π_n-definible si existe una Π_n-fórmula que define a R. Diremos que R es Δ_n-definible cuando es Σ_n y Π_n-definible. Las fórmulas acotadas también son llamadas Δ_0-fórmulas.

Lema 4.5.6. *Si $n \geq 0$, se cumplen las siguientes aseveraciones.*

1. *Si $R \subseteq \mathbb{N}^k$ es Σ_n-definible (Π_n-definible), entonces $\mathbb{N}^k - R$ es Π_n-definible (Σ_n-definible).*
2. *Las relaciones Δ_n son cerradas respecto a complemento.*
3. *Las relaciones Σ_{n+1} son cerradas respecto a cuantificación existencial.*
4. *Las relaciones Π_{n+1} son cerradas respecto a cuantificación universal.*
5. *Las relaciones Σ_n, Π_n, y Δ_n son cerradas respecto a uniones e intersecciones.*
6. *Las relaciones Σ_n, Π_n y Δ_n son cerradas respecto a cuantificación acotada.*

Demostración. 1. Para cualquier Σ_n-fórmula φ, la fórmula $\neg\varphi$ es lógicamente equivalente a un Π_n-fórmula y viceversa.

2. Se deriva de 1.

3 y 4. Se prueban simultáneamente por inducción en n. Sea $\exists\, z\varphi(\vec{x}, y, z)$ una fórmula Σ_{n+1}, es decir, $\varphi(\vec{x}, y, z)$ es Π_n. Entonces $\exists\, y\exists\, z\varphi(\vec{x}, y, z)$ es equivalente a

$$\psi(\vec{x}) \equiv \exists\, u\forall\, y\forall\, z(u = (y, z) \to \varphi(\vec{x}, y, z))$$

y también a

$$\psi_b(\vec{x}) \equiv \exists\, u\forall\, y \leq u\forall\, z \leq u(u = (y, z) \to \varphi(\vec{x}, y, z))$$

donde $u = (y, z)$ es una abreviación de $\overline{2} \cdot u = (y + z) \cdot (y + z + 1) + \overline{2} \cdot z$. Si $n = 0$, $\varphi(\vec{x}, y, z))$ es Π_0 y $\psi_b(\vec{x})$ es una fórmula Σ_1. Si $n > 0$, entonces $\varphi(\vec{x}, y, z)$ es una fórmula Π_n, por lo que $\psi(\vec{x})$ es equivalente, por hipótesis de inducción, a una fórmula Σ_{n+1}.

4. Sea $\varphi(\vec{x}, y)$ una fórmula Π_{n+1}, entonces $\forall y \varphi(\vec{x}, y)$ define una relación $R \subseteq \mathbb{N}^k$ que también queda definida por $\neg\exists y \neg\varphi(\vec{x}, y)$. Como en (1), $\neg\varphi(\vec{x}, y)$ es equivalente a una fórmula Σ_{n+1}, así que por el caso para Σ_{n+1}, $\exists y \neg\varphi(\vec{x}, y)$ es equivalente a una fórmula Σ_{n+1}, otra vez como en (1), $\neg\exists y \neg\varphi(\vec{x}, y)$ es equivalente a una fórmula Π_{n+1}.

5. La afirmación es trivial para $n = 0$; sea $n > 0$. Si $\exists y \varphi(\vec{x}, y)$ y $\exists z \psi(\vec{x}, z)$ son fórmulas Σ_n, entonces $\exists y \varphi(\vec{x}, y) \wedge \exists z \psi(\vec{x}, z)$ es lógicamente equivalente a $\exists y, z(\varphi(\vec{x}, y) \wedge \psi(\vec{x}, z))$ que es equivalente a una fórmula Σ_n según (3).

En forma similar, $\exists y \varphi(\vec{x}, y) \vee \exists z \varphi(\vec{x}, z)$ es lógicamente equivalente a $\exists y(\varphi(\vec{x}, y) \vee \psi(\vec{x}, y))$ que también es Σ_n. Los casos para Π_n son análogos. Para Δ_n de deducen de los Σ_n y Π_n.

6. Por inducción en n. El caso $n = 0$ es trivial, así que sea $n \geq 1$. Notemos que $\exists y \leq t \exists z \varphi(\overline{x}, y, z)$ es lógicamente equivalente a $\exists z \exists y \leq t \varphi(\overline{x}, y, z)$ y algo similar ocurre para dos cuantificadores universales. Sea $\varphi_0(\vec{x}, y, z)$ una fórmula Π_n, entonces $\exists z \varphi_0(\vec{x}, y, z)$ es una fórmula Σ_{n+1}.

Afirmación 1. La fórmula

$$\varphi(\vec{x}) \equiv \forall y \leq t(\vec{x}) \exists z \varphi_0(\vec{x}, y, z)$$

es equivalente a

$$\psi(\vec{x}) \equiv \exists w \forall y \leq t(\vec{x}) \exists z \leq w \varphi_0(\vec{x}, y, z).$$

Demostración de la afirmación 1. Observe que

$$\forall \vec{x}(\psi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x}))$$

es válida. Para la otra dirección, supongamos que $\mathbb{N} \models \varphi(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \models t(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) = \overline{m}$. Para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$ existe $q_i \in \mathbb{N}$ con $\mathbb{N} \models \varphi_0(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{i}, \overline{q}_i)$; sea $q = \max\{q_i : 0 \leq i \leq n\}$, entonces $\mathbb{N} \models \forall y \leq tt(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \exists z \leq \overline{q} \varphi_0(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, y, z)$, es decir, $\mathbb{N} \models \psi(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$. Por hipótesis de inducción, $\forall y \leq t(\vec{x}) \exists z \leq w \ \varphi_0(\vec{x}, y, z)$ es equivalente a una fórmula Π_1, por lo que $\psi(\vec{x})$, y por tanto también $\varphi(\vec{x})$, es equivalente a una fórmula Σ_{n+1}. (1)

Para los casos restantes, sea $\varphi_0(\vec{x}, y, z)$ una fórmula Σ_n; en tal caso $\forall z \varphi_0(\vec{x}, y, z)$ es Π_{n+1} y $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists y \leq t(x_1, \ldots, x_k) \forall z \varphi_0(\vec{x}, y, z)$ es lógicamente equivalente a $\neg\varphi'(\vec{x})$, donde $\varphi'(\vec{x}) \equiv \forall y \leq tt(\vec{x}) \exists z \neg\varphi_0(\vec{x}, y, z)$ y φ' es Δ_{n+1} por lo previo. Se sigue que φ es equivalente a una fórmula Π_{n+1}.

Dado que las relaciones Σ_n y Π_n son cerradas respecto a cuantificación acotada, así lo es Δ_n. □

4.6 Complejidad de fórmulas en V_ω

Hemos definido las colecciones de fórmulas Σ_n, Π_n y Δ_n basándonos en cuantificación usando $\leq$. Ahora realizamos un análisis similar sustituyendo $\leq$ por $\in$. Parecería un modificación sin importancia, y quizá lo sea, pero la clasificación mencionada de fórmulas usando $\in$ es de gran relevancia en teoría de conjuntos. Ésta es una buena oportunidad para estudiar estas clases de fómulas en forma elemental. Tratamos de seguir [Fi07]. Considere las siguientes fórmulas del lenguaje LTC, donde $\varphi(x)$ es tal que se puede verificar su validez.

1. $\exists\, x(x \in t \wedge \varphi(x))$
2. $\exists\, x\varphi(x)$
3. $\forall\, x\varphi(x)$.

El enunciado (1) es el más sencillo en el siguiente sentido: establece un cierto valor de x que hace verdadera a φ, nos indica donde encontrar al valor, en t, algo que involucra una busqueda, pero acotada, pues la hacemos en t. El enunciado (2) no es tan simple, aunque afirma la existencia de un valor x que valida a φ, no nos dice donde encontrarlo, pero si existe, tarde o temprano lo encontraremos. Existe una cantidad numerable de téminos t; se trata de buscar x en cada uno de ellos. En alguna etapa finita habremos de encontrar un t con $x \in t$. De no existr tal x, la busqueda será infinita. El enunciado (3) es el más complejo, porque para que sea cierto debemos comprobar cada x.

Como hemos venido haciendo, usaremos las siguientes abreviaciones,

$$\exists\, x \in t\varphi(x) \text{ para } \exists\, x(x \in t \wedge \varphi(x))$$
$$\forall\, x \in t\varphi(x) \text{ para} \forall\, x(x \in t \to \varphi(x))$$

que, ya mencionamos, se llama cuantificación acotada.

Definición 4.6.1. Una fórmula de LTC en la que todos los cuantificadores están acotados es una Δ_0-fórmula. Un subconjunto de V_ω definido por una Δ_0-fórmula se llama un Δ_0-conjunto. Algo correspondiente ocurre para n-relaciones.

En cuanto a complejidad, podríamos decir que las fórmulas con un cuantificador existencial no acotado le siguen a las Δ_0. No obstante, la mera presencia de un cuantificador existencial no acotado no necesariamente significa que el cuantificador se comporta en forma existencial. Por ejemplo, la fórmula $\neg\exists\, x\neg\varphi(x)$ actúa como si fuera la fórmula $\forall\, x\varphi(x)$. Nos interesan fórmulas en las que el cuantificador existencial no acotado actúa existencialmente, no universalmente. En principio, no nos preocupamos en dónde aparece el cuantificador, porque en cualquier caso tienen un comportamiento constructivo.

Definición 4.6.2. La clase de las Σ-fórmulas de LTC está dada por las siguientes prescripciones.

1. Cualquier Δ_0-fórmula es una fórmula Σ.

2. Si φ, ψ son fórmulas Σ, también lo son $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$.

3. Si φ es una Σ-fórmula, también lo son $\forall\, x \in y\varphi$, $\exists\, x \in y\varphi$ y $\exists\, x\varphi$.

Un conjunto definible mediante una fórmula Σ se llama Σ-definible. Demos algunos ejemplos.

✸ La relación subconjunto $x \subseteq y$ está representada por una fórmula Δ_0

$$\forall\, z \in x(z \in y).$$

✸ Podemos expresar que dos conjuntos son iguales en la forma

$$x \subseteq y \wedge y \subseteq x.$$

✸ El conjunto vacío está representado por una fórmula Δ_0,

$$\forall\, y \in x(\neg y \in x).$$

✸ Si x, y, z son conjuntos $\mathcal{A}(y, z)$ es la operación $x = y \cup \{z\}$, que está representada por la fórmula

$$y \subseteq x \wedge z \in x \wedge \forall\, w \in x(w \in y \wedge w = z).$$

Definición 4.6.3. La estructura $\mathfrak{hf}$ tiene como dominio V_ω, interpreta en forma natural a los predicados $\in, =$, al símbolo de constante $\varnothing$ y a la operación $\mathcal{A}(x, y) = x \cup \{y\}$.

A continuación mostraremos que muchas nociones comunes son Δ_0 en $\mathfrak{hf}$. Dado que los elementos de V_ω son finitos, la noción de función es la de función finita, pero esto no es suficiente para nuestros propósitos.

✻ La relación $x = \{y, z\}$ está representada por la Δ_0-fórmula $(x = \{y, z\})$,

$$\varphi(x, y, z) \equiv y \in x \wedge z \in x \wedge \forall\, v \in x((v = y) \vee (v = z)).$$

✻ La relación $x = \{y\}$ está representada por la fórmula Δ_0

$$\psi(x, y) \equiv x = \{y, y\}$$

✻ La relación $x = (y, z)$ esta representada por la fórmula

$$\exists\, v \in x(v = \{y\}) \wedge \exists\, v \in x(v = \{y, z\})$$
$$\forall\, v \in x(v = \{y\}) \vee (v = \{y, z\}).$$

- Se verifica que el conjunto de parejas ordenadas es Σ: $\exists v \exists w(x = (v, w))$. Se puede mejorar a Δ_0.
- Los subconjuntos de V_ω consistentes en parejas ordenadas se puede representar por la Δ_0-fórmula $Paror(x)$,

$$\exists u \in x \exists v \in u \exists w \in u(x = (v, w)).$$

Para no perderse, puede ser útil la siguiente presentación, donde se muestra $(v, w) = \{\{v\}, \{v, w\}\}$,

$$\underbrace{\{\{v\}, \overbrace{\{v, w\}}^{u}\}}_{x}$$

- La relación x es una pareja ordenada con primera coordenada y se expresa como una Δ_0-fórmula $(x)_0 = y$.
- La relación x es ua pareja ordenada con segunda coordenada z es también representable mediante una fórmula Δ_0, $(x)_1 = z$.
- El conjunto $\{x \in V_\omega : x \text{ es una 2-relación}\}$ es definible mediante una Δ_0-fórmula, $Rel(x)$.

Para simplificar las cosas, usamos

$$\forall\, (x, y) \in z \varphi(x, y)$$

en lugar de,

$$\forall v \in z \forall w \in v \forall x \in w \forall y \in w[(v = (x, y)) \to \varphi(x, y)]$$

Si φ es Δ_0, también lo es $\forall\, (x, y) \in z \varphi(x, y)$, algo correspondiente ocurre para fórmulas Σ. Tenemos una abreviación similar

$$\exists\, (x, y) \in z \varphi(x, y)$$

en lugar de

$$\exists v \in z \exists w \in v \exists x \in w \exists y \in w[(v = (x, y)) \wedge \varphi(x, y)]$$

- El conjunto $\{x \in V_\omega : x \text{ es una función}\}$ queda representado por una Δ_0-fórmula $Fun(x)$,

$$Rel(x) \wedge \forall\, (y, z) \in x \forall\, (x', y') \in x[(y = y') \to z = z']$$

- La relación x: x es el dominio de la función y es Δ_0, es definible mediante una Δ_0-fórmula $(x = dom(y))$. En forma similar para x es el rango de la función y $(x = ran(y))$.

Definición 4.6.4. Una fórmula Σ_1 es una de la forma $\exists x \varphi$, donde φ es Δ_0.

Así, una Σ_1-fórmula es un caso particular de una Σ-fórmula, pues sólo contiene un cuantificador existencial no acotado, y este aparece al frente.

Teorema 4.6.5 (Forma normal)**.** *Cualquier relación* Σ *en* $\mathfrak{hf}$ *es también* Σ_1.

Demostración. La idea de la prueba es mostrar que cualquier Σ-fórmula se puede transformar en una fórmula Σ_1 con el mismo significado en $\mathfrak{hf}$. Sea φ la fórmula Σ; primero movemos los cuantificadores existenciales no acotados al frente de la fórmula. Escoja un cuantificador existencial no acotado en φ que no está al frente, esto es, está «dentro» de la fórmula, no nos interesan aquellos cuantificadores $\exists$ que esten precedidos sólo por otro $\exists$. Por ejemplo, en la fórmula

$$\exists x(\psi_1 \to \exists y\psi_2 \wedge \exists z\psi_3),$$

ya no nos interesa el cuantificador $\exists x$, sólo sacaremos $\exists y$ y $\exists z$.

Suponga que $\exists x$ ocurre dentro de φ, digamos $\psi_1 \wedge \exists x\psi_2$. Si x es libre en ψ_1, podemos introducir una variable nueva x', y usarla en lugar de x en $\exists x\psi_2$, lo que preserva el significado. Sin perdida de la generalidad, podemos suponer que en $\psi_1 \wedge \exists x\psi_2$, x no aparece en ψ_1. Ahora, simplemente remplace $\psi_1 \wedge \exists x\psi_2$ en φ por $\exists x(\psi_1 \wedge \psi_2)$. Este procedimiento esta justificado por la equivalencia, cuando x no aparece en ψ_1,

$$\psi_1 \wedge \exists x\psi_1 \equiv \exists x(\psi_1 \wedge \psi_2).$$

Otras transformaciones similares se justifican por las siguientes fórmulas válidas.

$$\begin{aligned}
\exists x\psi \wedge \theta &\equiv \exists x(\psi \wedge \theta) && x \text{ no es libre en } \theta.\\
\theta \vee \exists x\psi &\equiv \exists x(\theta \vee \psi) && x \text{ no es libre en } \theta.\\
\exists x\psi \vee \theta &\equiv \exists x(\psi \vee \theta) && x \text{ no es libre en } \theta.\\
\exists y \in t\exists x\theta &\equiv \exists x\exists y \in t\theta && x \neq y \text{ y } x \text{ no en } t.
\end{aligned}$$

El único caso restante es el de un cuantificador existencial al alcance de un cuantificador universal, $\forall y \in t\exists x\theta$. Este es un caso difícil de tratar pues no podemos intercambiar los cuantificadores en general, pero si en $\mathfrak{hf}$. Por simplicidad, suponga que $\forall y \in t\exists x\theta$ es un enunciado y que $x \neq y$. Demos por hecho que se cumple en $\mathfrak{hf}$. En tal caso, para cada $y \in t^{\mathfrak{hf}}$ existe al menos un x que hace cierta θ. Escogemos arbitrariamente tal x para cada $y \in t^{\mathfrak{hf}}$. Las colección de estas x tiene tamaño menor o igual que el de t, por lo que resulta una colección finita de conjuntos hereditariamente finitos, dando lugar a un conjunto hereditariamente finito que llamaremos s. El enunciado $\forall y \in t\exists x \in s\theta$ debe ser cierto. Hemos introducido un término s adicional, pero podemos dejarlo de lado según el siguiente enunciado

$$\forall y \in t\exists x \in s\theta \to \exists z\forall y \in t\exists x \in s\theta,$$

que se cumple en $\mathfrak{hf}$. Si ponemos todo junto deducimos que si

$$\mathfrak{hf} \models \forall\, y \in t \exists\, x \theta,$$

entonces,

$$\exists\, z \forall\, y \in t \exists\, x \in z \theta.$$

En forma similar se obtiene que si

$$\mathfrak{hf} \models \exists\, z \forall\, y \in t \exists\, x \in z \theta,$$

entonces

$$\mathfrak{hf} \models \forall\, y \in t \exists\, x \theta.$$

En consecuencia,

$$\forall\, y \in t \exists\, x \theta \equiv \exists\, z \forall\, y \in t \exists\, x \in z \theta \qquad x \neq y \text{ y } z \text{ es nueva}$$

se cumple en $\mathfrak{hf}$, aunque no es cierta en general.

Ahora disponemos de una técnica para intercambiar un cuantificador existencial con un universal acotado: $\exists\, z \forall\, y \in w \exists\, x \in z \theta$ remplaza $\forall\, y \in w \exists\, x \theta$.

Ya casi terminamos. Comenzamos con la Σ-fórmula φ, después de una serie de transformaciones como las recién descritas, todos los cuantificadores existenciales no acotados se pueden poner al frente de la fórmula. Así, convertimos φ en

$$\exists\, x_1 \exists\, x_2 \cdots \exists\, x_n \psi$$

donde ψ es Δ_0. Lo único que falta es contraer los cuantificadores existenciales no acotados en uno sólo, lo que se consigue usando parejas ordenadas. Para no complicarnos la vida con notación interminable, suponemos que sólo tenemos dos cuantificadores existenciales no acotados. Suponga que tenemo la fórmula

$$\exists\, x_1 \exists\, x_2 \theta(x_1, x_2).$$

Simplemente la remplazamos por la fórmula equivalente,

$$\exists\, w e x_1, x_2 \in w(\theta(x_1, x_2)).$$

donde $w = \{x_1, x_2\}$, conjunto que pertenece a $\mathfrak{hf}$, ent tanto x_1, x_2 vivan ahí. En caso de que aparezcan más de dos cuantificadores existenciales no acotados, el mismo truco funciona, pues los conjuntos finitos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ pertenecen a $\mathfrak{hf}$, cuando sus elementos pertenecen a $\mathfrak{hf}$. Esto concluye el procedimiento de transformación de una Σ-fórmula en una fórmula Σ_1 en $\mathfrak{hf}$. □

De acuerdo con nuestra definición de ω, resulta ser subconjunto de V_ω. Nuestra intención inmediata es comprobar que es un subconjunto Δ_0 en $\mathfrak{hf}$. Dado que ω es una

colección de conjuntos hereditariamente finitos, lo que llamamos números son elementos de $\mathfrak{hf}$. El siguiente desarrollo es informal, en el sentido de que usaremos muchas propiedades de ω que no hemos justificado. Esto se hace en un curso de teoría de conjunto, una vez que se dispone del teorema de recursión.

Definición 4.6.6. Un conjunto x es transitivo si se cumple una de las siguientes propiedades equivalentes.

1. $y \in x$ implica $y \subseteq x$.
2. $y \in x$, $z \in y$ implican $z \in x$.

Ahora trabajaremos a fondo con lo números naturales. Recuerde como los definimos,

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

en general

$$\begin{aligned} n+1 &= \{0, \ldots, n\} \\ &= n \cup \{n\}. \end{aligned}$$

Hecho 4.6.7. *Todo número es transitivo.*

Demostración. Procedemos por inducción. Es claro que 0 es transitivo por vacuidad. Suponga que n es transitivo y probemos que también $n+1$ lo es. Sea $x \in n+1 = n \cup \{n\}$; en tal caso $x \in n$ o $x = n$. Como n es transitivo, si $x \in n$, entonces $x \subseteq n$. En cualquier caso $x \subseteq n$, y como $n \subseteq n+1$, terminamos. □

Hecho 4.6.8. *Cualquier número es un conjunto transitivo de conjuntos transitivos.*

Demostración. Se sigue de que cualquier número es la colección de los números menores. □

Hecho 4.6.9. *Si $x \in V_\omega$ es un conjunto transitivo de números, x es un número.*

Demostración. Dado que $x \in V_\omega$, x es un conjunto finito, porque es hereditariamente finito. Por tanto, deben exisitr números que no pertenecen a x; sea n el menor de tales números, $n \notin x$.

Afirmación 1. $x = n$.

Si esta afirmación es cierta, terminamos.

Demostración de la afirmación 1. Sea $k \in n$, entonces k es menor que n, por lo que $k \in x$, de donde se deduce que $n \subseteq x$. Ahora, suponga que $x \nsubseteq n$; escogemos k tal que $k \in x$ pero $k \notin n$. Dado esto, $k = n$ o $n \in k$, por el principio de tricotomía. La primera

alternativa es imposible, pues tendríamos $n \in n$, contrario a la definición de n. Si $n \in k$, como $k \in x$, y x es transitivo, $n \in x$, lo que es imposible. Se sigue que $x \subseteq n$, lo que da lugar a $x = n$. □

Hecho 4.6.10. *Si $x \in V_\omega$ es un conjunto transitivo cuyos elementos son conjuntos transitivos, entonces x es un número.*

Demostración. Según el hecho 4.6.9, basta probar que cada elemento de x es un número, así que supongamos que algún elemento no es un número, y existe uno con el menor rango posible, llamémosle c. Así, $c \in x$, c no es un número y cualquier miembro de x con rango menor que el de c es un número. Si llegamos a una contradicción con todos estos hechos, habremos probado que todo miembro de x es un número. Como $c \in x$, $c \subseteq x$, por la transitividad de x, y los miembros de c son elementos de x; estos tienen rango menor que c, por lo que deben ser números. Dado que $c \in x$, c es transitivo y consiste en números, dando lugar a que sea número por el hecho 4.6.9, una contradicción. □

Hecho 4.6.11. *Para $x \in V_\omega$, x es un número si y sólo si x es un conjunto transitivo cuyos elementos son conjuntos transitivos.*

□

- $Trans(x)$ significa que x es un conjunto transitivo y se puede escribir como fórmula Δ_0.
$$\forall y \in x \forall z \in y (z \in x).$$
- ω es definible en V_ω mediante una fórmula Δ_0, usando $Numero(x)$,
$$Numero(x) \equiv Trans(x) \wedge \forall y \in x (Trans(y))$$
$$\omega = \{x \in V_\omega : Numero(x)\}.$$
- La operación sucesor entre números es Δ_0. Recuerde que la operación sucesor es $n + 1 = n \cup \{n\}$,
$$y = \mathcal{A}(x, x).$$

Antes vimos que ser una función finita es Δ_0 y, recién, que ω es Δ_0. Una combinación de estas aseveraciones nos permite trabajar con sucesiones finitas. Ya que las tengamos, las sucesiones finitas, podemos introducir suma, multiplicación y otras operaciones entre números, aunque su definición puede ser Σ.

- La relación x es una sucesión finita de longitud y es Δ_0, $Suc(x)Dom(y)$,
$$Fun(x) \wedge Numero(y) \wedge y = Dom(x).$$

✺ El conjunto de sucesiones finitas es Σ, definido mediante la fórmula $Suc(x)$,

$$\exists y(Suc(x)Dom(y)).$$

✺ La relación x es una sucesión finita, y es el dominio de x, el y-ésimo término de x es z, es Σ dado por la fórmula $z = (x)_y$,

$$Suc(x) \wedge \exists w \in x(w = (y, z)).$$

Si queremos sumar $8 + 3$, notamos que el resultado es el último término de la sucesión $8 + 0, 8 + 1, 8 + 2, 8 + 3$, que es fácil de describir. Su dominio es $4 = 3 + 1$, el 0-ésimo término es 8, y los subsecuentes son sucesor del previo.

✺ La relación x, y, z son números, $z = x + y$ es Σ dada por la fórmula $z = x + y$.

$$\begin{aligned} Numero(x) \wedge Numero(y) \wedge Numero(z) \wedge \exists w[(w = y + 1) \wedge \\ \exists s[(Suc(s)Dom(w)) \wedge (x = s_0) \wedge \forall n \in w \forall k \in w[(n = k + 1) \\ \rightarrow (s_n = s_k + 1)] \wedge (z = s_y)]]. \end{aligned}$$

También la multiplicación es fácil de representar, contando con la suma. Por ejemplo, $8 \cdot 3$ es el último término de la sucesión $8 \cdot 0, 8 \cdot 1, 8 \cdot 2, 8 \cdot 3$ y esta es una sucesión que comienza con 0, cada término posterior es su predecesor sumándole 8. La exponenciación es similar.

✺ La relación x, y, z son números, $z = x \cdot y$ es Σ, dada por la fórmula $z = x \cdot y$.

✺ La relación x, y, z son números, $z = x^y$ es Σ dada por la fórmula $x = x^y$.

Recuerde que podemos representar a los números como ciertos conjuntos, los miembros de ω. En consecuencia, cuando trabajamos en $\mathfrak{hf}$ disponemos de números, y muchas otras cosas, como parejas ordenadas, sucesiones finitas, etc., algo que no ocurre con $\mathbb{N}$. Por consiguiente, las relaciones y funciones definibles en $\mathbb{N}$ son diferentes de aquellas en $\mathfrak{hf}$, lo que nos apura a definir las nociones Δ_0, y Σ en forma apropiada para la aritmética. La relación $x \leq y$ se representa en $\mathbb{N}$, por la fórmula $\exists z(x + z = y)$, mientras que la fórmula $x < y$ queda como $\exists z(\neg(z = 0) \wedge (x + z = y))$. Estas nos permitieron definir cuantificación acotada, como $\exists x \leq t\varphi(x)$. Pero ¿qué relación guardan las nociones Δ_0, Σ, etc., definidas en $\mathbb{N}$ con las definidas en $\mathfrak{hf}$?

Teorema 4.6.12 (Forma normal)**.** *Sea R una relación entre números, en ω.*

1. *Si R es Σ en $\mathbb{N}$, entonce R es Σ en $\mathfrak{hf}$.*

2. *Si R es definible en $\mathbb{N}$, también lo es en $\mathfrak{hf}$.*

Demostración. Presentamos la prueba para (1), y la del (2) queda como un ejercicio sencillo. Por simplicidad suponemos que R es una 1-relación y que está definida en $\mathbb{N}$ por $\varphi(z)$, una Σ-fórmula. Sin perder generalidad alguna, podemos suponer que los cuantificadores acotados en φ son de la forma $\forall\, x < t$ y $\exists\, z < t$. Transformaremos $\varphi(z)$ en una fórmula Σ en $\mathfrak{hf}$. Primero nos ocupamos de los términos anidados, para lo que basta dar un ejemplo genérico. Supongamos que tenemos la fórmula atómica,

$$((x + y) \cdot z) = (u + v)$$

en la que tenemos términos anidados. Sacamos estos términos mediante cuantificación existencial,

$$\exists\, a(a = x + y \wedge \exists\, b(b = a \cdot z \wedge \exists\, c(c = u + v \wedge b = c))).$$

Este procedimiento introduce cuantificadores existenciales, pero convierte a φ en otra Σ-fórmula, digamos $\varphi'(z)$. En ella, las funciones y constantes ocurren sólo en fórmulas atómicas de la forma

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ y &= u \cdot v \\ y &= S(u) \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, remplazamos las fórmulas atómicas de la aritmética en $\varphi'(z)$ con sus contrapartes Σ de la teoría de conjuntos. A la fórmula resultante la llamamos $\varphi''(z)$. La idea es remplazar las partes aritméticas por las correspondientes en términos de conjuntos que se comportan igual en elementos de ω.

Lo siguiente es examinar y transformar los cuantificadores existenciales acotados, lo cual es más sencillo, pues en ω, $n < m$ si y sólo si $n \in m$, así que simplemente remplazamos $\forall\, x < y$ por $\forall\, x \in y$ y $\exists\, x < y$ por $\exists\, x \in y$; llamamos al resultado $\varphi'''(z)$. Finalmente, nos resta tratar la cuantificación existencial no acotada. En $\mathbb{N}$ esto implica que la variable se mueve entre números, en cambio en $\mathfrak{hf}$, se mueve sobre todos los conjuntos en $\mathfrak{hf}$ y no todos son números. La idea es restringir el rango del cuantificador en la forma más directa posible, digamos, remplace $\exists\, x \cdots x \cdots$ con $\exists\, x(Nat(x) \wedge \cdots x \cdots)$. Llamamos a este resultado $\varphi''''(z)$. También debemos restringir la variable no acotada z, así que finalmente, $\overline{\varphi}$ es $Nat(z) \wedge \varphi''''(z)$. Se verifica con facilidad que $\overline{\varphi}$ define, en $\mathfrak{hf}$, al mismo conjunto que $\varphi(z)$ define en N. ∎

Nuestra siguiente tarea es comprobar que $\mathbb{N}$ puede hacer las cosas tan bien como $\mathfrak{hf}$, a pesar de que esta última estructura contiene muchos conjuntos que $\mathbb{N}$ no conoce. Este fenómeno se debe en buena medida a la posibilidad de codificar mediante números naturales. Recuerde que antes definimos una enumeración de Gödel de los conjuntos hereditariamente finitos (la biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathfrak{hf}$). A cada conjunto hereditariamente finito s se le asigna un número de Gödel $\mathcal{G}(s)$. Ahora veremos que la representabilidad

en $\mathfrak{hf}$ se convierte en representabilidad de la colección correspondiente de números de Gödel en $\mathbb{N}$.

Definición 4.6.13. Sea R una n-relación en $\mathfrak{hf}$. Mediante $\mathcal{G}(R)$ denotamos la n-relación en ω dada por

$$\mathcal{G}(R) = \{(\mathcal{G}(s_1), \ldots, \mathcal{G}(s_n)) : (s_1, \ldots, s_n) \in R\}.$$

Teorema 4.6.14. *Sea R una relación en V_ω.*

1. *Si R es Σ en $\mathfrak{hf}$, entonces $\mathcal{G}(R)$ es Σ en $\mathbb{N}$.*

2. *Si R es representable en $\mathfrak{hf}$, entonces $\mathcal{G}(R)$ es representable en $\mathbb{N}$.*

Demostración. La prueba de (2) es similar a la de (1), por lo que sólo efectuamos la de (1). Supongamos que R es 1-relación (por simplicidad) Σ en $\mathfrak{hf}$; según el teorema 4.6.5, R está representada por una fórmula Σ_1, digamos, $\exists y \varphi(y, x)$, donde $\varphi(y, x)$ es Δ_0, y sin perder generalidad podemos suponer que $\varphi(x, y)$ es una combinación booleana de fórmulas atómicas o negaciones de atómicas, junto con cuantificadores acotados. Convertimos $\exists y \varphi(y, x)$ en una fórmula Σ en el lenguaje de la aritmética que actúa en números de Gödel en la forma en que $\exists y \varphi(y, x)$ actúa en el conjunto de códigos.

La fórmula $\varphi(y, x)$ es Δ_0, y no tiene símbolos de función o constante, con todos sus cuantificadores acotados. Como primer paso transformamos los cuantificadores acotados; la expresión $\forall z \in t(\cdots z \cdots)$ abrevia $\forall z(z \in t \to \cdot z \cdots)$. Sabemos que si $s < t$, $\mathcal{G}(s) < \mathcal{G}(t)$, como etapa intermedia, remplazamos cualquier subfórmula de $\varphi(y, x)$ de la forma $\forall z \in t(\cdots z \cdots)$ por una de la forma $\forall z < t(\cdots z \cdots)$. En forma similar, remplazamos cualquier subfórmula de la forma $\exists z \in t(\cdots z \cdots)$, que abrevia $\exists z(z \in t \wedge \cdots z \cdots)$ con $\exists z < t(z \in t \wedge \cdots z \cdots)$, que abrevia $\exists z(z \in t \wedge \cdots z \cdots)$ por $\exists z < t(z \in t \wedge \cdots z \cdots)$. La fórmula resultante la llamamos $\varphi'(y, x)$.

En seguida, la transformación se basa en la proposición 4.4.12; para $s, t \in V_\omega$, $s \in t$ si y sólo si $[\mathcal{G}(t)\ DIV\ 2^{\mathcal{G}(s)}]\ MOD 2 = 1$. No sabemos si ésta es Δ_0 es $\mathbb{N}$, pero por fortuna podemos salir adelante con algo más débil. Primero se verifica que la relación recién dada es Σ y que su negación también lo es. Use esto, en $\varphi'(y, x)$, remplace cada subfórmula atómica de la forma $s \in t$ por una Σ-fórmula que representa $[\mathcal{G}(t)\ DIV\ 2^{\mathcal{G}(s)}]\ MOD\ 2 = 1$, y remplace cada subfórmula de la forma $\neg(s \in t)$ por una fórmula Σ que represente la negación de $[\mathcal{G}(t)\ DIV\ 2^{\mathcal{G}(s)}]\ MOD\ 2 = 1$. A la fórmula resultante la llamamos $\varphi''(y, x)$.

La fórmula $\exists y \varphi''(y, x)$ es una fórmula enteramente en el lenguaje de la aritmética, y es Σ en ese sentido. Finalmente, debe ser evidente que se comporta en conjuntos de números de Gödel, en la forma en que $\exists y \varphi(y, x)$ se comporta en los conjuntos mismos. ∎

Nuestra siguiente intención es mostrar que la noción de Σ es independiente de que la estructura sea $\mathbb{N}$ o $\mathfrak{hf}$, y algo similar para representabilidad en general. Aprovechamos el hecho de que existe un isomorfismo entre ambas estructuras y que el isomorfismo transforma conjuntos Σ en Σ. Para probar este hecho, requerimos un lema muy simple.

Lema 4.6.15. *La relación $y = \mathcal{G}(x)$ es Σ en $\mathfrak{hf}$.*

Demostración. La idea de la prueba es como sigue. Si x es un conjunto, se puede construir a partir de $\varnothing$ usando la operación $\mathcal{A}$. Por consiguiente, existe una sucesión s de conjuntos en la que cada miembro es $\varnothing$ o $\mathcal{A}(u,v)$, donde u, v son términos previos en la sucesión y la sucesión termina con x. En paralelo a la construcción de esta sucesión, se forma una sucesión correspondiente de números de Gödel como sigue. El número de Gödel de $\varnothing$ es 0 y si conocemos los números de Gödel de u, v, podemos calcular el número de Gödel de $\mathcal{A}(u,v)$. De esta forma producimos una sucesión de números de la misma longitud que s, terminando con y. El lector debe llenar los detalles. □

Teorema 4.6.16. *Sea R una relación en V_ω.*

1. *R es Σ en $\mathfrak{hf}$ si y sólo si $\mathcal{G}(R)$ es Σ en $\mathbb{N}$.*
2. *R es representable en $\mathfrak{hf}$ si y sólo si $\mathcal{G}(R)$ es representable en $\mathbb{N}$.*

Demostración. Sólo se prueba (1), y ya tenemos la mitad, pues si R es Σ en $\mathfrak{hf}$, entonces $\mathcal{G}(R)$ es Σ en $\mathbb{N}$. Para la otra dirección, suponga que $\mathcal{G}(R)$ es Σ en $\mathbb{N}$, por lo que $\mathcal{G}(R)$ también es Σ en $\mathfrak{hf}$. Por conveniencia, suponemos que R es 1-relación, y $\mathcal{G}(R)$ está representda en $\mathfrak{hf}$ por la Σ-fórmula $\varphi(x)$. Entonces, R misma está representada por la fórmula

$$\psi(y) \equiv \exists\, x[\varphi(x) \wedge y = \mathcal{G}(x)]$$

donde hemos usado la fórmula Σ para los números de Gödel del lema 4.6.15.

Para (2) proceda por inducción en la construcción de una fórmula partiendo, en caso de ser necesario, de (1). □

Teorema 4.6.17. *Sea R una relación en ω.*

1. *R es Σ en $\mathfrak{hf}$ si y sólo si R es Σ en $\mathbb{N}$.*
2. *R es representable en $\mathfrak{hf}$ si y sólo si R es representable en $\mathbb{N}$.*

Demostración. La prueba queda como ejercicio, es similar a la del teorema 4.4.10. □

Con estos resultados queda claro que es indiferente, al investigar representabilidad, si trabajamos en $\mathbb{N}$ o en $\mathfrak{hf}$. Con esto concluimos nuestro trabajo en transferencia de recursión entre $\mathbb{N}$ y V_ω. Es importante que el lector este conciente que no es menor lo realizado. Muchos de los resultados sobre definibilidad en $\mathfrak{hf}$ se basan, tácitamente, en que $\mathfrak{hf}$ es un conjunto admisible (véase [FeVi17]), por lo que resultados similares se logran en un conjunto admisible más general. Así como se transfirió recursión de $\mathbb{N}$ a $\mathfrak{hf}$, se consigue la recursión en ordinales y conjuntos admisibles, y entre otro tipo de ordinales y de universos de conjuntos.

4.7 Propiedades de Consistencia

Enseguida veremos una técnica que nos permite demostrar algunos resultados importantes como completud y que puede adapatarse a una gran variedad de sistemas lógicos. La idea es abstraer los pasos necesarios para demostrar el teorema de compacidad, por ejemplo como se hizo en el teorema 3.1.24. Describimos el conjunto mínimo de propiedades necesarias para construir un modelo de un conjunto de fórmulas. Es importante advertir al lector que, en principio todo este asunto de propiedades de consistencia y en la lógica de primer orden pudiera parecer innecesario o una pérdida de tiempo, dado que disponemos del teorema de compacidad. En principio esto es cierto, pero no totalmente. Para empezar mediante propiedades de cosnsitencia es posible lograr demostraciones más rápidas y elegantes de algunos resultados; por ejemplo aquellos relativos a interpolación. Pero lo más importante: es más fácil entender la técnica de las propiedades de consistencia en primer orden, para luego trasladarla a otro tipo de lógicas, por ejemplo las infinitarias o con cuantificadores generalizados, donde se carece del teorema de compacidad, y estas propiedades son un remplazo imprescindible.

El caso proposicional clásico

Empezamos por trabajar en el lenguaje proposicional. Lo siguiente refiere a fórmulas (enunciados) del cálculo proposicional, que como sabemos, consta de un conjunto numerable de fórmulas.

Definición 4.7.1. Una noción proposicional de consistencia es un conjunto $\mathfrak{C}$ de conjuntos de enunciados tales que:

0) si $\Theta \subset \Theta' \in \mathfrak{C}$ entonces $\Theta \in \mathfrak{C}$.

- Para cualquier conjunto de enunciados $\Theta \in \mathfrak{C}$ y cualesquiera enunciados α y β,

1a) si $\neg\alpha \in \Theta$ entonces $\alpha \notin \Theta$.

1b) Si $\neg\neg\alpha \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\alpha\} \in \mathfrak{C}$.

2a Si $(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{\beta\} \in \mathfrak{C}$.

2b) Si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\neg\alpha\} \in \mathfrak{C}$ y $\Theta \cup \{\neg\beta\} \in \mathfrak{C}$.

De cualquier elemento de $\mathfrak{C}$ diremos que es un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente.

Ejemplo 4.7.2. a) $\{\Gamma | \Gamma$ es consistente$\}$ es una noción de consistencia.

b) $\{\Gamma | \Gamma$ es finitamente consistente$\}$ es una noción de consistencia.

Demostración. b) Las propiedades 1) son inmediatas. Si $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ (con Θ_0 subconjunto finito de Θ) fuese inconsistente, también lo sería $\Theta_0 \cup \{\neg\neg\alpha\}$.

2a) Suponga que Θ es finito consistente, que $(\alpha \vee \beta) \in \Theta$, pero que ni $\Theta \cup \{\alpha\}$ ni $\Theta \cup \{\beta\}$ son finito consistentes. Entonces existen conjuntos finitos $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ y $\Theta_1 \cup \{\beta\}$ que son inconsistentes. Entonces $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{(\alpha \vee \beta)\}$ sería un subconjunto finito e inconsistente de Θ.

2b) Dado un modelo M de un subconjunto finito cualquiera $\Theta_0 \cup \{\neg(\alpha \vee \beta)\}$ de Θ, M es obviamente modelo tanto de $\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\}$ como de $\Theta_0 \cup \{\neg\beta\}$. ☐

Definición 4.7.3. Un conjunto Δ de enunciados es débilmente completo si para cualesquier enunciados α y β ocurre lo siguiente.

1a) Si $\neg\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha \notin \Delta$.

1b) si $\neg\neg\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha \in \Delta$.

2a) si $(\alpha \vee \beta) \in \Delta$ entonces $\alpha \in \Delta$ o $\beta \in \Delta$.

2b) Si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta$ entonces $\neg\alpha \in \Delta$ y $\neg\beta \in \Delta$.

Teorema 4.7.4. *Para cualquier noción proposicional de $\mathfrak{C}$-consistencia, cada conjunto $\mathfrak{C}$-consistente puede ser extendido a un conjunto débilmente completo.*

Demostración. Sea Δ_0 un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente y $\{\phi_n\}$ una enumeración de todos los enunciados del lenguaje. Definimos $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\phi_n\}$ si este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. En caso contrario, hacemos $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. Ponemos

$$\Delta = \bigcup\{\Delta_n\}.$$

Cada Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente por construcción, así que probemos que Δ es débilmente completo.

1a) Si $\alpha \in \Delta$ y $\neg\alpha \in \Delta$, entonces, para algún n, $\alpha \in \Delta_n$ y $\neg\alpha \in \Delta_n$, pero eso no es posible pues cada Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente

1b) Si $\neg\neg\alpha \in \Delta$, entonces, para algún n, $\neg\neg\alpha \in \Delta_n$. Supongamos que α es ϕ_k. Si $n \leq k$, entonces $\Delta_k \cup \{\alpha\}$ es consistente porque, si no lo fuera, Δ_k (que contiene a $\neg\neg\alpha$) ya sería inconsistente. Por tanto, $\alpha \in \Delta_{k+1}$. Supongamos ahora que $k \leq n$, y recordemos que $\neg\neg\alpha \in \Delta_n$, es decir, que $\Delta_n \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es consistente, en cuyo caso $\Delta_k \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es consistente y, por lo tanto, también lo es $\Delta_k \cup \{\alpha\}$, y así $\alpha \in \Delta_{k+1}$.

Los incisos 2a) y 2b) se prueban de manera similar. ☐

En lo inmediato, mediante T denotamos el valor de verdad «verdadero».

Teorema 4.7.5. *Cada conjunto débilmente completo tiene modelo.*

Demostración. Sea Δ débilmente completo y V una asignación tal que:

$$V(\rho) = T \Leftrightarrow p \in \Delta,$$

donde ρ es una letra proposicional. Vamos a probar por inducción sobre la complejidad de los enunciados que:

$$\phi \in \Delta \Rightarrow V(\phi) = T,$$

y

$$\neg\phi \in \Delta \Rightarrow V(\phi) = F.$$

Eso probará, en particular que V es un modelo para Δ.

1) Sea ρ es una letra proposicional. Si $\rho \in \Delta$ entonces $V(\rho) = T$. Si $\neg\rho \in \Delta$ entonces $\rho \notin \Delta$ (por ser Δ débilmente completo) y, por lo tanto, $V(\rho) = F$.

2) Si ϕ es $\neg\psi$ y las dos implicaciones se mantienen para ϕ entonces,

$$\phi \in \Delta \Rightarrow \neg\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) = F \Rightarrow V(\phi) = T$$

$\neg\phi \in \Delta \Rightarrow \neg\neg\psi \in \Delta \Rightarrow$ (por ser Δ débilmente completo) $\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) = T \Rightarrow V(\phi) = F$.

3) Sea ϕ es $\alpha \vee \beta$. Si $\phi \in \Delta$, es decir, $\alpha \vee \beta \in \Delta$, entonces $\alpha \in \Delta$ o $\beta \in \Delta$. En el primer caso, $V(\alpha) = T$, en el segundo, $V(\beta) = T$. En cualquier caso $V(\phi) = T$

Si $\neg\phi \in \Delta$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta$, lo cual implica (por ser Δ débilmente completo) que $\neg\alpha \in \Delta$ y $\neg\beta \in \Delta$. Entonces $V(\alpha) = V(\beta) = F$ y, por lo tanto, $V(\phi) = F$.

Corolario 4.7.6. *Para cualquier noción proposicional de consistencia $\mathfrak{C}$, cada conjunto $\mathfrak{C}$-consistente tiene modelo.*

Ahora presentamos una magnifica ilustración de las propiedades de consistencia. Se trata de un teorema de interpolación, y como antes habíamos mencionado, el uso de nociones de consistencia simplifica la prueba. En lo inmediato denotaremos por $At(\alpha)$ a las fórmulas atómicas que figuran en α, y si Γ es un conjunto de fórmulas definimos $At(\Gamma) = \{At(\alpha) | \alpha \in \Gamma\}$.

Definición 4.7.7. Dados dos conjuntos de enunciados Γ_0 y Γ_1, tales que el lenguaje de $\Gamma_i = L_i$, llamamos interpolante de Robinson de Γ_0 y Γ_1 a un enunciado ξ tal que pertenece a $L_0 \cap L_1$, $\Gamma_0 \models \xi$ y $\Gamma_1 \models \neg\xi$

Teorema 4.7.8. *Para cualesquier dos conjuntos satisfacibles Γ_0 y Γ_1 de enunciados, si $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ es insatisfacible, entonces existe un interpolante de Robinson para Γ_0 y Γ_1.*

Demostración. Considere un par Γ_0, Γ_1 de conjuntos con las características establecidas en la condición del teorema. Sea

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} =&\{\Theta|\Theta = (\Theta_0 \cup \Theta_1), \Theta_0, \Theta_1 \text{ son satisfacibles,}\\ &At(\Theta_i) \subset At(\Gamma_i), \text{ y } \Theta_0 \cup \Theta_1 \text{ no tiene interpolante de Robinson}\}\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $\mathfrak{C}$ es una noción proposicional de consistencia. Obviamente $\mathfrak{C}$ es cerrado respecto a subconjuntos.

Para 1a) Debemos probar que si $\neg\alpha \in \Theta_0 \cup \Theta_1$, entonces $\alpha \notin \Theta_0 \cup \Theta_1$. Suponga que existe un enunciado $\neg\alpha$ tal que $\neg\alpha \in \Theta_0$. Claramente $\alpha \notin \Theta_0$. suponga entonces que $\alpha \in \Theta_1$. Note que $At(\alpha) \subset At(\Theta_0) \cap At(\Theta_1)$. Entonces α sería el interpolante buscado.

Para 1b) Si $\neg\neg\alpha \in \Theta_0$, entonces Θ_0 y $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ son lógicamente equivalentes (cualquier modelo en que uno sea verdadero, también lo será el otro) y tienen las mismas letras proposicionales, así si $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$ entonces $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$. Similarmente si $\neg\neg\alpha \in \Theta_1$.

Para 2a), suponga que $(\alpha \vee \beta) \in \Theta_0$, con $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$, pero tal que $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \cup \Theta_1 \cup \notin \mathfrak{C}$ y $\Theta_0 \cup \{\beta\} \cup \Theta_1 \notin \mathfrak{C}$. Evidentemente uno de ellos $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ o $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ sigue siendo satisfacible. Supongamos primeramente que ambos lo son. Debe entonces existir un interpolante χ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\alpha\}, \Theta_1)$ y un interpolante ζ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\beta\}, \Theta_1)$. Es decir $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \models \chi$, $\Theta_1 \models \neg\chi$, mientras que y $\Theta_0 \cup \{\beta\} \models \zeta$ y $\Theta_1 \models \neg\zeta$. Entonces $\Theta_0 \models (\chi \vee \zeta)$ y $\Theta_1 \models \neg(\chi \vee \zeta)$, contrariamente a la hipótesis. Si, por ejemplo, $\Theta_0 \cup \{\beta\}$ fuese insatisfacible, entonces si $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \cup \Theta_1 \cup \notin \mathfrak{C}$ sería porque hay un interpolante ξ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\alpha\}, \Theta_1)$. Es decir que $(\Theta_0 \cup \{\alpha\} \models \xi$ y $\Theta_1 \models \neg\xi$. Pero, dado que $\Theta_0 \cup \{\beta\}$ es insatisfacible $\Theta_0 \models \neg\beta$. Entonces cualquier modelo de $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ es modelo de Θ_0 (pues $(\alpha \vee \beta) \in \Theta_0$). Por lo tanto, ξ sería un interpolante de la pareja (Θ_0, Θ_1), contradiciendo la hipótesis.

Para 2b) Suponga que $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta_0$, con $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$, pero tal que $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{\neg\alpha\} \notin \mathfrak{C}$ o $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{\neg\beta\} \notin \mathfrak{C}$. Supongamos lo primero. Entonces debe haber un interpolante χ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\}, \Theta_1)$, es decir $\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\} \models \chi$ y $\Theta_1 \models \neg\chi$, pero como $\Theta_0 \models \neg\alpha$ se sigue que χ es un interpolante para (Θ_0, Θ_1) contradiciendo la hipótesis.

Hemos probado que $\mathfrak{C}$ es una noción de consistencia proposicional. Dado que Γ_0 y Γ_1 son consistentes, el resultado se sigue de las siguientes implicaciones,

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ no tiene interpolante } \Rightarrow \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \in \mathfrak{C} \Rightarrow \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ tiene modelo .}$$

Pero recordemos que $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ es insatisfacible, es decir, no tiene modelo. Se sigue que (Γ_0, Γ_1) tiene un interpolante. ❐

Corolario 4.7.9 (Teorema proposicional de interpolación)**.** *Para cualesquier enunciados φ, ψ, si $\varphi \models \psi$ pero no es cierto que $\models \neg\varphi$ o $\models \psi$, existe un enunciado χ (el interpolante) para el cual ocurre lo siguiente.*

(a) $\varphi \models \chi$ *y* $\chi \models \psi$.

(b) $At(\chi) \subseteq At(\varphi) \cap At(\psi)$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de aplicar el teorema 4.7.8 a $\Gamma_0 = \{\varphi\}$ y $\Gamma_1 = \{\neg\psi\}$. ❐

«Se fructifica en la tierra». Dícese cuando un dirigente es lanzado, despedido por alguna falta, es como fruto que maduró y cae.

Propiedad de consistencia para FDE, una lógica multivaluada

Vamos a examinar una lógica que admite más valores de verdad que sólo verdadero o falso: la lógica FDE (*First degree of entailment*). En lógica proposicional clásica solemos definir las condiciones en que una proposición construida con un conectivo es verdadera según los valores de sus proposiciones constituyentes. Por ejemplo $(\alpha \wedge \beta)$ es verdadera si y solo si α es verdadera y β es verdadera.

Ninguna necesidad hay de especificar en qué condiciones es falsa pues se sobreentiende que lo que no es verdadero es falso. De manera redundante podríamos especificar cuándo un enunciado compuesto es verdadero y cuándo es falso de la manera siguiente,

1) $\neg\alpha$ es verdadero si y solo si α es falso.
2) $\neg\alpha$ es falso si y sólo si α es verdadero.
3) $(\alpha \wedge \beta)$ es verdadero si y sólo si α es verdadero y β es verdadero.
4) $(\alpha \wedge \beta)$ es falso si y sólo si α es falso o β es falso.
5) $(\alpha \vee \beta)$ es verdadero si y sólo si α es verdadero o β es verdadero.
6) $(\alpha \vee \beta)$ es falso si y sólo si α es falso y β es falso.

Quedémonos por el momento con solo esos conectivos. Las cláusulas $2), 4)$ y $6)$ dejan de ser redundantes si aceptamos más de dos valores de verdad. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un conjunto de valores de verdad $\{Falso, ..., Verdadero\}$ y que admitimos las condiciones 1 a 6; aún nos faltaría determinar, primeramente, qué valores de verdad son los que deben preservarse en un argumento para que sea correcto, es decir, que lo será si cada vez que las premisas bajo una asignación de valores a sus letras obtengan uno de esos valores selectos, la conclusión también tiene uno de ellos. La segunda cuestión que debemos especificar es cómo se comportan los conectivos con los valores

que no sean F y V. Es importante conservar las cláusulas 1) a 6) si no queremos que se nos acuse de haber cambiado el significado de los conectivos lógicos. Sin embargo, la segunda cuestión puede resolverse si los nuevos valores están dados en términos de V y F. Pensemos, por ejemplo, en la paradoja del mentiroso

Este enunciado es falso.

Si es verdadero, entonces es falso y si es falso, entonces es verdadero. Puesto que podemos demostrar ambos casos, resulta raro, pero no completamente absurdo, suponer que es verdadero y falso a la vez. Asimismo podríamos considerar que algunos enunciados carecen de valor de verdad, por ejemplo, el célebre «habrá una guerra naval mañana» que si solo pudiese ser verdadera o falsa, entonces el futuro (al menos en lo que se refiere a la ocurrencia de batallas marítimas mañana) estaría determinado.

Con ese motivo introducimos dos nuevos valores de verdad B y N. El primero corresponde a verdadero y falso a la vez y el segundo a carencia de valor de verdad. No es necesario entonces agregar cláusulas a las que ya dimos, pues pongamos por caso que debemos evaluar un enuciado de la forma $(\alpha \wedge \beta)$ cuando α tiene el valor B y β el valor verdadero. Entonces α también es verdadero (puesto que es verdadera y falsa). Por consiguiente, $(\alpha \wedge \beta)$ cumple con los requisitos para ser verdadera, pero como α es falsa (porque tiene ambos valores) entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es falsa. En conclusión, $(\alpha \wedge \beta)$ tiene el valor B. Consideremos el caso en que α es verdadera y β es N. ¿Qué valor tiene entonces $(\alpha \wedge \beta)$? No cumple las condiciones para ser verdadera ni las condiciones para ser falsa. Por lo tanto, su valor es N. Razonando de manera similar podemos justificar las siguientes tablas de verdad.

$\alpha \vee \beta$				
$\alpha \backslash \beta$	B	V	F	N
B	B	V	B	V
V	V	V	V	V
F	B	V	F	N
N	V	V	N	N

$\alpha \wedge \beta$				
$\alpha \backslash \beta$	B	V	F	N
B	B	V	F	F
V	B	V	F	N
F	F	F	F	F
N	F	N	F	N

α	$\neg\alpha$
B	B
V	F
F	V
N	N

Ahora bien, dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\alpha\}$, $\Sigma \vDash \alpha$ si y sólo si en cada asignación en que los elementos de Σ tengan el valor verdadero (es decir sean verdaderos a secas o verdaderos y falsos) entonces α también es verdadero (es decir tiene el valor V o B). Podemos decir que $\{V, B\}$ es el conjunto de valores distinguidos y un argumento es correcto si cuando todas las premisas tienen un valor distinguido también la conclusión tiene un valor distinguido. El sistema así obtenido se llama *FDE*. Es normal definir como válida una fórmula si obtiene valores V o B para cualquier asignación de valor de verdad a sus letras. Sin embargo, no hay fórmulas válidas porque cualquiera recibe el valor N si cada una de las letras que figuran en ella tiene el mismo valor. En cambio, si hay casos de consecuencia lógica como ilustraremos en seguida. Advierta que podemos introducir un condicional material con la definición

$$(\alpha \to \beta) \equiv_{def} (\neg\alpha \vee \beta)$$

sin embargo, este no es más que una sombra de lo que se esperaría de él. Observe que

$$P \to Q \qquad P \nvDash Q$$

Pues si P es B y Q es falsa, $P \to Q$ y P tienen valores distinguidos y Q no.

Introducimos un condicional más interesante. Dadas dos fórmulas α y β, que $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ sea verdadero significará que $\alpha \vDash \beta$. Por la definición $\Longrightarrow$ no puede aparecer en una fórmula más que una vez y siempre como operador principal. Si $\alpha \Longrightarrow \beta$ entonces$(\alpha \to \beta)$ será falso. Si $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ es verdadero, diremos β es una consecuencia lógica de primer grado de α. El condicional material puede siempre ser eliminado de las fórmulas, es decir, su función es abreviatoria.

Suponer que hay enunciados que carecen de valor de verdad es más común e intuitivo que el recurso al valor B (verdadero y falso). Russell supuso que una oración contiene una descripción definida que no denota o que designa algo inexistente tiene un valor de verdad. Por ejemplo «la mujer que fue a la luna es zurda» es falso, según su teoría de las descripciones definidas. En cambio, para autores como Frege o Strawson carece de valor de verdad. En contextos modales es común postular que un término singular que no denota un objeto en un mundo determinado, puede sin embargo ser sujeto de oraciones verdaderas. Así «el vicepresidente de México en 1912 murió en la decena trágica» es verdadero aunque actualmente el término «el vicepresidente de México en 1912» designe un objeto inexistente. No obstante lo cual, en otro tipo de contextos podría considerarse que oraciones de ese tipo carecen de valor de verdad en mundos donde su denotación no existe. En esos casos es posible aplicar una lógica con tres valores de verdad V, F, N.

Es fácil constatar que la estructura $\langle\{1, 0, B, N\}, \{\wedge, \vee, \neg\}\rangle$ forma un álgebra de De Morgan, es decir, es un retículo distributivo, tal que $\neg(\alpha \wedge \beta) = (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ y $\neg\neg\alpha = \alpha$ para cualesquier elementos α y β. No es un álgebra de Boole porque no son válidas las ecuaciones $(\alpha \vee \neg\alpha = 1)$ ni $(\alpha \wedge \neg\alpha = 0)$ pues, por ejemplo, $\neg B = B$ y $(B \vee \neg B) = B$.

A continuación presentamos una axiomatización de FDE, donde el condicional representa la consecuencia (es decir, no es material).

Axiomas:

1) $(\alpha \wedge \beta) \Longrightarrow \alpha \qquad (\alpha \wedge \beta) \Longrightarrow \beta.$

2) $(\alpha \Longrightarrow (\alpha \vee \beta)) \qquad (\beta \Longrightarrow (\alpha \vee \beta)).$

3) $\alpha \wedge (\beta \vee \eta)) \Longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee \eta).$

4) $(\alpha \Longrightarrow \neg\neg\alpha).$

Reglas de inferencia:

a) $\dfrac{\alpha \Longrightarrow \beta,\ (\beta \Longrightarrow \eta)}{\alpha \Longrightarrow \eta}$

b) $\dfrac{\alpha \Longrightarrow \beta \quad \alpha \Longrightarrow \eta}{\alpha \Longrightarrow (\beta \wedge \eta)}$

c) $\dfrac{\alpha \Longrightarrow \beta \quad \eta \Longrightarrow \beta}{(\alpha \vee \eta) \Longrightarrow \eta}$

d) $\dfrac{\alpha \Longrightarrow \beta}{(\neg\beta \Longrightarrow \neg\alpha).}$

Es muy fácil constatar que estas fórmulas son válidas y, un poco menos, probar que los siguientes son teoremas de este sistema axiomático. El símbolo $\equiv$ se define como $\alpha \equiv \beta$ es una abreviatura de $\alpha \vdash \beta$ y $\beta \vdash \alpha$, mientras que α, β y η representan fórmulas de L_{FDE}.

1) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha.$

2) $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta).$

3) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta).$

4) $(\alpha \wedge (\beta \vee \eta)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \eta)).$

5) $(\alpha \vee (\beta \wedge \eta)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \eta)).$

6) $(\alpha \vee (\beta \vee \eta)) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \eta)).$

7) $(\alpha \wedge (\beta \wedge \eta)) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \eta)).$

8) Si $\alpha \equiv \beta$ y ζ se obtiene de ρ por una substitución simultánea de una varias figuraciones α por β en ρ, entonces $\rho \equiv \zeta$.

A continuación presentaremos un algoritmo meramente sintáctico para determinar consecuencia lógica en FDE. Supondremos válidas las reglas de transformación simbolizadas por las anteriores equivalencias. Es decir, siempre que tengamos una fórmula de las que están a la izquierda de $\equiv$ podremos cambiarla sin remordimientos por la correspondiente a la derecha, y viceversa.

Definición 4.7.10. Un atómo es una letra proposicional o su negación.

Denotaremos con $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ a la conjunción $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ldots \wedge \alpha_n)$. Similarmente para la disyunción.

Definición 4.7.11. Si $\rho_1, \ldots \rho_n, \zeta_1, \ldots \zeta_m$ son átomos, diremos que $\bigvee_{j=1}^{m} \zeta_j$ es consecuencia directa de $\bigwedge_{i=1}^{n} \rho_i$ si para algún i, $1 \leq i \leq n$, $\rho_i \in \{\zeta_1, \ldots \zeta_m\}$.

Por ejemplo, $(R \vee P \vee S)$ es consecuencia directa de $(P \wedge Q \wedge R)$; y $(\neg P \vee \neg Q \vee R)$ es consecuencia directa de $(R \wedge S \wedge \neg P)$.

Definición 4.7.12. Sea α una fórmula en forma normal disyuntiva y β una fórmula en forma normal conjuntiva. Diremos que β es consecuencia mediata de α, si cada conyunto de β es consecuencia directa de cada disyunto de α (*).

Por ejemplo, $(A \vee \neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee A \vee U \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg S)$ es consecuencia mediata $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg S \wedge P \wedge U)$. Por supuesto que si β es consecuencia directa de α, también es consecuencia mediata de esta fórmula.

Definición 4.7.13. Si α una fórmula en forma normal disyuntiva y β una fórmula en forma normal conjuntiva, diremos de la fórmula $(\alpha \to \beta)$ que está en forma estándar.

Teorema 4.7.14. *Sea θ una fórmula en forma estándar. Entonces θ es válida si y solo si satisface (*).*

Demostración. Supongamos que θ es de la forma $\alpha_1 \vee \alpha_2 \ldots \vee \alpha_n \to \beta_1 \wedge \beta_2 \ldots \wedge \beta_m$, donde cada α es una conjunción de átomos y cada β es una disyunción de átomos. Supongamos que para cada i ($1 \leq i \leq n$) y cualquier β_j ($1 \leq j \leq m$), un conyunto de α_i (digamos α_{i_j}) es un disyunto de β_j. Entonces si α es verdadera en I, habrá un α_i verdadero en I (independiente de si además es falsa, es decir, si su valor de verdad es B): por lo tanto, también lo será α_{i_j} y, por lo tanto, cada β_j, con lo cual β será verdadero.

Ahora supongamos que no se cumple (*). Entonces hay un α_i y un β_j tal que no comparten ningún átomo (es decir, ningún conyunto de α_i es un disyunto de β_j). Entonces nada nos impide asignar valores a los átomos de tal manera que todos los conyuntos de α_i sean verdaderos y ninguno de los disyuntos de β_j sea verdadero. Con ello α será verdadero y β no lo será. Adviértase que esto no sienpre puede hacerse en lógica clásica porque, por ejemplo, β_j podría ser $(Q \vee \neg Q)$. ∎

El siguiente resultado es fácil de verificar.

Teorema 4.7.15. *Si η es equivalente a una fórmula α en forma normal disyuntiva, ρ es equivalente a una una fórmula β en forma normal conjuntiva, y β es consecuencia mediata de α, entonces diremos que ρ es consecuencia de η.*

Para demostrar que este método es correcto y completo solo faltaría probar que las transformaciones que permiten poner una fórmula en forma normal conjuntiva o en forma normal disyuntiva son válidas. En resumidas cuentas si α_{ij} y β_{kl} son átomos, entonces,

$$\models_{FDE} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \rightarrow \bigwedge_{k=1}^{r} \bigvee_{l=1}^{s_k} \beta_{kl}$$

si solo si para cualesquier i y k existe j tal que $\alpha_{ij} \in \{\beta_{k_1}, \ldots \beta_{k_{sk}}\}$. Es fácil comprobar que si la condición anterior se cumple para una fórmula, entonces esta es válida para la lógica proposicional clásica. Sin embargo, hay fórmulas en forma estándar que son válidas clásicamente, pero no en FDE. Por ejemplo:

$$\not\models_{FDE} ((P \wedge \neg P) \rightarrow Q) \qquad \not\models_{FDE} (P \rightarrow (Q \vee \neg Q)).$$

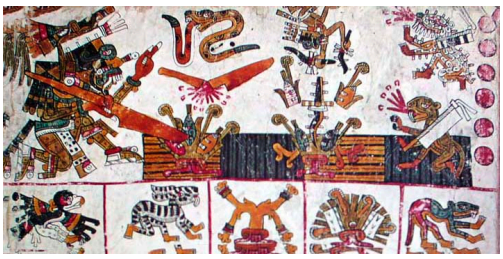
Una de las motivaciones para rechazar estas implicaciones es que en ellas puede no haber ninguna relación entre el antecedente y el consecuente. Si pensamos en que la consecuencia lógica es una preservación de la verdad (en virtud de la forma), entonces es claro que de una contradicción es consecuencia cualquier proposición, por vacuidad. Sin embargo, si pensamos en términos de inferencia, es claro que de una contradicción no puede inferirse mucho. Si alguien considera el conjunto de Russell y observa la contradicción a que da lugar, ¿es legítimo que de allí infiera que hay paraísos fiscales? Parece que no. Así es que hay varias nociones intuitivas de consecuencia y ello ha dado lugar a lógicas divergentes. Es fácil constatar que el algoritmo anterior es un procedimiento completo para determinar cualquier relación de consecuencia entre dos fórmulas de FDE.

Ahora veremos cómo ampliar la noción de $\mathfrak{C}$-consistencia para demostrar que cualquier conjunto satisfacible con la semántica de 4 valores de verdad que acabamos de ver tiene modelo.

Definición 4.7.16. Una conjunto señalado es un conjunto de fórmulas cada una de las cuales es antecedida por un signo $+$ o $-$.

Intuitivamente $+\alpha$ significa que α es verdadero; y $-\alpha$ que α, no lo es. Que α es falso se representa por $+\neg\alpha$. Ahora extendemos la idea de que cada fórmula tiene componentes que deben tener un valor verdad (o ninguno) para que la fórmula sea verdadera o para que no lo sea. Los componentes de una fórmula señalada serán como antes, excepto que conservarán el signo de la fórmula original y, muy importante, las fórmulas que eran conjuntivas cuando sean afectadas de un signo $-$ serán ahora diyuntivas; y las

disyuntivas con signo $-$ serán conjuntivas. Por ejemplo, $-(P \vee Q)$ representa el que la fórmula no es verdadera. Por lo tanto, ni P ni Q puede ser verdaderas, lo que es un conjunción con signos negativos. Con eso en mente definimos una propiedad de $\mathfrak{C}$-consistencia para FDE.



Definición 4.7.17. Una noción proposicional de consistencia (para la lógica FDE) es un conjunto $\mathfrak{C}$ de conjuntos de enunciados señalados tales que:

0) si $\Theta \subset \Theta' \in \mathfrak{C}$ entonces $\Theta \in \mathfrak{C}$.

- Para cualquier enunciado $\Theta \in \mathfrak{C}$ y cualesquiera enunciados α y β,

1) si $+\alpha \in \Theta$ entonces $-\alpha \notin \mathfrak{C}$.

2b) Si $+\neg\neg\alpha \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{+\alpha\} \in \mathfrak{C}$.

2b) Si $-\neg\neg\alpha \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{-\alpha\} \in \mathfrak{C}$.

3a) Si $+(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{+\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{+\beta\} \in \mathfrak{C}$.

3b) Si $-(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{-\alpha, -\beta\} \in \mathfrak{C}$.

4a) Si $+(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{+\alpha, +\beta\} \in \mathfrak{C}$.

4a) Si $-(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{-\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{-\beta\} \in \mathfrak{C}$.

5a) Si $+\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{+\neg\alpha, +\neg\beta\} \in \mathfrak{C}$.

5b) Si $+\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{+\neg\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{+\neg\beta)\} \in \mathfrak{C}$.

6a) Si $-\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{-\neg\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{-\neg\beta\} \in \mathfrak{C}$.

6b) Si $-\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{-\neg\alpha, -\neg\beta\} \in \mathfrak{C}$.

De cualquier elemento de $\mathfrak{C}$ diremos que es un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente.

Definición 4.7.18. Un conjunto Θ de enunciados señalados es débilmente completo si,

1a) si $+\alpha \in \Theta$ entonces $-\alpha \notin \Theta$.

2b) Si $+\neg\neg\alpha \in \Theta$ entonces $+\alpha \in \Theta$.

2b) Si $-\neg\neg\alpha \in \Theta$ entonces $-\alpha \in \Theta$.

3a Si $+(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces o $+\alpha \in \Theta$ o $+\beta \in \Theta$.

3b Si $-(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $-\alpha \in \Theta$ y $-\beta \in \Theta$.

4a Si $+(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces $+\alpha \in \Theta$ y $+\beta \in \Theta$.

4b Si $-(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces o $-\alpha \in \Theta$ o $-\beta \in \Theta$.

5a)) Si $+\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $+\neg\alpha \in \Theta$ y $+\neg\beta \in \Theta$.

5b)) Si $+\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces $+\neg\alpha \in \Theta$ o $+\neg\beta \in \Theta$.

6a) Si $-\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{-\neg\alpha\} \in \Theta$ o $\Theta \cup \{-\neg\beta\} \in \Theta$.

6b) Si $-\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{-\neg\alpha, -\neg\beta\} \in \Theta$.

 **Teorema 4.7.19.** *Para cualquier noción proposicional de $\mathfrak{C}$-consistencia, cada conjunto $\mathfrak{C}$-consistente de enunciados señalados puede ser extendido a un conjunto débilmente completo.*

Demostración. Sea Δ_0 un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente y $\{\phi_n\}$ una enumeración de todos los enunciados señalados del lenguaje. Definimos $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\phi_n\}$ si este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. En caso contrario, sea $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. Sea

$$\Delta = \bigcup \Delta_n.$$

Cada Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente por construcción. Lo que sigue de la prueba es casi idéntico a la del teorema correspondiente para el cálculo de enunciados, solo que ahora tomamos conjuntos de enunciados señalados. Solo haremos algunos casos de muestra.

1a) Si $+\alpha \in \Delta$ y $-\alpha \in \Delta$, entonces, para algún n, $\alpha \in \Delta_n$ y $-\alpha \in \Delta_n$, pero eso no es posible pues cada Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente.

2b) Si $-\neg\neg\alpha \in \Delta$, entonces para algún n, $-\neg\neg\alpha \in \Delta_n$. Supongamos que $-\alpha$ es ϕ_k. Si $n \leq k$, entonces $\Delta_k \cup \{-\alpha\}$ es consistente porque, si no lo fuera, Δ_k (que contiene a $-\neg\neg\alpha$, pues $\Delta_n \subseteq \Delta_k$) ya sería inconsistente. Por lo tanto $-\alpha \in \Delta_{k+1}$.

Supongamos ahora que $k \leq n$. Recordemos que $-\neg\neg\alpha \in \Delta_n$. Es decir que $\Delta_n \cup \{-\neg\neg\alpha\}$ es consistente, pero entonces $\Delta_k \cup \{-\neg\neg\alpha\}$ es consistente y, por lo tanto, también lo es $\Delta_k \cup \{-\alpha\}$ y así $-\alpha \in \Delta_{k+1}$.

3b) Sea $-(\alpha \vee \beta) \in \Delta$. Existe n tal que $-(\alpha \vee \beta) \in \Delta_n$, sea k tal que $-\alpha$ es ϕ_k. Si $n \leq k$, entonces $\Delta_k \cup \{-\alpha\}$ es consistente porque, si no lo fuera, Δ_k (que contiene a $-(\alpha \vee \beta)$, pues $\Delta_n \subseteq \Delta_k$) ya sería inconsistente. Por lo tanto $-\alpha \in \Delta_{k+1} \subset \Delta$.

Supongamos ahora que $k \leq n$. Recordemos que $-(\alpha \vee \beta) \in \Delta_n$. Es decir que $\Delta_n \cup \{-(\alpha \vee \beta)\}$ es consistente, pero entonces $\Delta_k \cup \{-(\alpha \vee \beta)\}$ es consistente y, por lo tanto, también lo es $\Delta_k \cup \{-\alpha\}$ y así $-\alpha \in \Delta_{k+1} \subset \Delta$. El caso de $-\beta$ es similar. ◻

Teorema 4.7.20. *Cada conjunto de enunciados señalados débilmente completo tiene modelo.*

Demostración. Sea Δ un conjunto de enunciados señalados débilmente completo y V una asignación tal que, para cualquier letra proposicional ρ

$$V(\rho) = 1 \text{ si y solo si } +\rho \in \Delta.$$

$$V(\rho) = 0 \text{ si y solo si } +\neg\rho \in \Delta.$$

Desde luego una letra proposicional ρ puede cumplir ambas condiciones, en cuyo caso tendrá el valor B.
Vamos a probar por inducción en la complejidad de los enunciados que,

a) Si $+\phi \in \Delta$ entonces $V(\phi) = 1$.

b) Si $+\neg\phi \in \Delta$ entonces $V(\phi) = 0$.

c) Si $-\phi \in \Delta$ entonces $V(\phi) \neq 1$.

d) Si $-\neg\phi \in \Delta$ entonces $V(\phi) \neq 0$.

Puesto que $+\phi$ $-\phi$ no pueden ambos pertenecer a Δ y lo mismo sucede con $+\neg\phi$ y $-\neg\phi$, la asignación está bien definida (podríamos decir que en los casos negativos la fórmula tiene el valor N).

1) Sea ρ una letra proposicional. a) y b) se cumplen por la definición de V.
Si $-\rho \in \Delta$ entonces $+\rho \notin \Delta$. Por la definición de V, $V(\rho) \neq 1$.
Si $-\neg\rho \in \Delta$ entonces $+\neg\rho \notin \Delta$. Por la definición de V, $V(\rho) \neq 0$.

2) Si ϕ es $\neg\psi$ y a), b), c) y d) se cumplen para ψ entonces,
$+\phi \in \Delta \Rightarrow +\neg\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) = 0 \Rightarrow V(\phi) = 1$
$+\neg\phi \in \Delta \Rightarrow +\neg\neg\psi \in \Delta \Rightarrow$ (por ser Δ débilmente completo) $+\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) = 1 \Rightarrow V(\phi) = 0$
$-\phi \in \Delta \Rightarrow -\neg\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) \neq 0 \Rightarrow V(\phi) \neq 1$
$-\neg\phi \in \Delta \Rightarrow -\neg\neg\psi \in \Delta \Rightarrow$ (por ser Δ débilmente completo) $-\psi \in \Delta \Rightarrow V(\psi) \neq 1 \Rightarrow V(\phi) \neq 0$.

3) Si ϕ es $(\alpha \vee \beta)$,
$+(\alpha \vee \beta) \in \Delta \Rightarrow +\alpha \in \Delta$ o $+\beta \in \Delta$. Supongamos que $+\beta \in \Delta$. Entonces $V(\beta) = 1$ y $V(\alpha \vee \beta) = 1$
$+\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta \Rightarrow +\neg\alpha \in \Delta$ y $+\neg\beta \in \Delta$. Entonces $V(\alpha) = V(\beta) = 0$ y $V(\alpha \vee \beta) = 0$
$-(\alpha \vee \beta) \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$ y $-\beta \in \Delta$. Entonces $V(\alpha) \neq 1$ y $V(\beta) \neq 1$. Por lo tanto, $V(\alpha \vee \beta) \neq 1$
$-\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta \Rightarrow -\neg\alpha \in \Delta$ o $-\neg\beta \in \Delta$. Entonces $V(\alpha) \neq 0$ o $V(\beta) \neq 0$ y $V(\alpha \vee \beta) \neq 0$,

Los restantes casos son análogos y son dejados al lector. □

El caso de primer orden

Ahora veremos cómo extender las propiedades de consistencia al cálculo de predicados. Supongamos dado un sistema de prueba, sea de deducción natural o axiomático, como los tratados en esta obra. Dado un conjunto Γ consistente (es decir, tal que $\Gamma \nvdash \bot$), deseamos encontrar un modelo suyo. En el caso del cálculo de enunciados consideramos conjuntos de subfórmulas del conjunto dado o de sus negaciones, tales que la verdad de estas garantizara la verdad de las fórmulas del conjunto original. La idea fue desmontar las fórmulas en pasos sucesivos de forma tal que se conservara la consistencia. Al final obtuvimos un conjunto débilmente completo y bastó con dar una valuación que hiciera verdaderos a todas literales para obtener el modelo buscado. Si consideramos una valuación $\mathcal{A}$ como un conjunto de literales (aquellas que son verdaderas respecto a $\mathcal{A}$), entonces podemos decir que el modelo lo obtuvimos de un subcojunto del conjunto débilmente completo. Ahora haremos lo mismo en el cálculo de predicados. Al desmontar sabiamente un conjunto consistente Γ llegaremos a fórmulas atómicas del tipo $H(c)$, $\neg G(c,d)$, $H(f(c))$ etc. Debemos dar una interpretación que las haga verdaderas. Por ejemplo, las interpretaciones de c y $f(c)$ deben ser tales que caigan bajo el predicado que interpreta a H. Lo más sencillo es tomar los términos cerrados del lenguaje para constituir el dominio de interpretación. La interpretación asignará a c y a $f(c)$ respectivamente c y $f(c)$, ahora considerados como elementos del dominio. Es decir, la interpretación asignará a letra funcional f una función que al elemento c del dominio le otorgue como valor el términno $f(c)$. Después debemos determinar las interpretaciones, por ejemplo, de F y G, de tal manera que esos elementos atómicos resulten verdaderos. Es decir, construiremos el modelo a partir del lenguaje mismo, una vez que tengamos el cojunto débilmente completo Γ^*. Una dificultad es que el lenguaje no contuviera suficientes constantes (como veremos solo se requiere una cantidad numerable). La posibilidad que seguiremos es considerar un conjunto E numerable de constantes nuevas y asegurarnos de que cada término cerrado del lenguaje original tenga su «representante» en E. Otra dificultad resulta por tener entre los símbolos lógicos el predicado de identidad, pues si en el conjunto original tenemos el enunciado $c = d$ las constantes c y d que forman parte del dominio no son iguales. Para ello debemos garantizar que, por ejemplo, si las fórmulas $c = d$ y $G(c)$ aparecen en Γ^* también figuren $d = c$ y $G(d)$, así c y d pueden

ser identificadas. Obviamente si $c = d$, $G(c)$ y $\neg G(d)$ (o $c = d$ y $d \neq d$) estuvieran en un conjunto, este no sería consistente. Por último, requeriremos que por cada fórmula existencial $\exists x H(x)$ en Γ^*, haya un elemento e de E tal que $H(e) \in E^*$. Nada nos asegura que esto ocurra pues el conjunto $\{\exists x H(x)\} \cup \{\neg H(e) | e \in E\}$ es satisfacible (todos sus subconjuntos finitos lo son), pero no tiene modelo con dominio E. Como antes, denotaremos por $\mathcal{L}(E)$ al lenguaje que resulta del leguaje $\mathcal{L}$ cuando se le agregan las constantes de E, siendo E ajeno al vocabulario de $\mathcal{L}$.

Definición 4.7.21. Para cualquier conjunto E de constantes un E-término primitivo es o bien un símbolo constante (perteneciente a E o al conjunto de constantes del lenguaje original) o un término de la forma $fe_1, e_2 \ldots e_n$ con cada $e_i \in E$

Por ejemplo, si $\mathcal{L}$ contiene solo dos términos funcionales f y g de valencia uno y dos respectivamente, y un solo símbolo de constante c, y $E = \{e_1, e_2\}$, entonces los E-términos primitivos son: c, e_1, e_2, fe_1, fe_2, ge_1e_1, ge_1e_2, ge_2e_1 y ge_2e_2... El principal rasgo de estos términos es que contienen a lo más un símbolo (constante o de función) que no pertenece a E. En el resto de esta sección supondremos que E es un conjunto numerable.

Definición 4.7.22. Para cualquier lenguaje $\mathcal{L}$, una noción de $\mathcal{L}$-consistencia es un par $(\mathfrak{C}, E)$ con $\mathfrak{C}$ un conjunto de conjuntos de $\mathcal{L}(E)$-enunciados y E un conjunto de constantes y tales que si $\Theta \in \mathfrak{C}$,

(0) Si $D \subset \Theta$ entonces $D \in \mathfrak{C}$

(1) si t es un término E-primitivo y ψ una $\mathcal{L}(E)$-fórmula con a lo más la variable x libre, entonces,

a) Para cualesquiera $c, d \in E$, si $(c = d) \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{d = c\} \in \mathfrak{C}$

b) Para cualquier $c \in E$ si $\{t = c, \psi(t)\} \subset \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\psi(c)\} \in \mathfrak{C}$

c) Para algún $c \in E$, $\Theta \cup \{t = c\} \in \mathfrak{C}$.

(2) Para cualquier $\mathcal{L}(E)$-enunciado γ,

a) si $\neg\gamma \in \Theta$ entonces $\gamma \notin \Theta$

b) si $\neg\neg\gamma \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\gamma\} \in \mathfrak{C}$.

(3) Para cualesquiera α y β $\mathcal{L}(E)$-enunciados,

a) si $(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces o $\Theta \cup \{\alpha\} \in \mathfrak{C}$ o bien $\Theta \cup \{\beta\} \in \mathfrak{C}$

b) si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta$ entonces tanto $\Theta \cup \{\neg\alpha\} \in \mathfrak{C}$ como $\Theta \cup \{\neg\beta\} \in \mathfrak{C}$.

(4) Para cualquier $\mathcal{L}(E)$-fórmula ψ con a lo sumo x libre,

a) si $\exists x\psi \in \Theta$ entonces para alguna $c \in E$, $\Theta \cup \{\psi(c)\} \in \mathfrak{C}$

b) si $\neg\exists x\psi \in \Theta$ entonces para toda $c \in E$, $\Theta \cup \{\neg\psi(c)\} \in \mathfrak{C}$.

Los miembros de $\mathfrak{C}$ son llamados $\mathfrak{C}$-consistentes.

Ejemplo 4.7.23. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y E un conjunto infinito de símbolos de constante de $\mathcal{L}$, y $\mathfrak{C}$ = el conjunto de todas las Θ tales que Θ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ con universo $A = \{e^{\mathfrak{A}} : e \in E\}$. Veremos que $(\mathfrak{C}, E)$ es una noción de consistencia.

0) Si $\Theta \in \mathfrak{C}$, Θ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ con universo $|\mathfrak{A}| = \{e^{\mathfrak{A}} : e \in E\}$. Si $\Sigma \subset \Theta$, por lo que $\mathfrak{A}$ es modelo de Σ

1a) Sean $c, d \in E$ tales $(c = d) \in \Theta \in \mathfrak{C}$, de modo que existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Theta$. Entonces, $\mathfrak{A} \models c = d$. Se sigue que $\mathfrak{A} \models \Theta \cup \{(d = c)\}$.

1b) es trivial.

1c) Si $\mathfrak{A}$ es un modelo de Θ cumpliendo la hipótesis del teorema y t es un término E-primitivo, entonces t es una constante de $\mathcal{L}$ (digamos d) que no pertenece a E, o es un elemento de E, o es de la forma $fe_1 \dots e_n$ con cada $e_i \in E$. En el primer caso, como la interpretación de las constantes de E es el dominio de $\mathfrak{A}$, sea $e \in E$ tal que $d^{\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{A}}$. Por tanto, $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\Theta \cup \{(d = e)\}$. El segundo caso es obvio. En el tercer caso, debemos probar que $\Theta \cup \{f(e_1 \dots e_n) = e\} \in \mathfrak{C}$ para algún $e \in E$. Dado que $|\mathfrak{A}| = \{e^{\mathfrak{A}} : e \in E\}$, así que $\mathfrak{A}$ es modelo de $\Theta \cup \{(t = e)\}$.

Los casos 2a), 2b), 3a) y 3b) son obvios.

4a) Si $\exists x\psi \in \Theta$ y $\mathfrak{A} \models \Theta$, dado que $|\mathfrak{A}| = \{e^{\mathfrak{A}} : e \in E\}$, debe existir $e \in E$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(e)$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \models \Theta \cup \{\psi(e)\}$. Ergo, $\Theta \cup \{\psi(e)\} \in \mathfrak{C}$.

4b) Es análogo.

Ejemplo 4.7.24. Sea $\mathfrak{C}$ = el conjunto de todos los Θ que son $\vdash$-consistentes y tales que hay una infinidad de elementos de E que no figuran en ningún miembro de Θ. Es fácil probar que $(\mathfrak{C}, E)$ es una noción de consistencia.

Definición 4.7.25. Para cualquier lenguaje $\mathcal{L}$ y todo conjunto Δ de $\mathcal{L}$-enunciados, Δ es débilmente completo con respecto al conjunto de constantes E si y sólo si ocurre lo siguiente.

(1) si t es un término E-primitivo y ψ una $\mathcal{L}$-fórmula con a lo más la variable x libre, se cumple lo que a continuación se detalla.

a) Para cualesquiera $c, d \in E$, si $(c = d) \in \Delta$ entonces $(d = c) \in \Delta$.

b) Para cualquier $c \in E$ si $\{t = c, \psi(t)\} \subset \Delta$ entonces $\psi(c) \in \Delta$.

c) Para algún $c \in E$, $t = c \in \Delta$.

(2) Para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado γ,

a) si $\neg\gamma \in \Delta$ entonces $\gamma \notin \Delta$.

b) si $\neg\neg\gamma \in \Delta$ entonces $\gamma \in \Delta$.

(3) Para cualesquier $\mathcal{L}$-enunciados α y β ocurre que,

a) si $(\alpha \vee \beta) \in \Delta$ entonces o $\alpha \in \Delta$ o bien $\beta \in \Delta$.

b) si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta$ entonces tanto $\neg\alpha \in \Delta$ como $\neg\beta \in \Delta$.

(4) Para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula ψ con a lo más x libre,

a) si $\exists x\psi \in \Delta$ entonces para alguna $c \in E$, $\psi(c) \in \Delta$.

b) si $\neg\exists x\psi \in \Delta$ entonces para toda $c \in E$, $\neg\psi(c) \in \Delta$.

Teorema 4.7.26. *Para cualquier lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y cada noción de $\mathcal{L}$-consistencia ($\mathfrak{C}$,E), todo conjunto*[1] *$\mathfrak{C}$-consistente puede ser extendido a un conjunto Δ debilmente completo con respecto a E.*

Demostración. Sean ($\mathfrak{C}$,E) una noción de consistencia, Θ un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente y

1) $(\theta_n : n \in \omega)$ una enumeración de los enunciados de $\mathcal{L}(E)$,

2) $(t_n : n \in \omega)$ una enumeración de los términos E-primitivos de $\mathcal{L}$ que no sean constantes,

3) $(e_n : n \in \omega)$ una enumeración de las constantes de E.

Referencia al primer $e \in E$ con alguna propiedad significa primero en esta enumeración. Sea $\Delta_0 = \Theta$, y para todo n,

$$\Delta_n^0 = \Delta_n \cup \{\theta_n\},$$

si $\Delta_n \cup \{\theta_n\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente. En otro caso, haga $\Delta_n^0 = \Delta_n$. Ponemos

$$\Delta_n^1 = \Delta_n^0 \cup \{t_n = e\},$$

para la primera $e \in E$ para la cual este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. Tal e tiene que existir por definición de $\mathfrak{C}$-consistencia. Hacemos

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n^1 \cup \{\chi(e')\},$$

[1] Recuerde que estamos suponiendo que E es un conjunto numerable.

si $\theta_n \in \Delta_n^1$ y θ_n es $\exists x\chi$ para la primera e' tal que este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. Si no, ponga $\Delta_{n+1} = \Delta_n^1$. Obviamente cada uno de los conjuntos Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente. Sea

$$\Delta = \bigcup\{\Delta_n : n \in \omega\}$$

y probemos que Δ es débilmente completo.

1a) Supongamos que $(e = e') \in \Delta$ y, por lo tanto que, para algún n, $(e = e') \in \Delta_n$, y que $(e' = e)$ es θ_p. Si $p < n$, entonces ya que $\Delta_n \cup \{(e = e')\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, así lo es su subconjunto $\Delta_p \cup \{(e = e')\}$ y, por lo tanto también $\Delta_p \cup \{(e' = e)\}$. En consecuencia, $(e' = e) \in \Delta_p^0 \subset \Delta$. Por otro lado, si $n < p$ entonces $(e = e') \in \Delta_n \subset \Delta_p$, de modo que $\{(e' = e)\} \cup \Delta_p$ es $\mathfrak{C}$-consistente. Se sigue que $(e' = e) \in \Delta_p^0$.

1b) Es similar. Si para un E-término t, una constante $e \in E$ y una fórmula $\phi(x)$ tenemos que $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \in \Delta$ entonces, para algún n, $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \in \Delta_n$. Si $\phi(e)$ es el enunciado θ_p y $p < n$, entonces $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \cup \Delta_p$ es $\mathfrak{C}$-consistente (pues es un subconjunto de Δ_n). Por tanto, $\Delta_p \cup \{\theta_p\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y, por ende, $\phi(e)$ es elemento de Δ. Por otro lado, si $n < p$, entonces $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \subset \Delta_p$ y, en consecuencia, $\Delta_p \cup \{\phi(e)\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y $\phi(e) \in \Delta$.

1c) Por construcción, sabemos que si t es un término E-primitivo, existe $e \in E$ tal que $(t = e) \in \Delta$

2a) Si $\alpha \in \Delta$ y $\neg\alpha \in \Delta$, ocurre que para algún n, $\alpha \in \Delta_n$ y $\neg\alpha \in \Delta_n$, lo que no es posible pues cada Δ_n es $\mathfrak{C}$-consistente.

2b) Si $\neg\neg\alpha \in \Delta$, ocurre que para algún n, $\neg\neg\alpha \in \Delta_n$. Supongamos que α es ϕ_p y que $p \leq n$. Sabemos que $\Delta_n \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, en cuyo caso su subconjunto $\Delta_p \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, de suerte que también lo es $\Delta_p \cup \{\alpha\}$ y así $\alpha \in \Delta_{p+1}$. Por otro lado, si $n \leq p$, así que $\neg\neg\alpha \in \Delta_n \subset \Delta_p$. Es decir, $\Delta_p \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y, por ende, también lo es $\Delta_p \cup \{\alpha\}$. Por lo tanto, $\alpha \in \Delta_{p+1}$.

Los incisos 3a) y 3b) se prueban de manera similar.

4a) Para cada fórmula $\exists x\phi \in \Delta$, hay un primer n tal que $\exists x\phi \in \Delta_n$. Por construcción, existe $e' \in E$ tal que, $\phi(x/e') \in \Delta_{n+1}$.

4b) Supongamos que $\neg\exists x\phi \in \Delta$, sea $e \in E$ y $\neg\phi(e)$ es el enunciado θ_p. Debe existir n tal que $\neg\exists x\phi \in \Delta_n$, de modo que $\Delta_n \cup \{\neg\phi(e)\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente. Supongamos que $p < n$, entonces $\Delta_p \cup \{\neg\phi(e)\} \subset \Delta_n \cup \{\neg\phi(e)\}$. Por consiguiente, $\Delta_p \cup \{\neg\phi(e)\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y $\neg\phi(e) \in \Delta_p$. Si $n < p$, dado que $\neg\exists x\phi \in \Delta_n \subset \Delta_p$, y que $\Delta_p \cup \{\neg\exists x\phi\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, también lo es $\Delta_p \cup \{\neg\phi(e)\}$ por definición de $\mathfrak{C}$ consistencia. De ahí que, $\neg\phi(e) \in \Delta_{p+1}$.

Teorema 4.7.27. *Para cualesquier lenguaje $\mathcal{L}$, conjunto E de constantes y conjunto de $\mathcal{L}(E)$-enunciados Δ, el que Δ sea débilmente completo con respecto a E tiene como consecuencia que Δ tenga modelo $\mathfrak{A}$ con universo $A = \{e^{\mathfrak{A}} : e \in E\}$. En particular, si $\mathcal{L}$ es numerable, entonces así es $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Vamos a definir el modelo. Para cualesquiera $e, e' \in E$ sea

$$e \sim e' \iff (e = e') \in \Delta.$$

Por las propiedades 1a) y 1b) de la definición de conjunto débilmente completo, $\sim$ es una relación de equivalencia, lo que el lector debe constatar.

Sea $\hat{e} = \{c \in E | c \sim e\}$ y $|\mathfrak{A}| = \{\hat{e} | e \in E\}$. Observe que usamos aquí solo miembros de E y no todos los símbolos constantes de $\mathcal{L}(E)$. El resto de la definición de $\mathfrak{A}$ es la siguiente.

1) Para cualquier símbolo de relación R de $\mathcal{L}$.

$$R^{\mathfrak{A}} = \{(\hat{e}_0, \ldots, \hat{e}_n) | Re_0, \ldots, e_n \in \Delta\}.$$

2) Para cada símbolo de función f de $\mathcal{L}$, $f^{\mathfrak{A}}(\hat{e}_0, \ldots, \hat{e}_m) = \hat{e}$ donde $e \in E$ es tal que $f(e_0, \ldots, e_m) = e \in \Delta$.

3) Para cada constante c de $\mathcal{L}$, $c^{\mathfrak{A}} = \hat{e}$, donde $e \in E$ es tal que $c = e \in \Delta$.

La existencia de tales constantes $e \in E$ para los incisos 2) y 3) está garantizada por la condición 1c) de la definición de conjunto débilmente completo. Es fácil verificar que $\mathfrak{A}$ está bien definido. Por ejemplo, si para todo $i < m$ (siendo m la valencia de la letra funcional f), $e_i = e'_i \in \Delta$ y $e, e' \in E$ son tales que $fe_0, \ldots e_m = e \in \Delta$ y $fe'_0, \ldots e'_m = e' \in \Delta$, entonces, aplicando 1a) y 1b), concluimos que $e = e' \in \Delta$. Note que, en particular, para $e \in E$, $e^{\mathfrak{A}} = \hat{e}$. Para mostrar que $\mathfrak{A}$ es un modelo de Δ, mostraremos que para cualquier enunciado ϕ de $\mathcal{L}$,

$$\phi \in \Delta \Longrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \phi$$

y

$$\neg\phi \in \Delta \Longrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\phi.$$

Para enunciados atómicos, lo probaremos por inducción en el número n de apariciones de símbolos funcionales en ϕ. Si $n = 0$ entonces ϕ es de la forma $Rc_0, \ldots, c_n$ y suponga-mos que $Rc_0, \ldots, c_n \in \Delta$. Para cada c_i elija $e_i \in E$ tal que $c_i = e_i \in \Delta$ (alguna de tales constantes habrá, por 1c)). Por 1b) $Re_0, \ldots e_n \in \Delta$. Es decir, $\models_{\mathfrak{A}} Re_0, \ldots e_n$. Pero también $c_i^{\mathfrak{A}} = \hat{e}_i = e_i^{\mathfrak{A}}$ y, por lo tanto, $\models_{\mathfrak{A}} c_i = e_i$, por lo que $\models_{\mathfrak{A}} Rc_0 \ldots c_m$, como se requería. Una prueba similar puede darse para $n = 0$ en el caso negativo.

Si un enunciado atómico ϕ tiene $n + 1$ símbolos de función, lo escribimos como $\gamma_x(fc_0 \ldots c_k)$ para un enunciado atómico γ con n símbolos de función. Supongamos que $\gamma(x/fc_0 \ldots c_k) \in \Delta$. Si elejimos $e_i \in E$ tal que $(c_i = e_i) \in \Delta$, entonces por 1b)

$\gamma(x/fe_0 \dots e_k) \in \Delta$. Dado que $f(e_0 \dots e_k)$ es un término E-primitivo, por 1c) existe $e \in E$ tal que $f(e_0 \dots e_k) = e \in \Delta$ y así, por 1b), $\gamma_x(e) \in \Delta$. Por hipótesis de inducción, $\models_{\mathfrak{A}} \gamma(x/e)$ y $\models_{\mathfrak{A}} \phi$.

Ahora procedemos por inducción en la longitud de la fórmula, si ϕ es $\neg\psi$, por hipótesis de inducción:

$$\phi \in \Delta \Rightarrow (\neg\psi) \in \Delta \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\psi \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \phi$$

y

$$\neg\phi \in \Delta \Rightarrow (\neg\neg\psi) \in \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \psi \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\phi.$$

Sea ϕ es $\alpha \vee \beta$. Si $\phi \in \Delta$, es decir, $\alpha \vee \beta \in \Delta$, entonces $\alpha \in \Delta$ o $\beta \in \Delta$. En el primer caso, $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$, en el segundo, $\models_{\mathfrak{A}} \beta$. En cualquier evento, $\models_{\mathfrak{A}} \phi$.

Si $\neg\phi \in \Delta$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Delta$, lo cual implica (por ser Δ débilmente completo) que $\neg\alpha \in \Delta$ y $\neg\beta \in \Delta$. En consecuencia, $\models_{\mathfrak{A}} \neg\alpha$ y $\models_{\mathfrak{A}} \neg\beta$ y, por lo tanto, $\models_{\mathfrak{A}} \neg\phi$.

Finalmente supongamos que ϕ es $\exists x\psi$, de 4a) se desprende

$$\phi \in \Delta \Rightarrow \text{ existe una constante e en E tal que } \psi_x(e) \in \Delta$$

$$\phi \in \Delta \Rightarrow \text{ existe una constante e en E tal que } \models_{\mathfrak{A}} \psi_x(e) \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \phi$$

y por 4b)

$$\neg\phi \in \Delta \Rightarrow \text{ para toda constante e en E, } \neg\psi_x(e) \in \Delta$$

$$\neg\phi \in \Delta \Rightarrow \text{ para toda constante e en E, } \models_{\mathfrak{A}} \neg\psi_x(e) \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\phi,$$

donde usamos que $A = \{e^{\mathfrak{A}} | e \in E\}$. □

Combinando los dos resultados obtenemos lo siguiente.

Teorema 4.7.28 (Teorema de existencia del modelo numerable)**.** *Para cualquier lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y cualquier noción (C, E) de $\mathcal{L}$-consistencia, cada conjunto C-consistente tiene un modelo numerable $\mathfrak{A}$ con universo $A = \{e^{\mathfrak{A}} | e \in E\}$.*

□

Como lo hicimos en el caso proposicional, mediante una noción de consistencia probaremos teoremas de interpolación.

Definición 4.7.29. Dados dos conjuntos de enunciados Γ_0 y Γ_1, tales que el lenguaje de Γ_i es $\mathcal{L}_i$, llamamos interpolante de Robinson de Γ_0 y Γ_1 a un enunciado ξ tal que pertenece a $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1$, $\Gamma_0 \models \xi$ y $\Gamma_0 \models \neg\xi$.

Teorema 4.7.30 (Teorema de interpolación numerable de Robinson)**.** *Para cualesquier lenguajes $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ con una parte común $\mathcal{L}$ y cualesquier conjuntos satisfacibles Γ_0 y Γ_1 de enunciados de $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ respectivamente, si $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ es insatisfacible, entonces existe un interpolante de Robinson para Γ_0 y Γ_1.*

Demostración. Sea E un conjunto numerable de constantes no contenida en ninguno de los lenguajes mencionados y sean $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_0(E)$, $\mathcal{L}_1(E)$ los respectivos lenguajes con dichas constantes agregadas. Claramente $\mathcal{L}(E)$ es la parte común de $\mathcal{L}_0(E)$ y $\mathcal{L}_1(E)$. Denotemos con $\mathfrak{C}$ al conjunto de todos los conjuntos Θ tales que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ y

1) $\Theta_0 \in \mathcal{L}_0$ y $\Theta_1 \in \mathcal{L}_1$,

2) Θ_0 y Θ_1 son ambos *satisfacibles*,

3) hay una infinidad de elementos de E que no figuran en ningún miembro de $\Theta_0 \cup \Theta_1$,

4) no hay interpolante de Robinson para Θ_0 y Θ_1.

Denotemos con $\mathcal{L}^*$ la unión de $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$. La parte principal de la prueba será establecer que $\mathfrak{C}$ es una $\mathcal{L}^*(E)$-noción de consistencia. Consideremos las cláusulas de la definición. Suponga que $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$.

1a) es inmediato pues si $(e = e') \in \Theta_0$, entonces $\Theta_0 \cup (e' = e)$ es lógicamente equivalente a Θ_0, y así cualquier interpolante para $\Theta_0 \cup (e' = e)$ y Θ_1 lo sería también de Θ_0 y Θ_1.

1b) Si $\{(t = e), \phi(x/t)\}$ es subconjunto de alguno de los dos Θ_i, un argumento similar es válido. Suponga entonces que $(t = e) \in \Theta_0$ y $\phi(x/t) \in \Theta_1$. Queremos demostrar que $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{\phi_x(e)\}$ es elemento de $\mathfrak{C}$. Si x no está libre en ϕ, el resultado es trivial (pues entonces $\phi(x/t)$ es idéntico a $\phi(x/e)$). Si x está libre en ϕ, se sigue que t es un $\mathcal{L}^*(E)$-término (pues figura en ambos lados). Si $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{\phi_x(e)\}$ no fuera $\mathfrak{C}$-consistente, habría un interpolante, un $\mathcal{L}(E)$-enunciado χ tal que,

$$\Theta_0 \models \chi \qquad\qquad \Theta_1 \cup \{\phi(x/e)\} \models \neg\chi$$

en cuyo caso, también ocurre $\Theta_1 \cup \{\phi(x/t)\} \cup \{(t = e)\} \models \neg\chi$. Dado que $\phi(x/t) \in \Theta_1$, tenemos que $\Theta_1 \models ((t = e) \to \neg\chi)$. Puesto que $(t = e) \in \Theta_0$ entonces $\Theta_0 \models (t = e) \wedge \chi$. Por lo tanto, $(t = e) \wedge \chi$ sería un interpolante para Θ_0 y Θ_1, contrariamente a la hipótesis.

1c) Ya que el témino E-primitivo t contiene solo un símbolo de función o constante que no está en E, este es un término de uno de los dos lenguajes, digamos de $\mathcal{L}_0(E)$. Sea e un miembro cualquiera de E que no figura ni en t ni en $\Theta_0 \cup \Theta_1$. Si $\Theta_0 \cup \{t = e\} \cup \Theta_1$ no fuera $\mathfrak{C}$ consistente, entonces habría un interpolante, un $\mathcal{L}(E)$-enunciado χ tal que,

$$\Theta_0 \cup \{t = e\} \models \chi \qquad\qquad \Theta_1 \models \neg\chi.$$

Es decir,

$$\Theta_0 \models (t = e \to \chi) \qquad\qquad \Theta_1 \models \neg\chi.$$

Sea x cualquier variable que no figure en χ. Así,

$$\Theta_0 \models \exists x\chi(e/x) \qquad\qquad \Theta_1 \models \neg\exists x\chi(e/x)$$

y Θ_0 y Θ_1 también tendrían un interpolante, en oposición a la hipótesis.

2a) Debemos probar que si $\neg\alpha \in \Theta_0 \cup \Theta_1$, entonces $\alpha \notin \Theta_0 \cup \Theta_1$, así que suponga que existe un enunciado $\neg\alpha$ tal que $\neg\alpha \in \Theta_0$. Claramente $\alpha \notin \Theta_0$; si $\alpha \in \Theta_1$, note que $At(\alpha) \subset At(\Theta_0) \cap At(\Theta_1)$. En consecuencia, α sería el interpolante buscado.

2b) Si $\neg\neg\alpha \in \Theta_0$, entonces Θ_0 y $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ son tautológicamente equivalentes y tienen las mismas letras proposicionales, así si $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$, deducimos que $\Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \{\alpha\} \in \mathfrak{C}$. Similarmente, si $\neg\neg\alpha \in \Theta_1$.

3a) Suponga que $(\alpha \vee \beta) \in \Theta_0$, con $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$, pero tal que $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \cup \Theta_1 \notin \mathfrak{C}$ y $\Theta_0 \cup \{\beta\} \cup \Theta_1 \notin \mathfrak{C}$. Evidentemente uno de ellos, $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$ o $\Theta_0 \cup \{\alpha\}$, sigue siendo satisfacible. Supongamos primeramente que ambos lo son, por lo que debe existir un interpolante χ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\alpha\}, \Theta_1)$ y un interpolante ζ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\beta\}, \Theta_1)$. Es decir,

$$\begin{aligned}\Theta_0 \cup \{\alpha\} &\models \chi \\ \Theta_1 &\models \neg\chi,\end{aligned}$$

mientras que

$$\Theta_0 \cup \{\beta\} \models \zeta$$

y

$$\Theta_1 \models \neg\zeta.$$

Por tanto, $\Theta_0 \models (\chi \vee \zeta)$ y $\Theta_1 \models \neg(\chi \vee \zeta)$, contrariamente a la hipótesis. Si, por ejemplo, $\Theta_0 \cup \{\beta\}$ fuese instisfacible, entonces si $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \cup \Theta_1 \cup \notin \mathfrak{C}$ lo sería, porque hay un interpolante ξ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\alpha\}, \Theta_1)$. Esto es, $\Theta_0 \cup \{\alpha\} \models \xi$ y $\Theta_1 \models \neg\xi$. Pero, dado que $\Theta_0 \cup \{\beta\}$ es insatisfacible, $\Theta_0 \models \neg\beta$. En consecuencia, cualquier modelo de $(\Theta_0 \cup \{\alpha\})$ es modelo de Θ_0, de modo que ξ sería un interpolante de la pareja (Θ_0, Θ_1), contradiciendo la hipótesis.

3b) Suponga que $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Theta_0$, con $\Theta_0 \cup \Theta_1 \in \mathfrak{C}$, pero tal que $\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\} \cup \Theta_1 \notin \mathfrak{C}$ o $\Theta_0 \cup \{\neg\beta\} \cup \Theta_1 \notin \mathfrak{C}$. Supongamos lo primero, debe haber un interpolante χ para la pareja $(\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\}, \Theta_1)$, es decir

$$\Theta_0 \cup \{\neg\alpha\} \models \chi \text{ y } \Theta_1 \models \neg\chi;$$

como $\Theta_0 \models \neg\alpha$, se sigue que χ es un interpolante para (Θ_0, Θ_1) contradiciendo la hipótesis.

4a) Suponga que $(\exists x\psi) \in \Theta_0$ y seleccione $e \in E$ que no figure ni en Θ_0 ni en Θ_1. Si $\Theta_0 \cup \{\psi(x/e)\} \cup \Theta_1$ no fuera $\mathfrak{C}$-consistente y χ fuera un interpolante

$$\Theta_0 \cup \{\psi(x/e)\} \models \chi \qquad\qquad \Theta_1 \models \neg\chi.$$

Fácilmente se corrobora que $\exists x\chi(e/x)$ es un interpolante para Θ_0 y Θ_1.

4b) Si $(\neg\exists x\psi) \in \Theta_0$, ya que $\models \neg\exists x\psi \to \neg\psi_x(e)$, si para alguna $e \in E$, $\Theta_0 \cup \{\neg\psi(e/x)\} \models \chi$ y $\Theta_1 \models \neg\chi$, también $\Theta_0 \cup \{\neg\exists x\psi(x)\} \models \chi$, es decir, $\Theta_0 \models \chi$ y χ sería un interpolante de Θ_0 y Θ_1, lo que es contradictorio.

Por el teorema de existencia del modelo, cada conjunto $\mathfrak{C}$-consistente tiene un modelo. Si $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ no tuviera interpolante sería satisfacible, pero por hipótesis no lo es. Por lo tanto, hay un $\mathcal{L}(E)$-enunciado χ tal que

$$\Gamma_0 \models \chi \qquad\qquad \Gamma_1 \models \neg\chi$$

Si $e_0, \ldots, e_k$ es una lista de todos los miembros de E que figuran en χ y $x_0, \ldots, x_k$ son variables que no figuran en χ, entonces también tenemos,

$$\Gamma_0 \models \exists x_0, \ldots \exists x_k \chi(e_0, /x_0, \ldots, e_k/x_k)$$

y

$$\Gamma_1 \models \neg\exists x_0, \ldots \exists x_k \chi(e_0/x_0, \ldots, e_k/x_k).$$

y así Γ_0 y Γ_1 tienen el interpolante deseado. □

Teorema 4.7.31 (Teorema de Interpolación de Craig)**.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable, T una $\mathcal{L}$-teoría, y $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ cualesquiera dos extensiones de $\mathcal{L}$ cuyos símbolos comunes pertenezcan a $\mathcal{L}$. Si ϕ es una $\mathcal{L}_0$-fórmula y ψ una $\mathcal{L}_1$-fórmula tal que $T \models \phi \to \psi$, existe una $\mathcal{L}$-fórmula χ tal que $T \models \phi \to \chi$ y $T \models \chi \to \psi$.*

Se dice que tal χ es un interpolante de Craig para ϕ y ψ.

Demostración. Suponga primeramente que ϕ y ψ son enunciados. Sean T_0 la $\mathcal{L}_0$ teoría generada por $T \cup \{\phi\}$, y T_1 la $\mathcal{L}_1$ teoría generada por $T \cup \{\neg\psi\}$. La hipótesis implica que $T_0 \cup T_1$ es inconsistente y que, por lo tanto, existe un intepolante χ de Robinson. Por consiguiente, $T \cup \{\phi\} \models \chi$ y $T \cup \{\neg\psi\} \models \neg\chi$ o $T \cup \{\chi\} \models \psi$.

El caso general puede ser reducido a este agregando un número adecuado de nuevos símbolos de constante y considerando los enunciados que resultan de reemplazar todas las variables libres por constantes. □

Ya que disponemos de los teoremas de interpolación que hemos demostrado mediante una noción de consistencia, hagamos algo con ellos. Probemos el teorema de definibilidad de Beth.

Definición 4.7.32. Sean T una $\mathcal{L}$-teoría y R una n-relación en $\mathcal{L}$. Para cualquier $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, diremos que R está definida explícitamente por T en términos de $\mathcal{L}'$, cuando existe una $\mathcal{L}'$-fórmula $\varphi(\vec{x})$ tal que

$$T \models \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow R(\vec{x}))$$

Ejemplo 4.7.33. Sean $\mathcal{L} = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, $\mathcal{L}' = \{+, \cdot, 0, 1\}$, $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura con la interpretación natural y $T = Teo(\mathfrak{R})$. Se sigue que la relación binaria $\leq$ está definida explícitamente por T en términos de $\mathcal{L}'$. Sin duda, sea $\varphi(x, y) \equiv \exists z(x + (z \cdot z) = y)$. Como $(z \cdot z) \geq 0$ para cada número real z, $T \models \varphi(x, y) \leftrightarrow x \leq y$.

Definición 4.7.34. Sean T una $\mathcal{L}$-teoría y R una símbolo de relación en $\mathcal{L}$. Para todo $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, diremos que R está definida implícitamente por T en términos de $\mathcal{L}'$ si se cumple lo siguiente. Dada cualquier $\mathcal{L}'$-estructura $\mathfrak{M}$ y dos expansiones $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ de $\mathfrak{M}$ a $\mathcal{L}$-estructuras modelos de T,

$$\mathfrak{N}_1 \models R[\vec{a}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{N}_2 \models R[\vec{a}]$$

para toda eneada $\vec{a}$ de elementos de M.

Note que si R está definida explícitamente por T en términos de $\mathcal{L}$, entonces está definida implícitamente.

Ejemplo 4.7.35. Se $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, B\rangle$ la estructura que interpreta la relación binaria B como relación sucesor simétrica. Esto es, $\mathfrak{M} \models B[a, b]$ si y sólo si $a = b + 1$ o $b = a + 1$. Tome $\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{Z}, B, <\rangle$ la expansión de $\mathfrak{M}$ que interpreta $<$ como el orden usual en los enteros. Sea $\mathfrak{N}_2$ la expansión de $\mathfrak{M}$ que interpreta $<$ «al revés», es decir, $\mathfrak{N}_2 \models a < b$ si y sólo si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a > b$.

Tome $T = Teo(\mathfrak{N}_1)$. Como $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ son expansiones distintas de $\mathfrak{M}$ y son modelos de T, la relación $<$ no está definida implícitamente por T en términosde $\mathcal{L} = \{B\}$.

Proposición 4.7.36. *Una relación R está definida implícitamente por T en términos de $\mathcal{L}$ si y sólo si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M}$, existe a lo sumo una expansión $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ a una $\mathcal{L} \cup \{R\}$-estructura tal que $Teo(\mathfrak{N}) \subset T$.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. ☐

Ejemplo 4.7.37. Sean T_Q la teoría de los racionales en el lenguaje $\mathcal{L}_{Ar} = \{0, 1, +, \cdot\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Ar} \cup \{R\}$, donde R es una 3-relación, y T la teoría $T_Q \cup \{\varphi\}$ para algun $\mathcal{L}$-enunciado φ.

Si $\varphi \equiv \forall x, y, z(\psi(x, y, z) \leftrightarrow R(x, y, z))$ para alguna $\mathcal{L}_{Ar}$-fórmula $\psi(x, y, z)$, entonces, por definición, R está definida explícitamente por T en $\mathcal{L}_{Ar}$. En este caso, existe exactamente una forma de expandir un modelo dado de T_Q a un modelo de T.

Para la recíproca, suponga que existe exactamente una forma de expandir un modelo dado de T_Q a un modelo de T. Por la proposición 4.7.36, R está definida implícitamente por T en $\mathcal{L}_{Ar}$. En tal caso, φ no puede tener la forma $\forall x, y, z(\psi(x, y, z) \leftrightarrow R(x, y, z))$. Por ejemplo, suponga que φ es el $\mathcal{L}$-enunciado

$$\forall x, y, z \exists u, v, w(u \cdot v = 1 \wedge (R(x, y, z) \vee (x + x + y = z + v + u) \\ \wedge (w + y = 0 \wedge (R(x, y, z) \rightarrow x + x = z + w).$$

Existe exactamente una forma de expandir un modelo de T_Q a un modelo de este enunciado. Por consiguiente, este enunciado define implícitamente la relación ternaria R.

El teorema de definibilidad de Beth asegura que R está definida implícitamente si y sólo si está definida explícitamente. Esto signiifca que el enunciado φ debe ser T_Q-equivalente a un enunciado de la forma

$$\forall x, y, z(\psi(x, y, z) \leftrightarrow R(x, y, z)).$$

En efecto, podemos tomar $\psi(x, y, z)$ como $2x + y = z$, verificación de lo cual queda como ejercicio.

Considere la siguiente variante de definición de definición implícita. Sean P, P' símbolos de n-predicado que no pertenecen al lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $T(P)$ una teoría en el lenguaje $\mathcal{L} \cup \{P\}$ y $T(P')$ la teoría correspondiente en $\mathcal{L} \cup \{P'\}$ que se obtiene al remplazar en los enunciados de $T(P)$ el símbolo P por P'. Es fácil comprobar que $T(P)$ define a P implícitamente si y sólo si

$$T(P) \cup T(P') \models \forall \vec{x}(P(\vec{x}) \leftrightarrow P'(\vec{x})). \qquad (\clubsuit)$$

En forma equivalente, si $(\mathfrak{A}, R)$ y $(\mathfrak{A}, R')$ son modelos de $T(P)$, entonces $R = R'$, donde $(\mathfrak{A}, R)$ representa a la estructura $\mathfrak{A}$ y se indica que el símbolo P se interpreta como $R \subseteq A^n$.

Teorema 4.7.38 (Beth). *Una relación está definida implícitamente por una teoría T en términos de $\mathcal{L}$ si y sólo si está definida explícitamente por T en términos de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Por lo anterior, sólo se requiere demostrar una dirección de este teorema. Supongamos que $T(P)$ define implícitamente a P y añada nuevos símbolos de constante $c_1, \ldots, c_n$ a $\mathcal{L}$. Entonces,

$$T(P) \cup T(P') \models P(\vec{c}) \to P'(\vec{c}).$$

Se sigue del teorema de compacidad que existen subconjuntos finitos $\Delta \subseteq T(P)$, $\Delta' \subseteq T(P')$ tales que

$$\Delta \cup \Delta' \models P(\vec{c}) \to P(\vec{c}).$$

Sea $\psi(P)$ la conjunción de aquellos enunciados $\sigma(P) \in T(P)$ tales que $\sigma(P) \in \Delta$ o $\sigma(P') \in \Delta'$. En consecuencia,

$$\psi(P) \wedge \psi(P') \models P(\vec{c}) \to P'(\vec{c}).$$

Emprendemos un ordenamiento de modo tal que todos los símbolos P estén en un lado y P' del otro,

$$\psi(P) \wedge P(\vec{c}) \models \psi(P') \to P'(\vec{c}).$$

Acudimos al teorema de interpolación de Craig para conseguir un enunciado $\theta(\vec{c})$ de $\mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ tal que

$$\psi(P) \wedge P(\vec{c}) \models \theta(\vec{c}) \tag{✧}$$
$$\theta(\vec{c}) \models \psi(P') \to P'(\vec{c}). \tag{✻}$$

Cualquier estructura $(\mathfrak{A}, R')$ que interprete $\mathcal{L} \cup \{P', c_1, \ldots, c_n\}$ también interpreta $\mathcal{L} \cup \{P, c_1, \ldots, c_n\}$, si interpretamos P como R', por lo que (✻) da lugar a

$$\theta(\vec{c}) \models \psi(P) \to P(\vec{c}) \tag{✳}$$

(✧) y (✳) abren paso a

$$\psi(P) \models P(\vec{c}) \leftrightarrow \theta(\vec{c}). \tag{✠}$$

En virtud de que $c_1, \ldots, c_n$ no aparecen en $\psi(P)$ (que se constituye a partir de $T(P)$), ocurre que

$$\psi(P) \models \forall \vec{x}[P(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})],$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son variables que no están en $\theta(c_1, \ldots, c_n)$. Por lo tanto,

$$T(P) \models \forall \vec{x}[(P(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})].$$

□

También podemos obtener el teorema de consistencia de Robinson.

Teorema 4.7.39 (Teorema de consistencia de Robinson). *Sean $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ lenguajes con*

parte común $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$*, suponga que* T *es una* $\mathcal{L}$*-tería completa, y que* $T_1 \supset T$, $T_2 \supset T$ *son* $\mathcal{L}_1$*-,* $\mathcal{L}_2$*-teorías consistentes, respectivamente. Entonces,* $T_1 \cup T_2$ *es consistente en el lenguaje* $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$*.*

Demostración. Supongamos que $T_1 \cup T_2$ es inconsistente, por lo que existen subconjuntos finitos $\Sigma_1 \subset T_1$, $\Sigma_2 \subset T_2$ tales que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es inconsistente. Haga $\sigma_1 \equiv \bigwedge \Sigma_1$ y $\sigma_2 \equiv \bigwedge \Sigma_2$, lo que da lugar a $\sigma_1 \models \neg\sigma_2$, y por el teorema de Carig, existe un enunciado θ tal que $\sigma_1 \models \theta$, $\theta \models \neg\sigma_2$. En consecuencia, θ es un $\mathcal{L}$-enunciado.

Si regresamos a T_1 y T_2, deducimos que $T_1 \models \theta$ y como T_1 es consistente, $T_1 \not\models \neg\theta$, de modo que $T \not\models \neg\theta$. Más aún, $T_2 \models \neg\theta$ y por la consistencia de T_2, $T_2 \not\models \theta$, de donde se desprende que $T \not\models \theta$. Esto se opone a la hipótesis de que T es una teoría completa en $\mathcal{L}$. ◻

4.8 El caso innumerable

Generalicemos ahora la noción de $\mathfrak{C}$-consistencia a casos innumerables. Cuando probamos el teorema de existencia de modelos para nuestras nociones de consistencia, dado que el lenguaje era numerable, lo logramos en ω-etapas. Para lenguajes innumerables, aparecen etapas límite y debemos modificar, en consecuencia, nuestra definición de noción de consistencia.

Definición 4.8.1. Para cualquier cardinal infinito κ y cualquier lenguaje $\mathcal{L}$ de cardinalidad κ una $\mathcal{L}$-noción de consistencia es un par $(\mathfrak{C}, E)$ que satisface todas las condiciones mencionadas en la definición 4.7.22 además de la siguiente,

(5) Para cada $\sigma < \kappa$ y cualquier familia $\langle \Gamma_\tau | \tau < \sigma \rangle$ de conjuntos de $\mathcal{L}$-enunciados, si para todo τ y υ, tales que si $\Gamma_\tau \in \mathfrak{C}$ y $\tau < \upsilon$ implica que $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\upsilon$ y $\Gamma_\upsilon \in \mathfrak{C}$ entonces $\bigcup_{\tau<\upsilon} \Gamma_\tau \in \mathfrak{C}$.

Teorema 4.8.2. *Para todo lenguaje* $\mathcal{L}$ *de cardinalidad* $\kappa \geq \omega$ *y cualquier noción de* $\mathcal{L}$*-consistencia* $(\mathfrak{C}, E)$*, con* $|E| < \kappa$*, cada conjunto* $\mathfrak{C}$*-consistente puede ser extendido a un conjunto* Δ *débilmente completo con respecto a* E*.*

Demostración. Sea $(\mathfrak{C}, E)$ una noción de consistencia, Θ un conjunto $\mathfrak{C}$-consistente. Dado que $\mathcal{L}(E)$ tiene cardinalidad κ, el conjunto de $\mathcal{L}(E)$-enunciados también tiene cardinalidad κ. Considere

1) $\langle \theta_\sigma : \sigma < \kappa \rangle$ una enumeración de los enunciados de $\boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$,

2) $\langle t_\sigma : \sigma < \kappa \rangle$ una enumeración de los términos E-primitivos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$,

3) $\langle e_\sigma : \sigma < \kappa \rangle$ una enumeración de las constantes de E.

Construiremos por recursión transfinita una sucesión Δ_σ de conjuntos de fórmulas tal que para cada σ, un número menor que κ de las nuevas constantes figuren en los miembros de Δ_σ. Para toda $\sigma < \kappa$, sea σ^* el menor ordinal tal que la constante e_{σ^*} no figura en θ_σ, ni en ninguna fórmula de Δ_σ. Para todo $\sigma < \kappa$, sea $\Delta_0 = \Theta$, y hacemos

$$\Delta_\sigma^0 = \Delta_\sigma \cup \{\theta_\sigma\}$$

si este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. En otro caso, ponga $\Delta_\sigma^0 = \Delta_\sigma$.

Haga

$$\Delta_\sigma^1 = \Delta_\sigma^0 \cup \{t_\sigma = e\}$$

para la primera $e \in E$ para la cual este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. Tal e tiene que existir por definición de $\mathfrak{C}$-consistencia.

Ponga

$$\Delta_{\sigma+1} = \Delta_\sigma^1 \cup \{\chi_x(e^*)\}$$

si $\theta_\sigma \in \Delta_\sigma^1$ y θ_σ es $\exists x \chi$. En otro caso, $\Delta_{n+1} = \Delta_n^1$.

Haga

$$\Delta_\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \Delta_\tau$$

si σ es un ordinal límite.

Finalmente, establecemos

$$\Delta = \bigcup_{\sigma<\kappa} \Delta_\sigma.$$

Claramente cada uno de los conjuntos Δ_σ es $\mathfrak{C}$-consistente. En el caso límite lo es por la cláusula (5).

Vamos a probar que Δ es débilmente completo.

1a) Supongamos que $(e = e') \in \Delta$ y, por lo tanto que, para algún σ, $(e = e') \in \Delta_\sigma$, y que $(e' = e)$ es θ_v. Si $v < \sigma$, entonces ya que $\Delta_\sigma \cup \{(e = e')\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, así lo es su subconjunto $\Delta_p \cup \{(e = e')\}$ y, por lo tanto también $\Delta_p \cup \{(e' = e)\}$. En consecuencia, $(e' = e) \in \Delta_p^0 \subset \Delta$.

Por otro lado, si $\sigma < v$ entonces $(e = e') \in \Delta_\sigma \subset \Delta_v$, de ahí que, $\{(e' = e)\} \cup \Delta_v$ es $\mathfrak{C}$-consistente. De manera que, $(e' = e) \in \Delta_{v+1}$.

1b) Es similar. Por ejemplo, si para un E-término t, una constante $e \in E$ y una fórmula $\phi(x)$ tenemos que $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \in \Delta$ entonces, para algún σ, $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \in \Delta_\sigma$. Si $\phi(e)$ es el enunciado θ_v y $v < \sigma$, damos paso a $\{t = e\} \cup \{\phi(t)\} \cup \Delta_v$ es $\mathfrak{C}$-consistente (pues es un subconjunto de Δ_σ). Por esta razón, $\delta_v \cup \{\theta_v\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y, por ende, $\Delta_v \in \Delta$.

1c) Por construcción, sabemos que si $e \in E$, y t es un término E-primitivo entonces $(t = e) \in \Delta$.

2a) Si $\alpha \in \Delta$ y $\neg\alpha \in \Delta$, entonces, para algún ψ, $\alpha \in \Delta_\psi$ y $\neg\alpha \in \Delta_\psi$, pero eso no es posible pues cada Δ_ψ es $\mathfrak{C}$-consistente.

2b) Si $\neg\neg\alpha \in \Delta$, entonces, para algún σ, $\neg\neg\alpha \in \Delta_\sigma$. Supongamos que α es ϕ_v y que $v \leq \sigma$. Sabemos que $\Delta_\sigma \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, en cuyo caso su subconjunto $\Delta_v \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y, por lo que también lo es $\Delta_v \cup \{\alpha\}$ y así $\alpha \in \Delta_{p+1}$. Por otro lado, si $\eta \leq \rho$, entonces $\neg\neg\alpha \in \Delta_\eta \subset \Delta_\rho$. Es decir, $\Delta_\rho \cup \{\neg\neg\alpha\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y, por ende, también lo es $\Delta_v \cup \{\alpha\}$. En consecuencia, $\alpha \in \Delta_{v+1}$.

Los incisos 3a) y 3b) se prueban de manera similar.

4a) Por construcción, para cada fórmula $\exists x\phi \in \Delta$, hay un primer σ tal que $\exists x\phi \in \Delta_\sigma$, y por la misma razón, $\phi(e_{\sigma^*}) \in \Delta_{\sigma+1}$.

4b) Supongamos que $\neg\exists x\phi \in \Delta$, sea $e \in E$ y $\neg\phi(e)$ el enunciado θ_v. Debe existir σ el menor ordinal tal que $\neg\exists x\phi \in \Delta_\sigma$, entonces $\Delta_\sigma \cup \{\neg\phi(e)\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente. Supongamos que $v < \sigma$, de suerte que $\Delta_v \cup \{\neg\phi(e)\} \subset \Delta_\sigma \cup \{\neg\phi(e)\}$. Luego, $\Delta_\sigma \cup \{\neg\phi(e)\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente y $\neg\phi(e) \in \Delta_v$. Si $\sigma < v$, dado que $\neg\exists x\phi \in \Delta_\sigma \subset \Delta_v$, y que $\Delta_v \cup \{\exists x\phi\}$ es $\mathfrak{C}$-consistente, también lo es $\Delta_v \cup \{\neg\phi(e)\}$ por definición de $\mathfrak{C}$ consistencia. Por lo tanto, $\neg\phi(e) \in \Delta_{v+1}$.

□

En el resto del capítulo nos dedicaremos a estudiar someramente algunas extensiones de la lógica de primer orden, como preparación al último capítulo sobre lógicas abstractas.

4.9 Lógicas infinitarias

Como sabemos, la lógica de primer orden considera solo una cantidad numerable de variables, cada fórmula permite sólo una cantidad finita de conectivos lógicos y cuantificadores, los cuales, a su vez, actúan solo sobre una cantidad finita de fórmulas y de variables. Así, una fórmula de primer orden, por más compleja que sea, consiste en una cantidad finita de símbolos. Hemos visto que este lenguaje es suficientemente poderoso para expresar muchas nociones, definiciones y resultados en matemáticas, pero desafortunadamente no siempre es tan exitoso. Asimismo, la teoría de modelos para esta lógica

dispone de una enorme diversidad de resultados; sirvan para ejemplificar esta situación los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem creciente. A riesgo de perder estas ventajas, pero ganar en «expresabilidad», nos podemos aventurar en otro tipo de lenguajes para conseguir mayor capacidad de expresión.

De entre las posibles extensiones trataremos aquí aquellas que permiten cuantificar y conectar cantidades infinitas de variables y fórmulas. La semántica de tales lenguajes es apenas distinguible de la semántica de la lógica de predicados; en cambio, la teoría de modelos se complica considerablemente. Una de las pérdidas más dolorosas consiste en la imposibilidad de probar, en general, el teorema de compacidad. Insistir en la validez de éste con lenguajes infinitarios conduce inevitablemente a grandes cardinales. No obstante, en muchas situaciones podemos obtener resultados sobre existencia de modelos mediante ciertas analogías del teorema de compacidad. La situación en cuanto al teorema de Lówenheim-Skolem decreciente es mucho más alentadora, no así con el teorema de Löwenheim-Skolem creciente cuya posible validez depende enormemente del lenguaje involucrado. A pesar de esto, el estudio de los lenguajes infinitarios abre un sinnúmero de posibilidades tanto para investigar la lógica de primer orden como para analizar diversas estructuras matemáticas: grupos, módulos, álgebras booleanas, buenos órdenes y otros más y, lo que resulta en un atractivo mayor, establece una estrecha relación entre la lógica matemática y grandes cardinales. Para un estudio más detallado, sugerimos consultar [FeVi17].

Como ya dijimos, nos interesa considerar la extensión de la lógica de primer orden mediante fórmulas que admiten conjunciones y disyunciones infinitas, así como cuantificación sobre una cantidad infinita de variables; por tanto, en tales lenguajes se admite cuantificación de tamaño $< \kappa$ y conjunciones y disyunciones sobre $< \lambda$ fórmulas, por lo cual se acostumbra denotar a estos lenguajes como $L_{\lambda\kappa}$. También es posible admitir cuantificación arbitrariamente grande, lo mismo que conjunciones y disyunciones arbitrariamente grandes, aunque siempre acotadas, en cuyo caso se denota $L_{\infty\infty}$. Esto es, estas lógicas, podemos tener conjunciones/disyunciones y cuantificación sobre λ fórmulas o variables, sin importar el tamaño de λ, pero no quiere decir que podamos tomar tales conjunciones o cuantificación sobre una cantidad no acotada de fórmulas o variables. Por lo tanto, otra forma de denotar a la lógica de primer orden es $L_{\omega\omega}$.

A continuación formalizamos estos lenguajes, donde daremos por sobrentendido muchos de los razonamientos efectuados en la sintaxis y semántica de la lógica de primer orden que, sin prejuicio de los lenguajes infinitarios, puedan aplicarse a este contexto. Seguimos juiciosamente[2] a [Di75], [FeVi17] y [Ke71]. Los lenguajes $L_{\kappa\lambda}(\mathcal{L})$, donde κ, λ son cardinales infinitos consisten en los siguientes componentes. Aquí $\mathcal{L}$ siempre es un lenguaje de primer orden, como los que hemos venido tratando, eso no cambia, lo que varía en $L_{\kappa\lambda}(\mathcal{L})$ es la sintaxis. Entonces, tenemos,

- Variables. Una cantidad $\gamma = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$ de símbolos de variable. Si $\rho < \gamma$, denota-

[2]Hemos procurado seguir estas referencias corrigiendo algunas inexactitudes, proporcionando algunos detalles, desarrollando demostraciones (o completándolas) cuando estas no ocurren y nos parecieron necesarias y añadimos algunas observaciones y resultados.

mos con $v \restriction \rho$ la sucesión de variables $\langle v_\eta : \eta < \rho \rangle$

- Símbolos lógicos.
  - Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Cuantificadores: $\exists\,, \forall$
  - Símbolo de igualdad: $=$
  - Paréntesis, corchetes, llaves, etc.
- Símbolos no lógicos.
  - Símbolos de relación $\mathcal{R}$.
  - Símbolos de función $\mathcal{F}$.
  - Símbolos de constante $\mathcal{C}$.

Las funciones con n variables se pueden considerar como $n+1$-relaciones y las constantes como símbolos de 0-funciones. Como en el caso de primer orden, para especificar un lenguaje se requiere asociar a cada símbolo de relación o función su valencia, es decir, la cantidad de variables que admite. Para no complicar más la notación, nos referiremos a símbolos de n-función o m-relación para establecer la valencia. Note que las funciones y los predicados siempre tienen valencia finita.

Toca el turno a la sintaxis de los lenguajes infinitarios. Los términos se definen exactamente como en primer orden. Un término sin variables es un término constante o cerrado. La definición de fórmula,

- Las fórmulas contienen menos que λ variables libres.
- Si t_1, t_2 son términos, $t_1 = t_2$ es un fórmula (atómica).
- Si R es un símbolo de k-relación y $t_1, \ldots, t_k$ son términos, entonces $R(t_1, \ldots, t_k)$ es una fórmula (atómica).
- Si φ es una fórmula, $\neg\varphi$ también lo es.
- Si $\rho < \kappa$ y, para cada $\eta < \rho$, φ_η es una fórmula, también lo es

$$\bigwedge \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_\eta \cdots$$

- Si $\delta < \lambda$, φ es una fórmula y $\langle v_{\alpha_\xi} : \xi < \delta \rangle$ (donde $\alpha_\xi < \max\{\kappa, \lambda\}$ para cada $\xi < \delta$) es una sucesión de variables, entonces

$$\exists\, v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_\xi} \cdots \varphi$$

es una fórmula.

Mediante $Fml(L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}}))$ denotamos a las fórmulas de $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$, mientras que $Fml_\nu\ (L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}}))$ describe al conjunto de $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-fórmulas con $\leq \nu$ variables libres. En particular, si $\nu = 0$ tenemos los enunciados (o fórmulas cerradas); en este orden de ideas $Fr(\varphi)$ representa al conjunto de variables libres de φ. Es conveniente razonar que no ganamos nada si consideramos lenguajes $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\kappa\lambda}$ con $\lambda > \kappa$, pues los símbolos de relación y función solo admiten una cantidad finita de variables. Por ejemplo, en $L_{\omega\omega_1}$ las fórmulas tendrían una cantidad numerable de variables pero podríamos cuantificar sobre una cantidad innumerable de ellas, lo cual no da ninguna ventaja.

Expresiones como

$$\bigwedge \varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_\eta\cdots, \quad \exists\, v_{\alpha_0}v_{\alpha_1}\cdots v_{\alpha_\xi}\cdots\varphi$$

se abreviarán como sigue:

$$\bigwedge_{\nu<\rho}\varphi_\eta, \qquad \exists\, v_{\alpha_\xi} \restriction \delta\varphi.$$

Si Ψ es un conjunto no vacío de fórmulas de $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ de cardinalidad $< \kappa$, $\bigwedge\Psi$ denota la conjunción de las expresiones en Ψ. Si X es un conjunto de variables de cardinalidad $< \lambda$ y φ es una fórmula de $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$, $\exists X\varphi$ es una fórmula de $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$. A partir de $L_{\kappa\lambda}$ podemos generar dos lenguajes adicionales: el primero es $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\lambda}$, λ un cardinal; aquí la clase de sus fórmulas es

$$Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})) = \bigcup_{\kappa\geq\lambda} Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})).$$

Se sigue que $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\lambda}$ tiene conjunciones y disyunciones arbitrariamente largas, pero cuantificaciones de longitud $< \lambda$; sus fórmulas tienen menos que λ variables libres. La clase de las fórmulas del segundo lenguaje, $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\infty}$, se define como sigue:

$$Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\infty}(\boldsymbol{\mathcal{L}})) = \bigcup_{\lambda \text{ cardinal}} Fml(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\infty\lambda}(\lambda))$$

Otra vez, esto no significa que una fórmula en $L_{\infty\infty}$ o en $L_{\infty\lambda}$ permita la aparición de un cuantificador con una cantidad arbitrariamente grande de variables o que tenga una conjunción arbitrariamente grande.

Semántica

Es inmediato que dado un conjunto Σ de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-fórmulas podemos construir una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura para él exactamente en la mismo forma en lógica de primer orden, por lo que pasamos a ocuparnos de definir la satisfacción de estas fórmulas en una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura.

Sean $\mathfrak{A}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura, $X, Y \subseteq Var$, no necesariamente ajenos, $f : X \longrightarrow A$ y $g : Y \longrightarrow A$ asignaciones arbitrarias. La aplicación $f * g : X \cup Y \longrightarrow A$ se define a continuación.

$$(f * g)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X - Y, \\ g(z) & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Se deduce que si $X \cap Y = \varnothing$, entonces $f * g = f \cup g$, y que si $X \subseteq Y$, ocurre $f * g = g$.

Sea $f : Var \longrightarrow A$ una asignación. Por indución en la construcción de términos definimos el valor $t^{\mathfrak{A}}[f]$ en $\mathfrak{A}$ del término t respecto a la asignación f exactamente como se efectúa en primer orden.

Definición 4.9.1 (La noción de satisfacción)**.** Por inducción asignamos a cada $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\lambda)$-fórmula φ un conjunto $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq A^{Var}$, es decir, un conjunto de aplicaciones $f : Var \longrightarrow A$; en lugar de $f \in \varphi(\mathfrak{A})$, escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$ y decimos que f satisface a φ en $\mathfrak{A}$ o que $\mathfrak{A}$ es un modelo de φ respecto a f. Procedemos por inducción en la construcción de φ.

- φ es atómica.
  - Si $\varphi \equiv t_1 = t_2$, donde t_1, t_2 son $\mathcal{L}$-términos,
  $$\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[f] = t_2^{\mathfrak{A}}[f].$$
  - Si $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_k)$, donde los t_i son $\mathcal{L}$-términos,
  $$\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Leftrightarrow (t^{\mathfrak{A}}[f], \ldots, t^{\mathfrak{A}}[f]) \in R^{\mathfrak{A}}.$$
- $\varphi \equiv \neg\psi$, entonces
$$\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Leftrightarrow \text{ no es cierto que } \mathfrak{A} \models \psi[f].$$
- $\varphi \equiv \bigwedge \Psi$, donde $\Psi \subseteq Fml(\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\mathcal{L}))$, $|\Psi| < \kappa$, entonces
$$\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Leftrightarrow \text{ para toda } \sigma \in \Psi, \mathfrak{A} \models \sigma[f].$$
- $\varphi \equiv \exists X\psi$, donde $X \subseteq Var$, $|X| < \lambda$, entonces
$$\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Leftrightarrow \text{existe una asignación } g : X \longrightarrow A \text{ con } \mathfrak{A} \models \psi[f * g].$$

$$f : Var \longrightarrow A$$
$$g : X \longrightarrow A$$
$$f * g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in Var - X, \\ g(z) & \text{si } z \in X. \end{cases}$$

Note que en este caso la satisfacción depende de encontrar $|X|$ testigos para φ.

Observación 4.9.2. 1. $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$ depende solo de las variables que aparecen libres en φ.

2. Si σ es un $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\mathcal{L})$-enunciado y existe $f : Var \longrightarrow A$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma[f]$, entonces para toda $g : Var \longrightarrow A$, $\mathfrak{A} \models \sigma[g]$.

   Esto se puede formular como sigue:

   a) Para toda $f \in A^{Var}$, $\mathfrak{A} \models \sigma[f]$.
   O

   b) Para ninguna $f \in A^{Var}$, $\mathfrak{A} \models \sigma[f]$.

Demostración. Es un ejercicio sencillo que se deja al lector. □

Por esta observación cobra sentido el uso de la siguiente notación:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\langle a_\xi : \xi < \delta\rangle], \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[g], \qquad \text{o} \qquad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$$

donde $a_\xi \in A$ para $\xi < \delta$ y $Fr(\varphi) = \{v_{\alpha_\xi} : \xi < \delta\}$ o $g : Fr(\varphi) \longrightarrow A$, en lugar de la escritura más completa $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, donde

$$f(x) = \begin{cases} a_\xi \quad \text{(respectivamente, } g(x)) & \text{si } x = v_{\alpha_\xi} \text{ para alguna } \xi < \delta \\ & \text{(respectivamente, } x \in Fr(\varphi)), \\ \text{cualquier } a \in A & \text{si } x \neq v_{\alpha_\xi} \text{ para toda } \xi < \delta (\text{o } x \notin Fr(\varphi)). \end{cases}$$

Definición 4.9.3. En referencia a la observación 4.9.2 en el caso (a), decimos que σ es cierta en $\mathfrak{A}$ (o que σ se cumple en $\mathfrak{A}$, en símbolos $\mathfrak{A} \models \sigma$); en el caso (b), σ es falsa en $\mathfrak{A}$. Si σ es cierta en $\mathfrak{A}$ decimos que $\mathfrak{A}$ es un modelo de σ, en símbolos $\mathfrak{A} \in Mod_{\mathcal{L}}(\sigma)$ o $\mathfrak{A} \in Mod(\sigma)$. Cuando Σ es un conjunto de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\mathcal{L})$-enunciados, escribimos $\mathfrak{A} \in Mod(\Sigma)$ si $\mathfrak{A} \in Mod(\sigma)$ para cada $\sigma \in \Sigma$.

Si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varphi$, decimos que φ es válida o lógicamente válida (en símbolos $\models \varphi$).

Otras nociones como consecuencia lógica, consistencia o inconsistencia, conjunto de fórmulas completo, etc., se definen exactamente como en primer orden.

Definición 4.9.4. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Mediante $Teo^{\kappa\lambda}(\mathfrak{A})$ denotamos el conjunto de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\mathcal{L})$-enunciados que se cumplen en $\mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras, escribimos $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$ para significar que $\mathfrak{A}$ es $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$-equivalente a $\mathfrak{B}$, esto es,

$$Teo^{\kappa\lambda}(\mathfrak{A}) = Teo^{\kappa\lambda}(\mathfrak{B}).$$

Una vez que contamos con una descripción completa de nuestra materia de estudio, los lenguajes infinitarios, vale la pena considerar ejemplos que ilustren la expresividad de estos lenguajes.

Ejemplo 4.9.5. Considere la aritmética de los números naturales, la clase $\mathcal{K}$ de las estructuras $\mathfrak{A}$ que son isomorfas a $\langle \omega, +, \cdot, s, 0\rangle$, donde s es la función sucesor; así, el lenguaje en cuestión es $\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$. Esta vez, tomamos como los axiomas de la aritmética de Peano los siguientes,

- $\forall n((s(n)) \neq 0)$.
- $\forall m, n(s(n) = s(m) \to m = n)$.
- $\forall m(m + 0 = m)$.
- $\forall m, n(m + s(n) = s(m + n))$.
- $\forall m(m \cdot 0 = 0)$.
- $\forall m, n(m \cdot s(n) = (m \cdot n) + m)$.
- $\forall m(m^0 = s(0))$.
- $\forall m, n(m^{s(n)} = m^n \cdot m)$.
- Para cada $\mathcal{L}$-fórmula (por supuesto, solo existe una cantidad numerable de ellas) tenemos un axioma de inducción, pero en $L_{\omega_1\omega}$ podemos describirlo como un solo axioma:

$$\bigwedge_{\varphi \in \bigcup_{n\in\omega} Fml_{n+1}(\mathcal{L}_{\omega_1\omega}(\mathcal{L}))} \forall v_0, \ldots, v_{n-1}[\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, 0) \wedge \forall v_n(\varphi(v_0, \ldots, v_n) \to \varphi(v_0, \ldots, v'_n) \to \forall v_n \varphi(v_0, \ldots, v_n)].$$

En este sentido, $\mathcal{K}$ coincide con el conjunto de modelos del $L_{\omega_1\omega}$-enunciado φ que es la conjunción de estos axiomas de Peano y del enunciado

$$\forall x \left[\bigvee_{n\in\omega} (x = s^n(0))\right],$$

que afirma que todo natural es el cero o el sucesor de un número.

(b) Otra alternativa es considerar los axiomas

$$\bigwedge_{n,m\in\omega}(s^n(0)+s^m(0)=s^{n+m}(0)),$$
$$\bigwedge_{n,m\in\omega}(s^m(0)\cdot s^n(0)=s^{n\cdot m}(0)),$$
$$\bigwedge_{\substack{n,m\in\omega\\ n\neq m}}\neg(s^n(0)=s^m(0)),$$
$$\forall x\Big[\bigvee_{n\in\omega}(x=s^n(0))\Big].$$

Ejemplo 4.9.6. Antes vimos que, por el teorema de compacidad, no podemos encontrar una fórmula o un conjunto de fórmulas en primer orden que expresen buen orden. Algunas lógicas de primer orden, sí lo permiten. En este ejemplo encontramos una axiomatización en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega_1}$ de la clase W de los buenos órdenes no vacíos, es decir, estructuras de la forma $\langle A, R\rangle$, donde $A\neq\varnothing$ y R bien ordena A.

W es la clase de los modelos de los siguientes enunciados.

$$\forall x\neg R(x,x)$$
$$\forall v_0,v_1,v_2[R(v_0,v_1)\wedge R(v_1,v_2)\to R(v_0,v_2)],$$
$$\forall v_0,v_1[R(v_0,v_1)\vee R(v_1,v_0)\vee v_0=v_1],$$
$$(\forall v\restriction\omega)\exists w\bigwedge_{n\in\omega}(R(w,v_n)\vee w=v_n).$$

Ejemplo 4.9.7. Continuemos con el estudio de los buenos órdenes ahora en $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$. Consideremos estructuras de la forma $\langle A,<,\ldots\rangle$ donde $<$ es un orden lineal en A.

(a) Para toda $\alpha\in\kappa$ existe una fórmula $\varphi_\alpha(v_0)\equiv\varphi_\alpha^<(v_0)$ de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ con exactamente una variable libre tal que para toda estructura $\mathfrak{A}$ y cada $x_0\in A$ se cumple lo siguiente

$$\mathfrak{A}\models\varphi_\alpha^<[x_0]\Leftrightarrow\langle\alpha,\in\rangle\cong\langle X_{x_0},<^{\mathfrak{A}}\restriction X_{x_0}\rangle, \qquad (\clubsuit)$$

donde $X_{x_0}=\{z\in A: z<^{\mathfrak{A}}x_0\}$, esto es, el conjunto de $<^{\mathfrak{A}}$-predecesores de x_0 está bien ordenado en tipo α.

Las fórmulas $\varphi_\alpha^<(v_0)$ se definen por recursión en α como sigue

$$\varphi_0^<(v_0) \equiv \neg\exists\, v_1[v_1 < v_0] \wedge \sigma, \qquad (\maltese)$$

$$\varphi_\alpha^<(v_0) \equiv \forall\, v_1[v_1 < v_0 \leftrightarrow \exists\, v_2(v_2 = v_1 \wedge \bigvee_{\xi<\alpha} \varphi_\xi^<(v_2))] \wedge \sigma \quad \text{para } \alpha > 0. \qquad (\divideontimes)$$

Recuerde que todo segmento inicial de un ordinal es un ordinal y que si un conjunto es isomorfo a un ordinal, tanto el isomorfismo como el ordinal son únicos. Aquí σ es el enunciado $<$ es un orden lineal. La afirmación hecha se prueba por inducción en α. Para $\alpha = 0$, $\varphi_0^<(v_0)$ afirma que no hay elementos $<$-menores que v_0, por lo cual $X_{x_0} = \varnothing$ y $\langle 0, \in\rangle \cong \langle X_{x_0}, <\rangle$; recíprocamente, si $(X_{x_0}, <) \cong \langle 0, \in\rangle$ significa que $X_{x_0} = \varnothing$, por lo que no existen elementos $<$-menores que x_0. Supongamos cierta la afirmación para α, y probemos para $\alpha + 1$. Sea $x_0 \in A$ y suponga que $\mathfrak{A} \models \varphi_{\alpha+1}^<[x_0]$; debemos cerciorarnos de que $\langle \alpha + 1, \in\rangle \cong \langle X_{x_0}, <\rangle$. Las siguientes observaciones están en orden.

1. Si se cumple para x_0 y β, (i) no puede ocurrir que se cumpla para x_0 y γ, $\gamma \neq \beta$ o (ii) para y_0 y β ($y_0 \neq x_0$).

Para (i), podemos suponer, sin perder generalidad, que $\gamma < \beta$, entonces $\langle \beta, \in\rangle \cong \langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$, lo cual es imposible. Para (ii), supongamos $x_0 < y_0$. Entonces $\langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle \cong \langle X_{y_0}, <\rangle$, otra vez una contradicción, pues un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a un segmento inicial (propio) suyo. Si queremos probar que $X_{x_0} \cong \langle \alpha + 1, \in\rangle$ debemos confirmar que x_0 tiene predecesor inmediato y que el segmento inicial determinado por este es isomorfo a $\langle \alpha, \in\rangle$. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi_{\alpha+1}^<[x_0]$ y sean $R = \{\alpha_z : z < x_0\}$ en forma creciente los ordinales que $\varphi_{\alpha+1}$ asegura existen, $\beta = \bigcup_{z<x_0} \alpha_z$ es un ordinal por lo que $\beta = \alpha + 1$. Se sigue que α es el mayor elemento en R de donde se deduce que existe $z < x_0$ tal que $\langle \alpha, \in\rangle \cong \langle X_z, <\rangle$, así que x_0 debe ser el sucesor de z y $\langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha + 1, \in\rangle$.

Ahora suponga que se cumple el lado derecho de ($\maltese$), esto es, $\pi : \langle \alpha + 1, \in\rangle \cong \langle X_{x_0}, <\rangle$ y confirmemos que $\mathfrak{A} \models \varphi_{\alpha+1}^<[x_0]$. Si $a < x_0$, entonces $\pi \restriction a : \langle \beta, \in\rangle \cong \langle X_a, <\rangle$ para algún $\beta < \alpha + 1$, por lo que se cumple el lado derecho de $\varphi_{\alpha+1}^<[a]$. Sea $a \in A$ y suponga que se cumple el lado derecho de ($\divideontimes$), entonces $\varphi_\xi^<[a]$ para algún $\xi < \alpha$, esto es, $(X_a, <) \cong \langle \xi, \in\rangle$ y como $\pi \restriction \xi$ es un isomorfismo, obtenemos $a < x_0$.

El caso α límite; suponga cierta la afirmación para cada $\beta < \alpha$. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi_\alpha^<[x_0]$ y probemos que $\langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$. Para cada $z < x_0$, $\langle X_z, <\rangle \cong \langle \alpha_z, \in\rangle$, de donde se sigue que $\alpha = \bigcup \alpha_z$, así que $\langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$. Supongamos que $\pi : \langle X_{x_0}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$ y comprobemos $\mathfrak{A} \models \varphi_\alpha^<[x_0]$. Sea $a \in A$ y suponga que se cumple $\varphi_\zeta^<(a)$, entonces $(X_a, <) \cong (\xi, \in)$, por lo que, como en el caso sucesor, $a < x_0$.

(b) Si $\mathfrak{A}$ está bien ordenada por $<^{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{A}$ tiene tipo ordinal α si y solo si $\mathfrak{A} \models \forall\, x \bigvee_{\xi<\alpha} \varphi_\xi^<(x) \wedge \bigwedge_{\xi<\alpha} \exists\, x \varphi_\xi^<(x)$.

$\Rightarrow$) Sabemos que existe $\pi : \langle \mathfrak{A}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$ así que el lado derecho de ($\maltese$) es cierto.

$\Leftarrow$) Debemos confirmar que $\langle \mathfrak{A}, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$, lo cual se sigue de que para cada $a \in A$ tenemos $\pi_z : \langle X_z, <\rangle \cong \langle \alpha_z, \in\rangle$ y cada $\xi < \alpha$ es un α_z por el segundo conyunto, lo que

da paso a

$$\pi = \bigcup \pi_z : \langle \mathfrak{A}, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle.$$

(c) Si $\alpha, \beta \in Or$ y uno de ellos es $< \kappa$, entonces $\langle \alpha, \in \restriction \alpha \rangle \equiv_{\kappa\omega} \langle \beta, \in \restriction \beta \rangle$ implica $\alpha = \beta$.

Suponga que $\langle \alpha, \in \rangle \equiv_{\kappa\omega} \langle \beta, \in \rangle$ y probemos que $\alpha = \beta$. Tomamos $\alpha < \kappa$, así que $\langle \alpha, \in \rangle$ tiene tipo ordinal α, de donde se deduce que $\langle \alpha, \in \rangle$ satisface el lado derecho de (✝) en (b), por lo que $\langle \beta, \in \rangle$ también lo hace, por tanto, $\langle \beta, \in \rangle$ tiene tipo ordinal α, lo que solo es posible si $\alpha = \beta$.

(d) Si $|\mathfrak{A}| < \kappa$, entonces que $\mathfrak{A}$ esté bien ordenada es equivalente a

$$\mathfrak{A} \models \neg \exists\, x \varphi_\alpha^<(x) \to \forall\, y \bigvee_{\xi < \alpha} \varphi_\xi^<(y) \qquad (\bigstar)$$

para todo $\alpha < \kappa$. Supongamos que $\mathfrak{A}$ está bien ordenada. Como $|\mathfrak{A}| < \kappa$, $(\mathfrak{A}, <) \cong (\beta, \in)$ con $\beta \in \kappa$. De no cumplirse el antecedente de (★), terminamos. Cúmplase entonces el antecedente, quiere decir que $\alpha > \beta$, por lo que ocurre el consecuente, para $\xi < \beta < \alpha$.

$\Leftarrow$) Sea α el menor ordinal que cumple el consecuente ($\mathfrak{A}$ está linealmente ordenada); α no puede ser cero, porque se cumple el consecuente, lo cual es imposible. Concluimos $(\mathfrak{A}, <) \cong (\alpha, \in)$.

Es un ejercicio ciertamente complejo, establecer que el ejemplo previo de ninguna manera afirma que podamos dar una fórmula o conjunto de fórmulas en $L_{\infty\omega}$ que caracterizen a los conjuntos bien ordenados.

Ejemplo 4.9.8. Podemos caracterizar a la clase T de los grupos de torsión en $L_{\omega_1\omega}$. Recuerde que un grupo G es de torsión si para todo elemento $g \in G$ existe $n \in \omega$ tal que $g^n = e$. Trabajamos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, \cdot, ^{-1}\}$. Los enunciados

$$\forall\, v_0, v_1 \left[\bigvee_{n \in \omega} \left(v_0 = \left(v_1^{n+1} \cdot v_0 \right) \right) \right],$$

$$\forall\, v_0, v_1 \left[\bigvee_{n \in \omega} \left(v_0 = \left(v_0 \cdot v_1^{n+1} \right) \right) \right] \qquad (\text{  })$$

junto con los axiomas de la teoría de grupos caracterizan a T, esto es, T coincide con la clase de los modelos de ellos, donde v^n se define recursivamente mediante

$$v^1 = v \qquad v^{n+1} = (v^n \cdot v).$$

En () expresamos que v^{m+1} se convierte en la identidad para algún $n \in \omega$.

Ejemplo 4.9.9. Ahora pretendemos caracterizar en $L_{\omega_1\omega}$ a la clase S de los grupos simples.

Definición 4.9.10. Un grupo es simple si sus únicos grupos normales son $\{e\}$ y G mismo.

Se verifica que

$$G \text{ es simple} \Leftrightarrow \forall\, a \in G, a \neq e \Rightarrow [a] = G, \qquad (\divideontimes)$$

donde $[a]$ denota el grupo normal generado por a en G. La condición en el lado derecho de $(\divideontimes)$ se puede expresar por un solo enunciado φ de $L_{\omega_1\omega}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$:

$$\forall\, x \Big[\neg(x = e) \rightarrow \forall\, y \bigvee_{\substack{n\in\omega \\ n>0}} \exists\, v_1, \ldots, v_n \bigvee_{(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{Z}^n} \Big(y = v_1 \cdot x^{m_1} \cdot v_1^{-1} \cdots v_n \cdot x^{m_n} \cdot v_n^{-1}\Big)\Big].$$

Es claro que $S = Mod(\varphi \wedge \gamma)$, donde γ son los enunciados de la teoría de grupos.

Ejemplo 4.9.11. Nos interesa caracterizar, en $L_{\omega_1\omega_1}$, la clase TS de las estructuras isomorfas a conjuntos transitivos. El enunciado $\psi_1 \wedge \psi_2$ del lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{E\}$ caracteriza a la clase de los modelos isomorfos a algún conjunto transitivo respecto a la relación de pertenencia, donde

$$\begin{aligned} \psi_1 \equiv & [\forall\, x, y((\forall\, z(zEx \leftrightarrow zEy)) \rightarrow x = y], \\ \psi_2 \equiv & (\forall\, v \restriction \omega) \bigvee_{n\in\omega} \neg(v_{n+1} E v_n); \end{aligned}$$

ψ_1 es el axioma de extensionalidad, mientras que ψ_2 asegura que la estructura está bien fundada. En efecto, $\psi_1 \wedge \psi_2$ se cumple en toda estructura transitiva $\langle A, \in\rangle$, por lo que se cumple en cada miembro de TS. Si tomamos una estructura $\mathfrak{B}$ que satisfaga $\psi_1 \wedge \psi_2$ podemos colapsarla y hacerla isomorfa a una estructura transitiva $\langle S, \in\rangle$.

Ejemplo 4.9.12. Toca el turno de caracterizar a los conjuntos H_{κ^+}, donde κ es un cardinal. Sea $\mathcal{L} = \{E\}$; trabajamos en $L_{\kappa^+\kappa^+}$, sean ψ_1, ψ_2 los enunciados del ejemplo previo y

$$\psi_3 \equiv (\forall\, v \restriction \kappa)\exists\, y \forall\, z \left[zEy \leftrightarrow \bigvee_{\xi<\kappa} (z = v_\xi) \right],$$

$$\psi_4 \equiv \forall\, y \left[\exists\, z(zEy) \leftrightarrow (\exists\, v \restriction \kappa)\forall\, z \left[zEy \leftrightarrow \bigvee_{\xi<\kappa} (z = v_\xi) \right] \right].$$

Entonces $\psi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ caracteriza, salvo isomorfismos, a la familia H_{κ^+}, pues los dos primeros aseguran que la estructura es transitiva, ψ_3 afirma que si tenemos a lo sumo κ elementos, conforman un conjunto en el modelo, mientras que ψ_4 asegura que los conjuntos de la estructura tienen cardinalidad a lo sumo κ.

Es claro que ψ se cumple en $\langle H_{\kappa^+}, \in\rangle$. Recíprocamente, si $\langle S, \in\rangle$ es un conjunto transitivo en el que se cumplen ψ_3 y ψ_4, entonces los elementos de S son subconjuntos de S y tienen cardinalidad a lo sumo κ por ψ_4. Por consiguiente, son hereditariamente de cardinalidad a lo sumo κ. Por inducción en $\xi < \kappa^+$ se comprueba que los conjuntos H_ξ son subconjuntos de S. Por lo tanto, $S = H_{\kappa^+}$.

Ejemplo 4.9.13. También podemos investigar la jerarquía de Zermelo con ayuda de $L_{\kappa\omega}$, es decir, estructuras del tipo $\mathfrak{B}_\alpha = \langle V_\alpha, \in\rangle$ con $\kappa = |\alpha|^+$. Por recursión definimos las fórmulas

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x) &\equiv \neg(x = x), \\ \vartheta_\alpha(x) &\equiv \bigvee_{\xi<\alpha} \forall\, y[yEx \to \vartheta_\xi(y)]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x) &\equiv \bigvee_{\xi<1} \forall\, y[y \in x \to \vartheta_\xi(y)] \\ &\equiv \forall\, y[yEx \to \vartheta_0(y)], \\ \vartheta_2(x) &\equiv \forall\, y[yEx \to \vartheta_0(y)] \vee \forall\, y[yEx \to \vartheta_1(y)]. \end{aligned}$$

Es claro que

$$\vartheta_\beta(\mathfrak{B}_\alpha) = \begin{cases} V_\beta & \text{si } \beta \leq \alpha, \\ V_\alpha & \text{si } \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

Por ejemplo, $\vartheta_0(\mathfrak{B}_\alpha) = \varnothing$, $\vartheta_1(\mathfrak{B}_\alpha) = \{\varnothing\}$, $\vartheta_2(\mathfrak{B}_\alpha) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, etc. Sea σ_α el siguiente

enunciado:

$$\sigma_\alpha \equiv \forall x, y[\forall z(zEx \leftrightarrow zEy) \to x = y] \wedge \forall x \bigvee_{\beta \leq \alpha} \vartheta_\beta(x).$$

Se comprueba que

$$\mathfrak{A} \in Mod(\sigma_\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C} \text{ para algun } \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}_\alpha$$

pues por la definición de $\vartheta_\alpha(x)$, podemos asociar un rango a x un $\hat{rk}(x)$ y colectamos $\hat{V}_\beta = \{y : \hat{rk}(y) < \beta\}$. En consecuencia,

$$\mathfrak{A} \in Mod(\sigma_\alpha) \Rightarrow |\mathfrak{A}| \leq |V_\alpha| = \beth_\alpha.$$

Ejemplo 4.9.14. Un grupo es κ-libre cuando todo subgrupo suyo de cardinalidad $< \kappa$ es libre. La propiedad de ser κ-libre se puede expresar en $L_{\infty\kappa}$:

$$\bigwedge_{\lambda<\kappa} \forall v \restriction \lambda \exists y \restriction \lambda \left(\bigwedge_{\mu<\lambda} \bigvee \left\{ y_\mu = \sum_\nu n_\nu x_\nu : (n_\nu) \in I \right\} \wedge \right.$$
$$\wedge \bigwedge_{\nu<\lambda} \bigvee \left\{ x_\nu = \sum_\mu n_\mu x_\mu : (n_\mu) \in I \right\} \wedge$$
$$\left. \wedge \bigwedge \left\{ \neg(\sum_\mu m_\mu x_\mu = 0) : (m_\mu) \in J \right\} \right),$$

donde I es el conjunto de sucesiones (n_i) de enteros que son cero, excepto en una cantidad finita, J es I menos la sucesión que es cero en todas partes.

Estos ejemplos son suficientes para reconocer que se consigue una gran expresividad en estos lenguajes infinitarios. No obstante, ocurre una gran pérdida.

Ejemplo 4.9.15. Supongamos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje con símbolos de constante c_0, c_1, c_2, ..., c_ω (posiblemente otros más). Sea T el conjunto de $L_{\omega_1\omega}$-enunciados

(i) $\forall x \bigvee_{n<\omega}(x = c_n)$;

(ii) $\{c_\omega \neq c_n : n < \omega\}$.

Es claro que todo subconjunto finito de T tiene modelo, pero T mismo no, por lo que falla compacidad para este conjunto de $L_{\omega_1\omega}$-enunciados. Por otro lado, (i) tiene un modelo

numerable pero carece de modelos innumerables, de donde se deduce la invalidez del teorema de Löwenheim-Skolem creciente.

Este sencillo ejemplo elimina cualquier esperanza de conservar la validez del teorema de compacidad o el de Löwenheim-Skolem creciente en lógicas infinitarias.

Esperamos que este breve relato sobre lógicas infinitarias sea suficiente para dar una idea aproximada de las mismas y despertar el interés del lector en sus estudio. Para abundar más al respecto referimos al lector a [FeVi17]. Enseguida, damos un salto gigantesco y estudiamos una de las extensiones de la lógica de primer orden más poderosa.

4.10 Lógica de Segundo Orden

¿Porqué lógica de segundo orden? Existen muchas y bien fundadas razones para introducir la la lógica de segundo orden (LSO). Nos gustaría mencionar algunas pocas de ellas, y empezamos con la expresividad limitada de la que adolece la lógica de primer orden (LPO). En LPO podemos expresar «todos», «alguno(s)», así como también «exactamente uno», «todos excepto dos», «a lo sumo tres», etc. que refieren a cantidades específcas finitas, pero no podemos hablar de finitud en general. La noción de finitud del universo no es definible mediante ningún enunciado de primer orden o conjunto de tales enunciados, pues enunciados con modelos finitos arbitrariamente grandes tiene un modelo infinito.

Otro ejemplo relevante ocurre, desde el punto de vista del lenguaje natural; cuantificadores usuales como la mayoría, al menos, muchos, pocos no ocurren en LPO. La noción la mayoría de A son B no es definible en LPO con igualdad con al menos dos 1-predicados A, B. Suponga que podemos definir la noción mediante $\mu(A, B)$ unido al conjunto infinito de enunciados al menos n A son B, al menos n A no son B ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Cualquier subconjunto finito de esta colección es satisfacible en algún dominio finito con $A - B$ suficientemente grande y $A \cap B$ un poco más grande. Por compacidad, toda la colección tiene un modelo con $A \cap B$, $A - B$ infinitos. Por Löwenheim-Skolem existe un modelo infinito que hace las dos expresiones equipotentes, por lo que la mayoría de A no son B, en oposición a $\mu(A, B)$.

Desde cierta perspectiva, esta carencia en expresividad se hace más dramática. Una teoría dada en LPO puede poseer varios modelos no estándar, algo que no se desea. Por ejemplo, PA tiene modelos no arquimedianos y por el teorema de Löwenheim-Skolem, ZFE tiene modelos numerables (si es que es consistente), un fenómeno conocido como la paradoja de Skolem. En forma recíproca, un modelo dado puede no estar definido en forma categórica por su teoría completa en LPO, como ocurre para los enteros, racionales o reales.

En vista de lo anterior, es natural buscar extensiones de la LPO. Los ejemplos sugieren considerar, en primera instancia, una lógica con el cuantificador *existe una cantidad finita de..*, esta lógica se llama lógica débil de segundo orden, también se puede añadir el cuantificador la mayoría de... Todo luce muy bien con esta extensión, no obstante, en

estas lógicas es imposible tener la validez simultánea de los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem (LS).

Ejemplo 4.10.1. El enunciado $\varphi(R)$ la mayoría, expresa que R es un orden lineal discreto con extremos, con elemento, el mayor posible, que tiene más sucesores que no sucesores (es decir, más puntos en el orden son sus sucesores). Tales órdenes sólo pueden ser finitos, aunque de tamaño arbitrariamente grande, lo que contradice compacidad. En seguida, considere el enunciado de que R es un orden lineal denso sin extremos, con un punto con más sucesores que predecesores. Existen modelos innumerables de esta clase, pero no numerables, así que falla LS.

Existen muchas posibles extensiones de la LPO, por lo que se vuelve importante discernir si realmente son más expresivas, y si se pierde alguna figura, si alguna propiedad es intrínseca de la LPO. Lograr la comparación de distintas lógicas es una tarea casi imposible, a menos que se establezcan algunas figuras fundamentales, situaciones que cualquier lógica debe contemplar. Este es el motivo de la lógica abstracta, cuyo estudio detallado queda lejos de los objetivos de este libro. La lógica abstracta logra establecer, con ciertas condiciones, un orden entre las lógicas, digamos, diciendo si una es más expresiva que otra, y en este orden la lógica de segundo orden resulta de las más expresivas. En el apartado final abundamos más sobre este tema.

El lenguaje de segundo orden con símbolos no lógicos S es una extensión del de primer orden con ese mismo lenguaje. Además de los recursos expresivos de este último, la versión de segundo orden contiene una cantidad numerable de símbolos de predicados y funciones sobre las que es posible cuantificar. Con ello ganamos un enorme poder expresivo a costa de la simplicidad, capacidad deductiva y algorítmica de la lógica de primer orden. Supongamos dado un lenguaje $\mathcal{L}_S^1$ de primer orden con lenguaje $\mathcal{L}_S$ (recuerde $\mathcal{L}_S$ contiene tres tipos de símbolos no lógicos: constantes, predicados y funciones). Para construir la versión $\mathcal{L}_S^2$ en segundo orden agregamos una cantidad numerable de símbolos de n-predicados $X_1^n, X_2^n, ...$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y asimismo una cantidad numerable de símbolos de n-función $F_1^n, F_2^n, ...$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En la práctica utilizaremos otras letras mayúsculas para representar a las nuevas variables y omitiremos el superíndice cuando no sea necesario para entender la fórmula. A la definición de «término» de un lenguaje de primer orden agregamos ahora las siguientes cláusulas. Si X^n es un símbolo de n-función y $t_1, ..., t_n$ son términos $X^n t_1 ... t_n$ es un término.

A la definición de «fórmula» agregamos las siguientes cláusulas.

a) Si X^n un símbolo de predicado y $t_1, ..., t_n$ son términos, $X^n t_1 ... t_n$ es una fórmula.

b) φ es una fórmula y X un símbolo de predicado $\forall X \varphi$ es una fórmula.

c) Si φ es una fórmula y X un símbolo de función $\forall X \varphi$ es una fórmula.

En lo que se refiere a la semántica, la definición de «estructura» no difiere en nada de la que dimos para el lenguaje de primer orden.

Definición 4.10.2. Una asignación de segundo orden es una función β que asocia a cada constante un elemento de U, a cada símbolo de n-predicado un subconjunto de U^n y a todo símbolo de n-función una función con dominio U^n y codominio U.

Supongamos fijo un vocabulario $\mathcal{L}_S$. Las definiciones siguientes se refieren a estructuras adecuadas para $\mathcal{L}_S$.

Definición 4.10.3. Sea $\mathbb{E} = \langle U, \sigma \rangle$ una estructura y β una asignación de segundo orden. A cada término t del lenguaje asociamos un elemento de U, al que denotaremos por $(\sigma\beta)(t)$, relativa a la $\mathbb{E}$ y a β, por medio de las siguientes cláusulas recursivas:

a) Si c es una constante, $(\sigma\beta)(c) = \sigma(c)$.

b) Si x es una variable, $(\sigma\beta)(x) = \beta(x)$.

c) Si f es un símbolo de n-función y $t_1 ... t_n$ son términos, $(\sigma\beta)(ft_1 ... t_n) = \sigma(f)\ ((\sigma\beta)(t_1), ..., (\sigma\beta)(t_n))$.

c) Si F es un símbolo de n-función y $t_1 ... t_n$ son términos, $(\sigma\beta)\ (ft_1 ... t_n) = \beta(F)\ ((\sigma\beta)(t_1), ..., (\sigma\beta)(t_n))$.

Las definiciones de «ocurrencia de variable libre» y «ocurrencia de variable acotada» se extienden de manera natural a las variables de segundo orden. De nuevo, un enunciado es una fórmula sin ocurrencias libres de variables. En las siguientes dos definiciones suponemos implícita la referencia a una estructura fija.

Definición 4.10.4. Sea β una asignación de segundo orden y x una variable. Una asignación γ es una x-variante de β, si γ y β coinciden en todos sus argumentos, salvo tal vez en x.

Si X es un símbolo de n-predicado, una asignación γ es una X-variante de β, si β y γ coinciden en todos sus argumentos salvo tal vez en X.

Si F es un símbolo de n-función, una asignación γ es una F-variante de β, si β y γ coinciden en todos los argumentos, salvo tal vez en F.

Sea $\mathbb{E} = \langle U, \sigma \rangle$ una estructura y β una asignación. Extendemos la definición de satisfacción de fórmulas de primer orden (por $\mathbb{E}$ y β) a $\mathcal{L}_S^2$ con las siguientes cláusulas

1) Si X es un símbolo de n-predicado y $t_1, ..., t_n$ son términos.

$$\mathbb{E} \vDash_\beta Xt_1 ... t_n \text{ si y solo si } ((\sigma\beta)(t_1), ..., (\sigma\beta)(t_n)) \in \beta(X)$$

2) Si X es un símbolo de predicado y φ una fórmula $\mathbb{E} \vDash_\beta \forall X\varphi$ si y solo si cada X-variante γ de β es tal que $\mathbb{E} \vDash_\gamma \varphi$.

3) Si F es un símbolo de función y φ una fórmula $\mathbb{E} \vDash_\beta \forall F\varphi$ si y solo si para cada F-variante γ de β, $\mathbb{E} \vDash_\gamma \varphi$.

Ésta es la que se llama semántica estándar para $\mathcal{L}_S{}^2$ y otorga un poder expresivo muy grande al lenguaje, como veremos en seguida. La identidad puede ser definida en segundo orden. Es decir, no necesitamos el símbolo «=» entre los símbolos lógicos (esto es, con un significado fijo en cada interpretación).

Lema 4.10.5. *Sea $\mathfrak{E} = \langle U, \sigma\rangle$ una estructura, β una interpretación y t_1 y t_2 términos entonces*

$$\mathfrak{E} \vDash_\beta \forall X(Xt_1 \to Xt_2) \text{ si y solo si } (\sigma\beta)(t_1) = (\sigma\beta)(t_2).$$

Demostración. Sean $(\sigma\beta)(t_1) = u_1$ y $(\sigma\beta)(t_2) = u_2$. Si $u_1 = u_2$ el resultado se sigue claramente. Si $u_1 \neq u_2$ entonces sea γ la X-variante de β tal que $\gamma(X) = \{u_1\}$. Se verifica que $\mathfrak{E} \nvDash_\gamma (Xt_1 \to Xt_2)$. ∎

En matemáticas muchos conceptos se introducen con una definición recursiva. Tenemos un conjunto básico $\mathcal{B}$ y una función (o varias) que contiene a $\mathcal{B}$ en su dominio. La cerradura de $\mathcal{B}$ por f se define de tal manera que cualquier elemento de $\mathcal{B}$, o que pueda ser obtenido de elementos de $\mathcal{B}$ por sucesivas aplicaciones de la función f a elementos de $\mathcal{B}$, pertenezca a esa cerradura. Supongamos por el momento que f es una función unaria y que la pertenencia a $\mathcal{B}$ puede ser expresada por una fórmula $\mathcal{B}'x$ con una variable libre. Entonces, la cerradura de $\mathcal{B}$ por f, que denotaremos $\mathcal{B}*_f$ puede ser definida por la siguiente fórmula de segundo orden

$$\forall X[(\forall z(\mathcal{B}z \to Xz) \wedge \forall z(Xz \to Xfz)) \to Xw]$$

es decir $w \in \mathcal{B}*_f$ si pertenece a todo conjunto que contiene a $\mathcal{B}$ y que contiene a todas las imágenes respecto a f de elementos suyos. Exclusivamente con los recursos que tenemos es imposible definir ese conjunto en primer orden. Supongamos que hubiera un conjunto de fórmulas Γx que satisface un individuo del universo si y solo si pertenece a la cerradura de $\mathcal{B}$ por f. Considere entonces el conjunto

$$\mathcal{A} = \Gamma(b) \cup \{\neg\mathcal{B}b, \forall x(\mathcal{B}x \to fx \neq b), \forall x(\mathcal{B}x \to ffx \neq b), ...\}$$

Se sigue que cada subconjunto finito $\mathcal{A}$ tiene modelo y, por el teorema de compacidad, $\mathcal{A}$ tiene modelo pero claramente la denotación de b no puede pertenecer a la cerradura de $\mathcal{B}$ por f. Cada vez que tengamos un concepto definido recursivamente y que no pueda ser definido de otra manera sabemos que podrá definírsele explícitamente en segundo orden, pero no en primero. Nos referimos a una definición que solo ocupa el vocabulario lógico.

Ejemplo 4.10.6. En 1872 Dedekind dió una caracterización categórica de la serie de los números naturales, es decir, especificó un conjunto de propiedades que si un conjunto $\mathcal{B}$ y una función f las satisfacen entonces $\langle \mathcal{B}, f\rangle$ es isomorfa a $\langle \mathbb{N}, s\rangle$ (donde s es la función sucesor, es decir, $s(n) = n+1$). Procedió de la siguiente manera. Si C es un conjunto y f una función tal que $f(C) \subseteq C$ entonces C es una f-cadena. Sea A un conjunto y $B \subset A$. A la intersección de todas las f-cadenas que contienen a B la llamaremos la f-cadena del conjunto B, y la denotaremos por $f_0(B)$. Ahora bien, supongamos que un conjunto K contiene un elemento 1 y que hay una función f tales que:

1. $f(K) \subseteq K$.
2. $1 \notin f(K)$.
3. $K = f_0(\{1\})$.
4. f es biyectiva.

Entonces, puede probarse fácilmente que $\langle K, f\rangle$ es isomorfa a $\langle \mathbb{N}, s\rangle$. La definición anterior puede expresarse en segundo orden usando solo el vocabulario lógico, como veremos enseguida.

Ejemplo 4.10.7. En el lenguaje de segundo orden es posible dar una definición explícita de un conjunto B que es isomorfo al conjunto de los números naturales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&\forall x(Bx \to Bfx) \wedge \forall x\forall y(x = y \leftrightarrow fx = fy)\wedge\\ &\exists y[By \wedge \forall x(Bx \to fx \neq y)\wedge\\ &\forall z(Bz \leftrightarrow \forall X(Xy \wedge \forall w(Xw \to Xfw)) \to Xz)].\end{aligned}$$

Dedekind no publicó sus resultados hasta 1889. En 1879 Frege introdujo la lógica moderna en su obra [Fr79]. En la parte final muestra cómo la lógica podría servir para desarrollar la aritmética sin necesidad de ningún axioma ni concepto no lógico. La lógica que emplea es de orden superior. Veamos un poco lo que hace en la parte final de esa obra. Sea R una función binaria. Frege define la función R^* que se da entre dos elementos a y b si hay un sucesión de elementos $a_1, ..., a_n$ (con un n un número finito) tales que,

$$aRa_1Ra_2R...a_nRb$$

desde luego, no puede usar la idea de número finito sin definirla previamente en términos puramente lógicos. Resuelve este problema con el mismo expediente que vimos antes. Es decir

$$yR^*z \leftrightarrow \forall X[(\forall w\forall v((Xw \wedge wRv) \to Xv) \wedge \forall v(yRv \to Xv)) \to Xz],$$

esto es, z es un descendiente de y si y sólo si z tiene todas las propiedades hereditarias que tienen los hijos de y. Note que esta definición no funcionaría si la propiedad de ser descendiente de y no fuese una de las propiedades hereditarias que tienen los hijos de y. Frege demuestra en seguida que la propiedad de ser descendiente de y es hereditaria, es decir que

$$\forall y \forall z \forall w((yR^*z \wedge zRw) \rightarrow yR^*w)$$

Más adelante prueba que los descendientes de los descendientes son descendientes, es decir que $(R^*)^* = R^*$. Por último, prueba que si R es una función, es decir $\forall x \exists y \forall z(xRz \leftrightarrow y = z)$, entonces

$$xR^*y \wedge xR^*z \rightarrow (yR^*z \vee y = z \vee zR^*y).$$

Como se ve Frege tenía todos los elementos para dar una caracterización de la estructura del conjunto ordenado de los números naturales. Como se sabe, Dedekind definió un conjunto finito como un conjunto que puede ser puesto en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí mismo. En segundo orden podemos definirlo de la siguiente manera:

$$DF(X) \equiv_{def} \exists F[\forall x \forall y(Fx = Fy \rightarrow x = y) \wedge \forall z(Xz \rightarrow XFz) \wedge \exists y(Xy \wedge \forall v(Xv \rightarrow Fv \neq y))]$$

y un conjunto X es finito si y sólo si no es Dedekind-infinito.

En cambio, la finitud no puede ser capturada en primer orden como veremos en seguida.
Sea

$$\theta_1 = \exists x\, x = x$$
$$\theta_2 = \exists x \exists y x \neq y$$
$$\theta_3 = \exists x \exists y \exists w(x \neq y \wedge x \neq w \wedge y \neq w)$$

etcétera.

Supongamos que hay un conjunto Σ de enunciados que caracteriza los conjuntos finitos, entonces el conjunto

$$\Sigma \cup \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...\}$$

debería tener un modelo, pues cada uno de sus subconjuntos finitos lo tiene. Pero eso es imposible pues ese modelo tendría que ser infinito.

Lema 4.10.8. *Existe un conjunto no satisfacible de enunciados de segundo orden tal que todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles.*

Demostración. Sea DF el enunciado que expresa que el dominio es finito, entonces el conjunto en cuestión es

$$\{DF, \theta_1, \theta_2, \theta_3, ...\}.$$

□

Denotemos por $X \subseteq Y$ a la fórmula

$$\forall z(Xz \to Yz).$$

Ahora podemos definir que un conjunto sea contable (es decir numerable o finito)

$$Cont(X) \equiv \forall Y(Y \subseteq X \to (DF(Y) \vee |X| = |Y|)),$$

donde $|X| = |Y|$ abrevia la fórmula

$$\begin{aligned} &\exists R[\forall x \forall y \forall z((xRz \wedge yRz) \to x = y) \wedge \\ &((zRx \wedge zRy) \to x = y) \wedge \forall z(Xz \to \\ &\exists w(Yw \wedge \forall v(zRv \leftrightarrow v = w))) \wedge \\ &\forall z(Yz \to \exists w(Xw \wedge \forall v(wRv \leftrightarrow v = z)))]. \end{aligned}$$

Igualmente podemos definir que un conjunto X tenga cardinalidad $\aleph_1$

$$\aleph_1(X) \equiv_{def} \neg Cont(X) \wedge \forall Y(Y \subseteq X \to Cont(Y) \vee |Y| = |X|),$$

o que tenga cardinalidad $\aleph_n$.

$$\begin{aligned} \aleph_n(X) \equiv_{def} &\neg Cont(X) \wedge \neg \aleph_1(X) \wedge ... \wedge \aleph_{n-1}(X) \wedge \\ &\forall Y(Y \subseteq X \to (Cont(X) \vee \aleph_1(X) \vee \ldots \vee \aleph_{n-1}(X) \vee |Y| = |X|)). \end{aligned}$$

Obviamente, los teoremas ascendente y descendente de Löwenheim-Skolem no son válidos para el lenguaje de segundo orden. Si hubiese un sistema de prueba tal que para cualquier conjunto $\Sigma \cup \{\varphi\}$ de enunciados de segundo orden φ fuera derivable de Σ ($\Sigma \vdash \varphi$) si y solo si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces valdría el teorema de compacidad pues si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ fuese insatisfacible, $\Sigma \vDash \varphi$ y, por lo tanto $\Sigma \vdash \varphi$ y habría un subconjunto finito Σ_0 de Σ tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi$. Por lo tanto $\Sigma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ sería insatisfacible. No hay ningún sistema de prueba o axiomático completo para la lógica de segundo orden. Por ello, la teoría de la prueba no tiene aquí mucha relevancia.

Ejemplo 4.10.9. Podemos caracterizar con una sola fórmula de segundo orden la estructura de los números racionales con su orden acostumbrado (es decir de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$) de la

siguiente manera:
Sea α el enunciado

$$\begin{aligned} &\forall x\forall y\forall z(x<y\wedge y<z\to x<z)\wedge\forall x\neg x<x\wedge\\ &\forall x\forall y(x<y\vee x=y\vee y<x)\wedge\forall x\exists y x<y\wedge\\ &\forall x\exists y\ y<x\wedge\forall x\forall y(x<y\to\exists z\ x<z\wedge z<y)\wedge \mathit{Cont}\end{aligned}$$

entonces es posible demostrar, como lo hizo Cantor, que $\langle U,<\rangle\vDash\alpha$ si y solo si hay un isomorfismo $f:\langle U,<\rangle\leftrightarrow\langle\mathbb{Q},<\rangle$.

Ahora bien, α contiene todavía una letra relacional extra lógica (a saber $<$) pero podemos substituirla por una variable predicativa binaria W para obtener la fórmula α' y entonces $\exists W\alpha'$ tendrá el mismo efecto sin símbolos extralógicos.

Ejemplo 4.10.10. Con una fórmula de segundo orden podemos caracterizar a la estructura $\langle\mathbb{R},<;+,\cdot;0,1\rangle$ de los números reales con su orden usual y las operaciones de suma y producto. En efecto, basta con que hagamos la conjunción de los axiomas de campo:

$$\begin{aligned}
&\forall x\forall y\ x+y=y+x\\
&\forall x\forall y\ x\cdot y=y\cdot x\\
&\forall x\forall y\forall z\ x+(y+z)=(x+y)+z\\
&\forall x\forall y\forall z(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)\\
&\forall x x+0=x\\
&\forall x x\cdot 1=x\qquad 1\neq 0\\
&\forall x\exists z\ x+z=0\\
&\forall x(x\neq 0\to\exists w(x\cdot w=1))\\
&\forall x\forall y\forall z\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z
\end{aligned}$$

de los axiomas de orden total

$$\forall x \neg x < x$$
$$\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$
$$\forall x \forall y \forall z \; x < y \vee x = y \vee \; y < x$$

Además, de

$$\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge z > 0) \rightarrow xz < yz)$$

y el axioma de completud

$$\forall X[(\exists x \; Xx \wedge \exists y \forall z(Xz \rightarrow z \leq y)) \rightarrow$$
$$(\exists u(\forall z \; Xz \rightarrow z \leq u)) \wedge \forall y(\forall s(Xs \rightarrow s \leq y)) \rightarrow u \leq y)]$$

donde, desde luego, $z \leq u \equiv_{def} z < u \vee z = w$. Llamemos a esa conjunción γ.

Es posible demostrar que un modelo de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_S^2$ hace verdadera a γ si y solo si es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, <; +, \cdot; 0, 1 \rangle$. De nuevo, podríamos eliminar las constantes extra lógicas y caracterizar esa estructura con una fórmula puramente lógica.

Los anteriores son algunos de los ejemplos que muestran cómo se acrecienta el poder expresivo de un lenguaje al pasar del primero al segundo orden con la semántica que acabamos de ver (llamada estándar). Dado que en la práctica matemática se hace frecuente referencia a estructuras que pueden ser caracterizadas en segundo orden, pero no en primero, parecería conveniente tomar como básica la lógica de segundo orden. Sin embargo, hay varias razones para no optar por esta posibilidad. Una es que, como hemos visto, lo que se gana en fuerza expresiva se compensa con una pérdida de herramientas importantes para la investigación. Los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem son de mucha utilidad en las aplicaciones al interior de las matemáticas. Por otro lado, podemos construir una fórmula de segundo orden sin símbolos extralógicos que es una verdad lógica si y solo si la hipótesis del continuo es verdadera (en la jerarquía teórico-conjuntista). Ahora bien, suponer que un enunciado lógico puede no ser ni obvio ni potencialmente obvio va contra nuestras intuiciones de lo que debe llamarse «lógica».

Veamos ahora la llamada semántica de Henkin para $\boldsymbol{\mathcal{L}}_S^2$. Un modelo de Henkin es una estructura $M = \langle U, P, F, \sigma \rangle$ donde U es un conjunto no vacío, P es una función con dominio $\mathbb{N}$, tal que $P(n)$ es un conjunto de n-relaciones en U; es decir $x \in P(n) \rightarrow x \subseteq D^n$, F es una función con dominio $\mathbb{N}$, tal que $F(n)$ es un conjunto de n-funciones de U^n a U, es decir $x \in F(n) \Rightarrow x : D^n \Rightarrow D$.

Ahora, un símbolo de n-predicado no tendrá en su rango de variación todas las n-relaciones de U, sino solo aquellas que son miembros de $P(n)$. De la misma forma un símbolo de n-función tendrá como rango de variación $F(n)$. Por otro lado σ asociará a cada n-predicado un elemento de $P(n)$ y a cada n-función un elemento de $F(n)$. Supongamos dado un modelo $\langle U, P, F, \sigma \rangle$.

Definición 4.10.11. Una asignación (Henkin) de segundo orden (para el modelo dado) es una función β que asocia a cualquier constante un elemento de U, a cada n-predicado un elemento de $P(n)$ y a toda n-función un elemento de $F(n)$.

Dado el modelo $\langle U, P, F, \sigma\rangle$, un término t del lenguaje y una asignación Henkin β, la definición de $(\sigma\beta)(t)$ es como antes. La definición de satisfacción de una fórmula en un modelo (Henkin) es la misma que antes solo que debemos recordar que las X-variantes y las F-variantes de una asignación que aparecen en las cláusulas relativas a los cuantificadores de segundo orden son asignaciones Henkin, es decir que toman sus valores de los conjuntos $P(n)$ y $F(n)$. A los modelos anteriores los llamaremos modelos Henkin. Una fómula α es Henkin-válida si es verdadera en todo modelo de Henkin y si $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es un conjunto de fórmulas diremos que α es consecuencia lógica Henkin de Σ si en todo modelo de Henkin en que son verdaderas todas las fórmulas de Σ, α es verdadera. Denotaremos a esas nociones por $\models_H \alpha$ y $\Sigma \models_H \alpha$, respectivamente. Evidentemente si una fórmula es Henkin-válida entonces es válida, pues en los modelos en que $P(n) = \{y | u \subset D^n\}$ y en que $F(n) = \{f | f \textit{ es una funcion y } f : D^n \longrightarrow D\}$ son modelos en el sentido de la semántica estándard. Es relativamente sencillo demostrar que la lógica de segundo orden con la semántica Henkin no tiene mayor poder expresivo que la lógica clásica de primer orden y comparte con ésta algunas otras propiedades. No demostraremos esta afirmación pero se hará más plausible, una vez que demos otra semántica para la lógica de segundo orden, que es lo que haremos enseguida. Un tipo de lógica de primer orden que parece rescatar de forma muy intuitiva la práctica de muchas ramas de las matemáticas es la llamada lógica multivariada (many-sorted logic). En lugar de que las variables corran sobre un dominio, hay diferentes tipos de variables que recorren diferentes dominios. Por ejemplo es usual considerar a un espacio vectorial como una estructura bi-variada formada por dos tipos de elementos, a saber, escalares y vectores. Para los escalares hay un par de operaciones (adición $+_c$ y multiplicación $\cdot_c$ de escalares, dos elementos distinguidos 0_c y 1_c) mientras que para los vectores tenemos una operación de adición $+_V$ y un elemento distinguido 0_V. Además, hay una operacion $\cdot$ de multiplicación entre escalares y vectores de tal manera que $\langle C, +_c, \cdot_c, 0_c, 1_c\rangle$ es un campo y $\langle V, +_V, 0_V\rangle$ es un grupo abeliano. Como hemos visto en otros capítulos, podríamos destacar otras operaciones de un espacio vectorial.

Ejemplo 4.10.12. Para enunciar las propiedades de la operación $\cdot$ podemos utilizar las variables x, y, z para escalares y las variables a, b, c para vectores de la siguiente manera:

$$\forall x \forall a \forall b \; x \cdot (a +_V b) = x \cdot a +_V x \cdot b$$
$$\forall x \forall y \forall a (x \cdot_c y) \cdot a = x \cdot (y \cdot a)$$
$$\forall x \forall y \forall a (x +_c y) \cdot a = x \cdot a +_V y \cdot b$$
$$\forall a \; 1 \cdot a = a$$

Este tipo de «amalgama» entre dos estructuras diferentes es usual en matemáticas y por ello conviene definir modelos con diferentes tipos de objetos y predicados, y funciones de índole diversa, además de utilizar diferentes tipos de variables. En las estructuras de esta lógica hay diferentes dominios o universos, y funciones, relaciones y elementos distinguidos. Cada elemento distinguido pertence a alguno de estos domininios. Las relaciones se dan entre elementos del mismo o de diferentes universos y las funciones se aplican a objetos de determinados dominios y las imágenes correspondientes pertenecen a un universo determinado. La signatura de un lenguaje para la lógica multivariada es una terna formada en primer lugar por un conjunto de elementos, llamados «tipos», uno por cada dominio del que trata la teoría, digamos $\{S_1, S_2 \ldots S_n\}$. En segundo lugar tenemos el vocabulario no lógico del lenguaje con su habitual división en símbolos funcionales, símbolos relacionales y constantes. En tercer lugar, hay una función llamada rango (que denotaremos simplemente con R) que determina para cada símbolo relacional a qué tipo de entidades se aplica su denotación (en cualquier interpretación) y algo similar ocurre para cada símbolo funcional. Así, por ejemplo, supongamos que usamos un lenguaje con los símbolos $\{0_c, 1_c, +_c, \times_c, 0_e, +_e \cdot\}$ para hablar de un espacio vectorial, donde la c y la e representan elementos u operaciones escalares y vectoriales respectivamente y $\cdot$ la multiplicación entre escalares y vectores. Entonces la signatura sería la siguiente:

$$\{c, e, \{\emptyset; \{0_c, 1_c, 0_e; +_c, \times_c, +_e \cdot\}; R\}$$

donde $R(0_c) = c$, $R(1_c) = c$, $R(0_e) = e$, $R(+_c) = (c, c, c)$, $R(\times_c) = (c, c, c)$, $R(+_e) = (e, e, e)$, $R(\cdot) = (c, e, e)$. No hemos agregado ningún símbolo relacional. Podríamos agregar, por ejemplo, los símbolos de identidad escalar y de identidad vectorial, digamos $\doteq_c$ y $\doteq_e$. Añadiríamos entonces $R(\doteq_c) = (c, c, 0)$, $R(\doteq_e) = (e, e, 0)$. El 0 al final de la triada indica que se trata de una relación.

En la signatura de un lenguaje multivariada puede también haber símbolos que no tengan un rango de aplicación limitada. Por ejemplo, puede ocurrir que tengamos una símbolo de identidad, $=$, tal que para variables x_i y x_j de cualesquiera tipos i, j sea una fórmula $\forall x_i \forall x_j x_i = x_j$. O puede ser que, para volver al ejemplo anterior, tengamos un símbolo de identidad escalar y otro de identidad vectorial. Pero, claro, en un caso o en

otro, su interpretación siempre será el conjunto diagonal del dominio correspondiente. Si no, no habría razones para decir que esos son símbolos de identidad.

Supongamos un lenguaje $\mathcal{L}$ de signatura $\Sigma = \langle I, \{P_j\}_{j\in J}, \{g_k\}_{k\in K}, \{d_l\}_{l\in L}, R\rangle$,

Definición 4.10.13. Una interpretación de L es un par $\langle U, \phi\rangle$ tal que,

a) U es una función con dominio I tal que si $i \in I$, $U(i)$ es un conjunto no vacío y $D(i) \cap D(j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

b) ϕ es una función tal que

b.1) $\phi(P_j) \subseteq U(j_1) \times ... \times U(j_n)$ si $R(P_j) = (j_1, ..., j_n, 0)$

b.2) $\phi(f_k) : U(k_1) \times ... \times U(k_m) \longrightarrow U(m+1)$ si $R(g_k) = (k_1, ..., k_m, k_{m+1})$

b.3) $\phi(c_i) \in U(r)$ si $R(d_i) = r$.

Definición 4.10.14. Una asignación para $\mathcal{L}$ es una función β que a una varible de tipo i ($i \in I$) asocia un elemento de $U(i)$

El resto de las definiciones semánticas se sigue de manera análoga. Ahora bien, si en un lenguaje multivariado el conjunto I de tipos es finito o numerable, entonces es posible traducirlo al lenguaje de primer orden. Basta con utilizar un solo tipo de varibles y un predicado, digamos D^i para cada $i \in I$. Si x_i es una varible de tipo i una fórmula de la forma $\forall x_i \alpha x_i$ del lenguaje multivariado se traduce en $\forall x(D^i x \to \alpha x)$. Similarmente $\exists x_i \alpha(x_i)$ se traduce en $\exists x(D^i x \wedge \alpha x)$. Tendremos el mismo poder expresivo en ambos tipos de lenguajes. Es claro que un lenguaje de segundo orden con semántica de Henkin es un caso particular de lenguaje multivariado. A continuación presentamos más ejemplos del uso de la lógica de segundo orden.

Ejemplo 4.10.15. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de 2-predicado. Este lenguaje es apropiado, como ya vimos, para estudiar la teoría de gráficas. Escribiremos un enunciado de segundo orden φ_{con} que se cumple en una gráfica $\mathfrak{G}$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ es conexa. Este

enunciado asegura que existe un orden lineal con ciertas propiedades. Por principio de cuentas,

$$\begin{aligned}&\forall x,y(L(x,y) \vee L(y,x) \vee y = x)\\ &\forall x,y(L(x,y) \to \neg L(y,x))\\ \forall x,y,z((L(x,y) \wedge L(y,z)) &\to L(x,z)).\end{aligned}$$

Sea $\varphi_{ol}(L)$ la conjunción de estas afirmaciones. Para establecer φ_{con} notamos que una gráfica $\mathfrak{G}$ es conexa si y sólo si sus vértices se pueden ordenar linealmente de tal forma que para cada vértice v, si v no es el primer vértice, existe un vértice previo en el orden y adyacente a v. Esto se expresa como,

$$\exists L^2(\varphi_{ol}(L) \wedge \forall x(\exists y L(y,x) \to \exists y(L(y,x) \wedge R(y,x)))).$$

Tomamos φ_{con} como este enunciado.

Ejemplo 4.10.16. Buscamos un enunciado φ_{inf} que se cumpla en una estructura si y sólo si la estructura es infinita. Sea φ_0 la conjunción de los siguientes enunciados de primer orden.

1. $\forall x \exists y R(x,y)$
2. $\forall x,y,z(R(x,y) \wedge R(x,z) \to y = z)$
3. $\forall x,y,z(R(x,y) \wedge R(z,y) \to x = z)$
4. $\exists y \forall x \neg R(x,y)$.

Supongamos que $\mathfrak{M} \models \varphi_0$. Por (1) y (2), podemos ver a $R(x,y)$ como una función en M. Dada cualquier $x \in M$, esta función regresa un único y con $R(x,y)$. El enunciado (3) asegura que esta función es inyectiva y por (4), la función no es sobre. Esto sólo es posible si M es infinito, pues una función inyectiva de un universo finito en sí mismo debe ser sobre. Sea $\varphi_{inf} \equiv \exists R^2 \varphi_0$.

Ejemplo 4.10.17. Describimos un enunciado φ_{inn} que se cumple en una estructura si y sólo si ésta es innumerable. Sea Q un 1-predicado; como en el ejemplo previo, podemos escribir un enunciado de segundo orden $\varphi(Q)$ que se cumple si y sólo si $Q(x)$ define un

conjunto finito. Sea $\varphi_{ol}(L)$ el enunciado de antes, que asegura que L es un orden lineal. Establecemos como φ_{num} la siguiente fórmula.

$$\exists L^2(\varphi_{ol}(L)) \wedge \forall x \forall Q^1 \forall y((Q(y) \to L(y,x)) \to \varphi(Q)).$$

Suponga que $\mathfrak{M} \models \varphi_{num}$; este enunciado φ_{num} afirma que podemos ordenar linealmente a los elementos del universo de tal suerte que cada elemento tiene sólo una cantidad finita de predecesores. Esto es posible si y sólo si el universo es a lo sumo numerable. Por tanto, $\mathfrak{M} \models \varphi_{num}$ si y sólo si M es numerable, por lo que hacemos $\varphi_{inn} \equiv \neg\varphi_{num}$.

4.11 Cuantificadores generalizados

En esta breve sección tratamos otra extensión de la lógica de primer orden, examinamos qué ocurre cuando añadimos nuevos cuantificadores, posibilidad que fue propuesta por Mostowski en 1957. Podemos pensar en los cuantificadores como operadores que elijen ciertos subconjuntos de entre todos los subconjuntos del universo. Así, el cuantificador existencial escoge los conjuntos no vacíos, mientras que el universal elije a todo el dominio. Es natural introducir nuevos «operadores» que elijan subconjuntos del dominio, por ejemplo, de diversos tamaños, o más generalmente, que elijan ciertas familias de subconjuntos del dominio. Sea $\daleth$ dicho operador o función, y $\mathcal{L}'$ el lenguaje que se genera al añadir un nuevo cuantificador Q, así que $\mathcal{L}$ es escencialmente un lenguaje de primer orden, excepto por la presencia de Q. Interpretamos Q como el cuantificador generalizado $\daleth$, si establecemos la definición de satisfacción para Q,

$$\mathfrak{A} \models Qv_n\varphi(v_n) \Leftrightarrow \{a \in A : \mathfrak{A} \models \varphi(a)\} \in \daleth(\mathfrak{A})$$

Recuerde que $\daleth(\mathfrak{A})$ es una colección de subconjuntos de A. Por supuesto, imponemos restricciones en la función $\daleth$. Primero, ya que los cuantificadores operan en conjuntos, los valores de $\daleth$ deben ser independientes de la estructura $\mathfrak{A}$, de su dominio A. Segundo, los cuntificadores no deben distinguir entre sus elementos, sino elegir conjuntos por su tamaño comparado con el del dominio. Si π es una función inyectiva de A sobre B y $X \in \daleth(A)$, entonces exigimos que $\pi[X] \in \daleth(B)$.

Pero pasemos a los ejemplos concretos. El ejemplo básico es Q_0, donde $\daleth$ simplemente escoge subconjuntos infinitos, esto es $Q_0x\varphi(x)$ significa que existe una cantidad infinita de x que satisfacen a φ. En general, si α es un ordinal, Q_α es un cuantificador para el que la función $\daleth$ escoge subconjuntos de tamaño $\aleph_\alpha$, de suerte que $Q_\alpha x\varphi(x)$ significa que existen al menos $\aleph_\alpha$ elementos que satisfacen a φ. Para formalizar un poco nuestra nueva lógica, estipulamos que si $\varphi(x)$ es una fórmula de esta lógica, así lo es $Q_\alpha\varphi(x)$, y como ya vimos, la semántica se establece mediante,

$$\mathfrak{A} \models Q_\alpha x\varphi[x, a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow |\{b \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[b, a_1, \ldots, a_n]\}| \geq \aleph_\alpha$$

Digamos que $L(Q_\alpha)$ es la lógica que se obtiene al añadir el cuantificador Q_α. En una

$\mathcal{L}$-estructura de está lógica de cardinalidad $< \aleph_\alpha$, el cuantificador Q_α es «trivial», pues $Q_\alpha x \varphi(x)$ siempre es falsa. Para evitar este tipo de patologías, se supone que las estructuras de interpretación, cuando se involucra esta lógica, tienen tamaño al menos $\aleph_\alpha$.

Bueno, ya definimos nuestra extensión de la lógica de primer orden, es evidente que ganamos en expresividad, pues con esta lógica abtracta podemos expresar, al menos, la existencia de subconjuntos de cardinalidad $\aleph_\alpha$; ¿hemos pérdido algo? Considere el ejemplo a continuación.

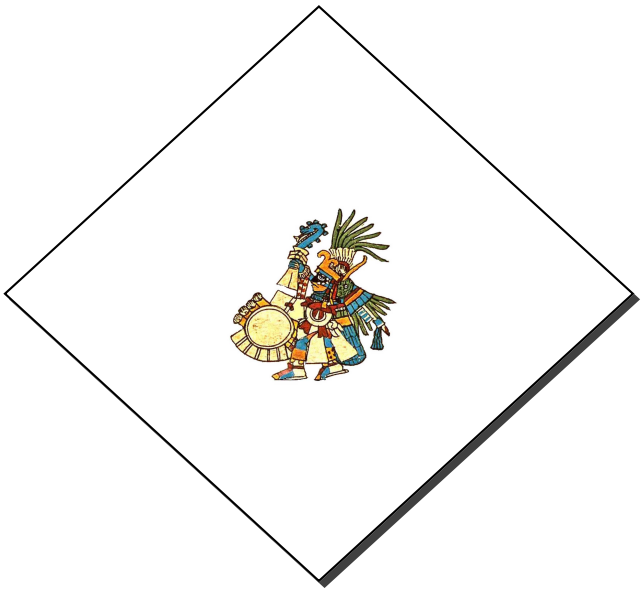
Ejemplo 4.11.1. Para cada ordinal α existe un conjunto Σ de $\aleph_\alpha$ enunciados de $L(Q_\alpha)$ tales que cada subconjunto finito de Σ tiene modelo, pero Σ carece de modelos. En efecto, sea $\{P_\xi : \xi < \aleph_\alpha\}$ una colección de símbolos de 1-relación, de estos símbolos consta nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, y con él construimos el conjunto Σ de $\mathcal{L}$-enunciados,

$$\begin{aligned}\Sigma =& \{\exists\, v_0(P_0(v_0) \wedge P_\xi(v_0)) : 0 < \xi < \aleph_\alpha\} \\ &\cup \{\neg\exists\, v_0(P_\xi(v_0) \wedge P_\eta(v_0)) : 0 < \xi < \aleph_\alpha\} \\ &\cup \{\neg Q_\alpha v_0 P_0(v_0)\}.\end{aligned}$$

El primer conjunto de enunciados establece la existencia de al menos un elemento que satisface a P_0 y a cada uno de los predicados restantes P_η. Por supuesto, podría existir un solo elemento que haga esto, si él mismo satisface a todos los predicados, pero el segundo conjunto de enunciados, excluye este escenario, de tal suerte que los dos primeros conjuntos de enunciados obligan a que existan al menos $\aleph_\alpha$ elementos del universo que satiafacen a P_0. El último enunciado afirma que, de existir, los elementos que validan a P_0 son menos que $\aleph_\alpha$. En consecuencia, Σ no puede ser satisfacible.

No obstante, si tomamos un subconjunto $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ de tamaño $\kappa < \aleph_\alpha$ sí es satisfacible, pues en tal caso Σ_0 sólo puede contener menos que $\aleph_\alpha$ símbolos de predicado, digamos, sin perder generalidad, que en Σ_0 aparecen exclusivamente los símbolos $\{P_\xi : \xi < \kappa\}$; establecemos un modelo $\mathfrak{A}$ de tamaño $\aleph_\alpha$, de hecho hacemos $A = \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$. Dado que $\kappa = \kappa \times \kappa$, establecemos como interpretación de los símbolos la siguiente: $P_0 = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta < \kappa\}$, y $P_\eta = \{(\eta, \alpha) : \alpha < \kappa\}$ para cada $\eta < \kappa$. Se sigue que $\mathfrak{A}$ es modelo de Σ_0, pues, aún si $\{\neg Q_\alpha v_0 P_0(v_0)\}$ ocurre en Σ_0, es claro que se cumple en $\mathfrak{A}$.

Este ejemplo indica que el teorema de compacidad usual no se cumple, incluso imponiendo condiciones más restrictivas como que el conjunto en cuestión sea κ-satisfacible.



4.12 Ejercicios

1. Dé dos modelos para el lenguaje $\{0, S\}$ que satiafagan PA1 y PA2, pero que no sean isomorfos.

2. Muestre que existen dos modelos no isomorfos del lenguaje $\{0, S\}$ con exactamente dos elementos. Corrobore que cualesquier dos modelos con exactamente dos elementos que satisfacen PA1 deben ser isomorfos.

3. Verifique que $PA \vdash \overline{k} \cdot \overline{m} = \overline{n}$ si y sólo si $k \cdot m = n$ y $PA \vdash \overline{k}^{\overline{m}} = \overline{n}$ si y sólo si $k^m = n$.

4. Constate que PA1-PA8 se cumplen en $\mathbb{N}$.

5. Cerciórese de que si el conjunto A contiene sólo un elemento, entonces el modelo $\mathfrak{M}$ del ejemplo 4.2.3 es isomorfo a $\mathbb{N}$, pero que si A contiene más de un elemento, la suma en $\mathfrak{M}$ no es conmutativa.

6. Confirme que $\mathbb{Z}$ con la interpretación natural de los símbolos de $\mathcal{L}$ satisface PA1-PA6. Encuentre una fórmula φ tal que $\mathbb{Z} \nvDash IND_\varphi$.

7. Verifique que el conjunto $\mathbb{R}^+$ de reales no negativos con la interpretación usual de los símbolos de nuestro lenguaje ($S(x) = x + 1$, $0^0 = 0$) satisface PA^-. Escriba una fórmula φ tal que $\mathbb{R} \not\models IND_\varphi$.

8. Sea $\mathfrak{M} = \langle M, 0, S\rangle$ un modelo del lenguaje $\{0, S\}$ que satisface PA1-PA2, y suponga que para cualquier subconjunto $A \subseteq M$, si A contiene al 0 y es cerrado respecto a la función sucesor S, es decir, si $a \in A$, entonces $S(a) \in A$, entonces $A = M$. Demuestre que existe un único isomorfismo $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$.

9. Muestre que para cualquier fórmula φ con una variable libre, $\mathbb{N} \models IND_\varphi$.

10. Pruebe que para toda fórmula φ, $\mathbb{N} \models IND_\varphi$.

11. *a*) Sea $\psi(x_0)$ la fórmula $0 + x_0 = x_0$. Confirme que

$$PA^- \vdash IND_\psi \to \forall x(0 + x = x).$$

b) Sea $\varphi(x_0, x_1)$ la fórmula $x_0 + x_1 = x_1 + x_0$. Verifique que

$$PA^- \vdash IND_\varphi \to \forall x, y(x + y = y + x).$$

12. Demuestre que $\mathbb{N}$ satisface PA9.

13. Para cualquier fórmula $\varphi(x)$ verifique lo siguiente.

a) $\{\forall x[(\forall y < x\varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall x\varphi(x)\} \vdash \exists x\neg\varphi(x) \to \exists x[\neg\varphi(x) \wedge \forall y < x\varphi(y)]$

b) $\{\exists x\neg\varphi(x) \to \exists x[\neg\varphi(x) \wedge \forall y < x\varphi(y)]\} \vdash \forall x[(\forall y < x\varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall x\varphi(x)$

14. Pruebe que

$$PA \vdash \exists y[y > \overline{1} \wedge \forall z(z \leq \overline{0} \wedge z > \overline{1} \to z|y)]$$

[Sugerencia: cerciórese de que

$$PA \vdash [\overline{2} > \overline{0} \wedge \forall z(z \leq \overline{0} \wedge z > \overline{1} \to z|\overline{2})]$$

y use $\exists$-introducción.]

15. Verifique que

$$PA \vdash (\forall z \leq x(z > \overline{1} \to z|y) \to (\forall z \leq S(x)(z > \overline{1} \to z|y \cdot S(x))$$

16. Pruebe que

$$PA \vdash p|x \wedge e \cdot s = p \to r|x$$

17. Constate que
$$PA \vdash r \cdot s = p \wedge r \geq p > \overline{1} \rightarrow s = \overline{1}$$

18. Demuestre las siguientes propiedades para V_ω.
    a) $x \in V_\omega$, $y \in x$ implican $y \in V_\omega$. Esto es, un elemento de un conjunto hereditariamente finito es hereditariamente finito.
    b) $x \in V_\omega$, $y \subseteq x$ implica $y \in V_\omega$.
    c) $\varnothing \in V_\omega$
    d) V_ω es cerrado respecto a la formación de subconjuntos finitos, conjunto potencia y unión.
    e) Si $x \in V_\omega$, x es ajeno a alguno de sus miembros.

19. Corrobore las siguientes afirmaciones
    a) El número 3 está en V_ω.
    b) Si $x \in V_\omega$, $x \cup \{x\} \in V_\omega$.
    c) Todo natural es elemento de V_ω.

20. Demuestre las siguientes propiedades.
    a) Si $x \in V_n$, entonces $x \subseteq V_n$
    b) $V_n \in V_{n+1}$.
    c) $V_n \subseteq V_{n+1}$
    d) $n \in V_{n+1}$
    e) $n \notin V_n$

21. Constate que se cumple lo siguiente en V_ω. Cualquier miembro de x tiene un elemento y ajeno a él, es decir, tal que $x \cap y = \varnothing$. [Sugerencia: tome y como el elemento de x de menor rango.]

22. Corrobore las siguientes afirmaciones.
    a) $x, y \in V_n$, implica $\{x, y\} \in V_{n+1}$
    b) $x \in V_n$ implica $Pot(x) \in V_{n+1}$.
    c) $x \in V_n$ implica $\bigcup x \in V_n$

23. Evalúe $\beth(3)$.

24. Demuestre que la aplicación $\beth : \omega \longrightarrow V_\omega$ es una biyección. [Sugerencia: para probar que es sobre, confirme que todo elemento de V_n está en el rango, por inducción en n (recuerde que el rango de un elemento de un conjunto x es menor que el rango de x). Si $\beth$ no fuese inyectiva, debería existir un conjunto de menor rango posible que es la imagen de dos naturales, derive una contradicción.

25. Demuestre las siguientes afirmaciones.

    a)

$$n\ BITAND\ m = ((n\ DIC\ 2)\ BITAND(m\ DIV\ 2))\cdot \\ \cdot 2 + (n\ MOD\ 2)\cdot(m\ MOD\ 2).$$

    b)

$$n\ BITOR\ m = ((n\ DIV\ 2)\ BITOR\ (m\ DIV\ 2))\cdot 2 + (n\ MODE\ 2) + \\ (m\ MOD\ 2) - (n\ MOD\ 2) - (n\ MOD\ 2)\cdot(m\ MOD\ 2).$$

26. Corrobore que $\urcorner(x+1) = 2^{\urcorner(x)} + x$

27. Cerciórese de que si $s \in t$, entonces $\urcorner(s) < \urcorner(t)$.

28. Muestre que toda fórmula Δ_0 es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0 en la que no aparece $\rightarrow$, y en la que cualquier negación aparece actuando sobre una fórmula atómica.

29. Muestre que el conjunto $\{2\}$ es Σ. [Sugerencia:

    - Escribe un término t (usando $\mathcal{A}$) tal que $t^{V_\omega} = 2$.
    - La fórmula $x = t$ representa al conjunto $\{2\}$, conviértala en una fórmula Σ.]

30. Muestre que, para cada $s \in V_\omega$, el conjunto $\{s\}$ es Δ_0. [Sugerencia: use inducción en el rango de s.]

31. Pruebe que un conjunto representado por una fórmula con dos variables libres, digamos $\{(x,y) \in V_\omega : \varphi(x,y)\}$, también esta representado por una fórmula con una variable libre. Si $\varphi(x,y)$ es una Σ-fórmula, la fórmula correspondiente con una sola variable libre, ¿puede ser Σ? ¿que ocurre con Δ_0?

32. Construya fórmulas Δ_0 para: x es una pareja ordenada con primera coordenada y, x es una pareja ordenada con segunda coordenada z.

33. Confirme que $\{x \in V_\omega : x \text{ es una 2-relación}\}$ es Δ_0

34. Constate que: x es el dominio de la función y es Δ_0. Haga algo similar para x es es rango de la función y.

35. Verifque que $\forall\,(x,y) \in z\varphi(x,y)$ y $\exists\,(x,y) \in z\varphi(x,y)$ son duales entre sí, esto es, muestre que $\forall\,(x,y) \in z\varphi(x,y)$ y $\neg(\exists\,(x,y) \in z\neg\varphi(x,y)$ son equivalentes.

36. Decimos que $x \in R_\omega$ está $\in$-ordenado, cuando para cualesquier $u, v \in x$, $u \in v \vee u = v \vee v \in u$.

a) Compruebe que sólo puede ocurrir una de las tres condiciones: $u \in v$, $u = v$, $v \in u$. [Sugerencia: use la noción del rango.]

b) Demuestre qie si $s \in V_\omega$ es transitivo y $\in$-ordenado, entonces s es un elemento de ω. La recíproca es obvia. [Sugerencia: si $s \neq \varnothing$, sea n el mayor elemento de s. Confirme que $n+1 \subseteq s$. Si $n+1 \neq s$, sea x un elemento de $s-(n+1)$ de menor rango posible. Derive una contradicción.]

c) Con estos resultados, dé otra representación Δ_0 de ω.

37. Confirme que el conjunto de sucesiones finitas es Δ_0.

38. Verifique que la fórmula $z = (x)_y$ se puede remplazar por una fórmula Δ_0.

39. Muestre que la multiplicación es Σ.

40. Suponga que $f : \omega \longrightarrow \omega$ es una función, y la gráfica de f es Σ en $\mathfrak{hf}$, esto es,

$$\{(x,y) : f(x) = y\}$$

es Σ. Sea $a \in \omega$ un número fijo y defina una función $g : \omega \longrightarrow \omega$ por recursión haciendo $g(0) = a$ y $g(n+1) = f(g(n)$. Corrobore que la gráfia de g es Σ.

41. Demuestre que las siguientes relaciones son Σ.

a) $z = (x\ DIV\ y)$, z es el cociente entero al dividir x por y

b) $z = (x\ MOD\ y)$, z es el residuo de dividir x por y

42. Confirme que la realción $z = (x\ BITAND\ y)$ es Σ. Algo similar para $z = (x\ \ BITOR\ y)$.

43. Constate que la exponenciación es Σ.

44. Escriba una fórmula que asegure que la adición de números es conmutativa. Precaución: $z = x + y$ abrevia una Σ-fórmula, pero $x + y$ no es un término, no puede aparecer como tal.

45. Dada una Σ-fórmula $yPot(x)$ que representa y es la colección de subconjuntos de x [Sugerencia: suponga que y es la potencia de x, entonces la potencia de $x \cup \{a\}$ es $y \cup y'$, donde y' es el resultado de unir a a cada miembro de y.]

46. La cerradura transitiva de un conjunto x es el menor conjunto y que contiene a x y es transitivo. Esto es, $x \subseteq y$ y y es transitivo, no existe un subconjunto $z \subset y$ con $x \subset z$ y z transitivo. Demuestre que la relación $yTC(x)$ es Σ.

47. Nuestro lenguaje para trabajar con aritmética incluye un símbolo para la operación de exponenciación. En algunos textos se prescinde de éste; para poder codificar es indespensable la exponenciación. En este ejercicio describimos cómo remediar la

ausencia de la exponenciación, para lo cual requerimos de la función β de Gödel, la cual nos permite hablar de sucesiones finitas en $\mathbb{N}$ a pesar de que no las tengamos realmente. Usaremos los siguientes hechos conocidos.

- Si a, b son enteros positivos y d es su máximo común divisor, entonces d es una combinación lineal de a y b. Esto es, existen enteros (no necesariamente positivos), u, v tales que $au + bv = d$.
- Si a, b son primos relativos positivos, existe un entero positivo u tal que $au \equiv 1 \mod b$.
- El teorema chino del residuo. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$ una sucesión de enteros positivos primos relativos. Entonces, para cualquier sucesión de naturales k_0, k_1, $\ldots$, k_n de la la misma longitud existe un natural z tal que para $i = 0, \ldots, n$, $z \equiv k_i \mod x_i$.

Nuestro interés radica en encontrar una representación Σ de sucesiones finitas en $\mathbb{N}$. El teorema chino nos acerca a nuestro objetivo. Suponga que elegimos $n+1$ enteros positivos primos relativos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y los fijamos. Para cualquier sucesión finita $k_0, k_1, \ldots, k_n$ existe un único natural z que, en cierto sentido, codifica la sucesión. Esto es, podemos recuperar la sucesión $k_0, \ldots, k_1$ (módulo congruencia) dividiendo z sucesivamente por términos de la sucesión fija $x_0, x_1, \ldots, x_n$, y tomando los residuos. División y residuo se representan fácilmente en $\mathbb{N}$, de hecho son Δ_0, por lo que casi tenemos una codificación de sucesiones de naturales de longitud $n+1$, módulo congruencia. El problema es que requerimos alguna forma de generar la sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n$. El siguiente ejercicio indica que existe una forma sencilla de producir una sucesión de $n+1$ naturales primos relativos, partiendo de cualquier sucesión de $n+1$ naturales. Escribimos $Rem(x, y)$ para el residuo de dividir x por y.

a) Defina la función $\beta(z, y, x)$ en ω como sigue,

$$\beta(z, y, x) = Rem(z, 1 + (x+1) \cdot y).$$

Sean $k_0, k_1, \ldots, k_n$ naturales. Pruebe que existen naturales z, y tales que para cada $i = 0, \ldots, n$ se cumple que

$$\beta(z, y, i) = k_i.$$

[Sugerencia: Ponga $j = \text{máx}\{n, k_0, \ldots, k_n\}$ y $y = j!$. Finalmente, para $i = 0, \ldots, n$, haga $x_i = 1 + (i+1) \cdot y$. Se tiene una sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de naturales, primos relativos según lo siguiente. Suponga que p es primo y $p|x_i$, $p|x_j$; derive una contradicción. Suponga que $i > j$, por la definición de x_i y x_j, $p|(i-j) \cdot y$, así que $p|(i-j)$ o $p|y$. Si $p|y$, como $p|x_i$, $p|1$, lo cual es imposible porque p es primo. En consecuencia, $p|(i-j)$. Tanto i como j son $\leq n$, de

donde se sigue que $0 < i - j \leq n$, y también $p \leq (i - j) \leq n$, lo que da lugar a $p|n! = y$, que, ya vimos, es imposible.

Ya que sabemos que la sucesión de los x_i es de primos relativos, por el teorema chino existe un natural z tal que para $i = 0, \ldots, n$, $z = k_i \bmod x_i$. Pero $k_i \leq j \leq y < x_i$, de hecho $Rem(z, x_i) = k_i$, esto es, $k_1 = Rem(z, 1 + (i+1) \cdot y) = \beta(z, y, i)$.]

b) La función β proporciona una codificación de sucesiones finitas con dos parámetros en $\mathbb{N}$. Para cada sucesión $k_0, \ldots, k_n$ podemos hallar números z, y, que podemos pensar como codificando la información en la sucesión, por lo que la sucesión se puede recuperar como $\beta(z, y, 0)$, ..., $\beta(z, y, n)$. Lo único que falta es mostrar que la función β es Δ_0. Demuestre que β se pude definir mediante una fórmula Δ_0. [Sugerencia: Muestre que el teorema chino se puede gereralizar para incluir que cualesquier dos números z_1, z_2 que satisfagan el teorema chino para z deben ser congruentes $\bmod(x_1, \ldots, x_n)$.]

c) El número a^b es el último (o el b-ésimo miembro de la sucesión a^0, a^1, a^2, ..., a^{b-1}, a^b, sucesión cuyo primer miembro es 1 y cualquier otro miembro es a veces el previo (suponemos $0^0 = 1$). Confirme que la relación $c = a^b$ es Σ en $\mathbb{N}$. [Sugerencia: por lo antes observado, $c = a^b$ es verdadera si y sólo si

$$\exists z, y[c = \beta(z, y, b) \wedge \forall i \leq b \exists n[u = \beta(z, y, i) \wedge \\ \wedge [(i = 0 \wedge S(0)) \vee \exists j \leq i \exists m(i = S(j) \wedge m = \beta(z, y, j) \wedge n = a \cdot m)]]]]$$

48. Demuestre que las siguientes son Σ en $\mathbb{N}$.

a) $T(s, t)$ se cumple cuando $\mathcal{G}(t)\ DIV\ 2^{\mathcal{G}(s)}]\ MOD\ 2 = 1$.

b) $\overline{T}(s, t)$ ocurre cuando $[\mathcal{G}(t)\ DIV\ 2^{\mathcal{G}(s)}]\ MOD\ 2 \neq 1$.

49. El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en un símbolo de constante c y dos símbolos de 1-función f y g. Sea Σ el conjunto de las siguientes fórmulas:

$$\vartheta_1 \equiv \forall v_0 f(f(v_0)) = f(v_0)$$
$$\vartheta_2 \equiv \forall v_0 g(g(v_0)) = g(v_0)$$
$$\vartheta_3 \equiv \forall v_0 (f(g(v_0)) = c \wedge g(f(v_0) = c))$$
$$\vartheta_4 \equiv \forall v_0 \forall v_1 ((f(v_0) = f(v_1) \wedge g(v_0) = g(v_1)) \rightarrow v_0 = v_1)$$
$$\vartheta_5 \equiv \forall v_1 \forall v_2 ((f(v_1) = v_1 \wedge g(v_2) = v_2) \rightarrow \exists v_0 (f(v_0) = v_1 \wedge g(v_0) = v_2))$$

a) Muestre que para cualquier $\mathcal{L}$-término t, ocurre al menos uno de los siguientes casos:

$\Sigma \models t = c$.

Existe una variable x tal que $\Sigma \models t = x$.

Existe una variable x tal que $\Sigma \models t = f(x)$.

Existe una variable x tal que $\Sigma \models t = g(x)$.

b) Sean A, B conjuntos no vacíos con $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Denotamos con $\mathfrak{M} = \langle A \times B, (a_0, b_0), f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$ la $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura indicada, donde $f^{\mathfrak{M}}(a, b) = (a, b_0)$ y $g^{\mathfrak{M}}(a, b) = (a_0, b)$. Demuestre que $\mathfrak{M} \models \Sigma$.

c) Muestre que las siguientes fórmulas son consecuencias lógicas de Σ:

$$\begin{aligned}
\vartheta_6 &\equiv f(c) = c \\
\vartheta_7 &\equiv g(c) = c \\
\vartheta_8 &\equiv \forall\, v_0 (f(v_0) = v_0 \leftrightarrow g(v_0) = c) \\
\vartheta_9 &\equiv \forall\, v_0 (g(v_0) = v_0 \leftrightarrow f(v_0) = c) \\
\vartheta_{10} &\equiv \forall\, v_0 (f(v_0) = v_0 \leftrightarrow \exists\, v_1 f(v_1) = v_0) \\
\vartheta_{11} &\equiv \forall\, v_0 (g(v_0) = v_0 \leftrightarrow \exists\, v_1 g(v_1) = v_0) \\
\vartheta_{12} &\equiv \forall\, v_0 ((f(v_0) = v_0 \wedge g(v_0) = v_0) \leftrightarrow v_0 = c) \\
\vartheta_{13} &\equiv \forall\, v_0 \forall\, v_1 (f(v_0) = g(v_1) \rightarrow f(v_0) = c)
\end{aligned}$$

d) Dados cuatro conjuntos no vacíos A, B, C, D y 4 elementos $a_0 \in A, b_0 \in B, c_0 \in C, d_0 \in D$, muestre que si A y C son equipotentes y si B y D también lo son, entonces las estructuras $\mathfrak{N} = \langle C, D, c_0, d_0 \rangle$ y $\mathfrak{M} = \langle A, B, a_0, b_0 \rangle$ son isomorfas.

e) Sea $\mathfrak{K} = \langle M, a, h, l \rangle$ un modelo de Σ. Defina

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in M : h(x) = x\}, \\
B &= \{x \in M : l(x) = x\}, \\
a_0 &= b_0 = a.
\end{aligned}$$

Pruebe que $\mathfrak{K}$ es isomorfo a $\mathfrak{M}$.

Para cada natural $n \geq 1$, describa un enunciado φ_n (respectivamente ψ_n) de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ que se cumpla en $\mathfrak{K}$ si y sólo si el conjunto A (respectivamente B) contiene al menos n elementos.

Demuestre, para cualesquier naturales n y $p \geq 1$, que la teoría

$$\boldsymbol{T}_{np} = \Sigma \cup \{\varphi_n, \psi_p, \neg\varphi_{n+1}, \neg\psi_{p+1}\}$$

es completa.

f) Sea φ un $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciado que se satisface en todo modelo infinito de Σ. Muestre que existe al menos un natural n tal que $\Sigma \cup \{\varphi_n \vee \psi_n\} \vdash \varphi$.

[Sugerencia: (a) Proceda por inducción en t:

- ✧ Si t es un símbolo de constante c o una variable x, alguna de las fórmulas $t = c$ o $t = x$ es universalmente válida, necesariamente una consecuencia de Σ.
- ✧ Si $t = f(u)$, la hipótesis de inducción da lugar a cuatro posibilidades:

① $\Sigma \models u = c$; entonces $\Sigma \models t = f(c)$; o $\Sigma \models f(c) = ffg(c)$ (ϑ_3), $\Sigma \models ffg(c) = fg(c)$ (ϑ_1) y $\Sigma \models fg(c) = c$; se sigue que $\Sigma \models t = c$.

② Existe una variable x tal que $\Sigma \models u = x$, entonces $\Sigma \models t = f(x)$.

③ Existe una variable x tal que $\Sigma \models u = f(x)$, entonces $\Sigma \models t = ff(x)$; podemos concluir (ϑ_1) que $\Sigma \models t = f(x)$.

④ Existe una variable x tal que $\Sigma \models u = g(x)$; entonces $\Sigma \models t = fg(x)$ y en consecuencia, por (ϑ_3), $\Sigma \models t = c$.

✧ El caso en el que $t = g(u)$ permite un razonamiento análogo.]

(b) Sean $\overline{f}, \overline{g}$ las aplicaciones $(a,b) \mapsto (a,b_0)$ y $(a,b) \mapsto (a_0,b)$, respectivamente, de $A \times B$ en $A \times B$. Para todas las parejas $(a,b) \in A \times B$, se cumple

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\overline{f}(a,b)) &= \overline{f}(a,b_0) = (a,b_0) = \overline{f}(a,b),\\
\overline{g}(\overline{g}(a,b)) &= \overline{g}(a_0,b) = (a_0,b) = \overline{g}(a,b),\\
\overline{f}(\overline{g}(a,b)) &= \overline{f}(a_0,b) = (a_0,b_0) = \overline{g}(a,b_0) = \overline{g}(\overline{f}(a,b)),
\end{aligned}$$

lo que muestra que las fórmulas $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ se satisfacen en $\mathfrak{M} = \langle A, B, a_0, b_0\rangle$. Sean $(a,b),(a',b') \in A \times B$. Si $\overline{f}(a,b) = \overline{f}(a',b')$, entonces $a = a'$; y si $\overline{g}(A,b) = \overline{g}(a',b')$, entonces $b = b'$, lo que corrobora que ϑ_4 se satisface. Más aún, si $\overline{f}(a,b) = (a,b)$ y si $\overline{g}(a',b') = (a,b')$, entonces $b = b_0$ y $a' = a_0$, en cuyo caso tenemos $\overline{f}(a,b') = (a,b)$ y $\overline{g}(a,b') = (a',b')$; hemos encontrado un elemento cuya imagen respecto a $\overline{f}$ es (a,b) y respecto a $\overline{g}$ es (a',b'), lo que constata que ϑ_5 se satisface en $\mathfrak{M} = \langle A, B, a_0, b_0\rangle$.

(c) Sea $\mathfrak{M} = \langle M, a, h, l\rangle$ un modelo arbitrario de Σ. En el primer caso de (a) hemos visto que $\mathfrak{M} \models \vartheta_6$ y se prueba en forma similar que $\mathfrak{M} \models \vartheta_7$.

Para todo elemento $x \in M$, si $h(x) = x$, entonces $k(x) = k(h(x)) = a$ (según ϑ_3); recíprocamente, si $l(x) = a$, entonces $l(h(x)) = a$ (según ϑ_3). Como también se cumple $h(h(x)) = h(x)$ (por ϑ_1), los elementos $h(x)$ y x tienen la misma imagen respecto a h y respecto a l; se sigue (por ϑ_4) que $h(x) = x$. Se deduce que $\mathfrak{M} \models \vartheta_8$. Demuestre en forma análoga que $\mathfrak{M} \models \vartheta_9$.

Para mostrar que $\mathfrak{M} \models \vartheta_{10}$, proceda como sigue: la implicación $\Rightarrow$ es evidente (tome $v_1 = v_0$). Sea $x \in M$. Si existe un elemento $y \in M$ tal que $x = h(y)$, entonces $h(x) = h(h(x)) = h(y)$ (según ϑ_1), por lo que $h(x) = x$. Pruebe ϑ_{11} en forma similar.

Respecto a $\mathfrak{M} \models \vartheta_{12}$, note que la implicación $\Leftarrow$ se sigue de ϑ_6 y ϑ_7. Para la otra dirección, sea x un elemento de M tal que $h(x) = x$ y $l(x) = x$; entonces se cumple $h(x) = a$ y $h(x) = a$ según ϑ_8 y ϑ_9; por consiguiente, $x = a$.

Verificar ϑ_{13} en $\mathfrak{M}$ es inmediato: si $x, y \in M$ son tales que $h(x) = l(x)$, entonces $h(h(x)) = h(l(y))$, así que (por ϑ_1 y ϑ_3) $h(x) = a$.

(d) Sean $f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}$ las interpretaciones de f, g en $\mathfrak{M} = \langle A, B, a_0, b_0\rangle$ y $f^{\mathfrak{N}}, g^{\mathfrak{N}}$ en $\mathfrak{N} = \langle C, D, c_0, d_0\rangle$. Podemos elegir una biyección λ (respectivamente μ) de A sobre C (respectivamente, de B sobre D) tal que $\lambda(a_0) = c_0$ (respectivamente, $\mu(b_0) = d_0$).

La aplicación $\gamma : A \times B \longrightarrow C \times D$, $(x, y) \mapsto (\lambda(x), \mu(y))$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$: γ es una biyección y $\gamma(a_0, b_0) = (c_0, d_0)$; para todas las parejas $(a, b) \in A \times B$,

$$\gamma(f^{\mathfrak{M}}(A, b)) = \gamma(a, b_0) = (\lambda(a_0), d_0) = f^{\mathfrak{N}}(\lambda(a), \mu(b)) = f^{\mathfrak{N}}(\gamma(a, b)),$$

y en forma enteramente análoga $\gamma(g^{\mathfrak{M}}(a, b)) = g^{\mathfrak{N}}(\gamma(a, b))$.

(e) Primero observe que $a \in A$ y $a \in B$ (ϑ_6 y ϑ_7); así que la estructura $\mathfrak{M}$ está bien definida. Sea e la aplicación de M en $M \times M$, $x \mapsto (h(x), l(x))$. La satisfacción en $\mathfrak{M}$ de las fórmulas ϑ_{10} y ϑ_{11} muestra que $A = Im(h)$ y $B = Im(l)$, por lo que los valores de e pertenecen a $A \times B$. La satisfacción de ϑ_4 muestra que e es inyectiva (si $(h(x), l(x)) = (h(y), l(y))$, entonces $x = y$), y la satisfacción de ϑ_5 demuestra que e es sobre $A \times B$ (si $x = h(x)$ y $y = \psi(y)$; entonces podemos encontrar un elemento $z \in M$ tal que $(x, y) = (h(z), \psi(z)) = h(z)$). Así que la aplicación e es una biyección de M sobre $A \times B$ que además es un monomorfismo entre $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$; ésta es una consecuencia de las siguientes propiedades:

- ✯ $e(a) = (h(a), l(a)) = (a, a) = (a_0, b_0)$.
- ✯ $e(h(x)) = f^{\mathfrak{M}}(e(x)) \qquad \forall\, x \in M$, ya que

$$\begin{aligned} e(h(x)) &= (h(h(x)), l(h(x))) = (h(x), a) \quad \text{por } \vartheta_1 \text{ y } \vartheta_3 \\ &= (h(x), b_0) = f^{\mathfrak{M}}(h(x), l(x)) = f^{\mathfrak{M}}(h(x)). \end{aligned}$$

- ✯ Para todo $x \in M$, $e(l(x)) = g^{\mathfrak{M}}(e(x))$ (por un argumento similar).

Las fórmulas

$$\varphi_n \equiv \exists\, v_0 \exists\, v_1 \cdots \exists\, v_{n-1} \left(\bigwedge_{0 \le i < j < n} \neg(v_i = v_j) \wedge \bigwedge_{0 \le i < n} f(v_i) = v_i \right)$$

y

$$\psi_n \equiv \exists\, v_0 \exists\, v_1 \cdots \exists\, v_{n-1} \left(\bigwedge_{0 \le i < j < n} \neg(v_i = v_j) \wedge \bigwedge_{0 \le i < n} g(v_i) = v_i \right)$$

(para $n \geq 1$) responden la pregunta.

Fije dos naturales positivos n y p. Mediante $\boldsymbol{M}_{np}$ denotamos los modelos de Σ en los que la interpretación de f y g tienen n y p elementos, respectivamente. Considere dos modelos $\mathfrak{K} = \langle M, a, h, l \rangle$ y $\mathfrak{K}' = \langle M', a', h', l' \rangle$ en $\boldsymbol{M}_{np}$. Sean $A = Im(h), B = Im(l)$, $A' = Im(h')$ y $B' = Im(l')$; A y A' son equipotentes (ambos tienen n elementos) y así lo son B y B' (tienen p elementos). Según (d), las estructuras $\mathfrak{C} = \langle A, B, a, a \rangle$ y $\mathfrak{C}' = \langle A', B', a', a' \rangle$ son isomorfas. Hemos visto que $\mathfrak{K}$ es isomorfo a $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{K}'$ a $\mathfrak{C}'$. Se sigue que cualesquier dos modelos de la teoría $\boldsymbol{T}_{np}$ son

isomorfos, lo que demuestra que esta teoría es completa (un resultado clásico de la teoría de modelos).

(f) Los modelos infinitos de Σ son aquellos modelos $\mathfrak{K} = \langle M, a, h, l\rangle$ de Σ para los que al menos uno de los conjuntos $Im(h)$ o $Im(l)$ es infinito. Se sigue que esos son exactamente los modelos de la teoría

$$\boldsymbol{T}' = \Sigma \cup \{\varphi_k \vee \psi_k : k \in \mathbb{N}^+\}.$$

Los enunciados que se satisfacen en todo modelo infinito de Σ son las consecuencias de $\boldsymbol{T}'$. Si φ es uno de ellos existe, por el teorema de compacidad, un subconjunto finito $X \subseteq \boldsymbol{T}'$ tal que $X \vdash \varphi$. Entonces, existe un entero $n \geq 1$ tal que $X \subseteq \boldsymbol{T}_n = \Sigma \cup \{\varphi_k \vee \psi_k : 1 \leq k \leq n\}$ y tenemos, naturalmente, $\boldsymbol{T}_n \vdash \varphi$. Pero es obvio que para todo natural k con $1 \leq k \leq n$, φ_k es una consecuencia de $\varphi_n \vee \psi_n$. Como resultado, las teorías $\boldsymbol{T}_n$ y $\Sigma \cup \{\varphi_n \vee \psi_n\}$ son equivalentes y se cumple

$$\boldsymbol{T}' \cup \{\varphi_n \vee \psi_n\} \vdash \varphi.$$

La teoría $\boldsymbol{T}'$ no es completa: como hemos visto, sus modelos son los modelos infinitos de $\boldsymbol{T}$; en tales modelos, uno de los conjuntos $Im(h)$ o $Im(l)$ puede tener una cantidad finita arbitraria de elementos; por ejemplo, las estructuras $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, 0, 0\rangle$ y $\mathfrak{D} = \langle \mathbb{N}, \{0\}, 0, 0\rangle$ son modelos de $\boldsymbol{T}'$ (satisfacen las fórmulas φ_k para todo $k \geq 1$) pero el primero satisface la fórmula ψ_2 mientras que el segundo no la satisface, por lo que estas estructuras no son elementalmente equivalentes.]

50. El lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ consiste en dos símbolos de 1-función r y l. Para todo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-término t hacemos $r^0(t) = l^0(t) = t$, y para todo entero k, $r^{k+1}(t) = rr^k(t)$ y $l^{k+1}(t) = ll^k(t)$. Sea φ la fórmula

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \exists u \exists v((r(x) = r(y) \vee l(x) = l(y)) \to x = y) \wedge \\ (x = r(u) \wedge x = l(v)) \wedge (\neg r(x) = l(x) \wedge rl(x) = lr(x)),\end{aligned}$$

y para toda pareja (m, n) de naturales, φ_{mn} es la fórmula

$$\forall x(\neg(r^m l^n(x) = x) \wedge \neg(r^m(x) = l^n(x))).$$

Suponga que $\boldsymbol{T}$ se conforma con φ junto con $\{\varphi_{mn} : m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (0, 0)\}$.

a) Muestre que para todo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-término t existe una variable x y naturales m, n tales que

$$\boldsymbol{T} \models \forall x(t = r^m l^n(x)).$$

b) Demuestre que $\mathfrak{M}_0$ es un modelo de $\boldsymbol{T}$, donde el universo de $\mathfrak{M}_0$ es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y

r, l se interpretan como las aplicaciones

$$\begin{aligned} s_r(i,j) &= (i, j+1) \quad \text{el sucesor derecho} \\ s_l(i,j) &= (i+1, j) \quad \text{el sucesor izquierdo.} \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}_0$ se llama modelo estándar de Σ.

c) Muestre que para cualesquier dos enteros a, b, la aplicación $h_{ab} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $h_{ab}(i,j) = (i+a, j+b)$ es un automorfismo de $\mathfrak{M}_0$.

d) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ son definibles en $\mathfrak{M}_0$?

[Sugerencia: Primero observe que φ es equivalente a la conjunción de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y (d(x) = d(y) \to x = y) \\ &\forall x \forall y (g(x) = g(y) \to x = y) \\ &\forall x \exists u x = d(u) \\ &\forall x \exists v (x = g(v)) \\ &\forall x \neg (d(x) = g(x)) \\ &\forall x (d(g(x)) = g(d(x)) \end{aligned}$$

Se sigue que para que φ se satisfaga en una estructura $\mathfrak{M} = \langle M, d^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$, es necesario y suficiente que $d^{\mathfrak{M}}$ y $g^{\mathfrak{M}}$ sean biyecciones que conmutan y que, en cualquier punto dado, nunca tomen el mismo valor. Además, si $\mathfrak{M} \models \varphi$ entonces para todo número natural m se cumple que para todo elemento $a \in M$,

$$d^{\mathfrak{M}^m}(g^{\mathfrak{M}}(a)) = g^{\mathfrak{M}}(d^{\mathfrak{M}^m}(a)).$$

Esto es obvio si $m = 0$; suponga que es correcto para $m = k$, y entonces

$$\begin{aligned} d^{\mathfrak{M}^{k+1}}(g\mathfrak{M}(a)) =& d^{\mathfrak{M}^k}(d^{\mathfrak{M}}(g^{\mathfrak{M}}(d^{\mathfrak{M}}(a)))) \quad \text{pues } g^{\mathfrak{M}} \text{ y } d^{\mathfrak{M}} \text{ conmutan} \\ =& g^{\mathfrak{M}}(d^{\mathfrak{M}^k}(d^{\mathfrak{M}}(a))) \qquad \text{hipótesis de inducción} \\ =& g^{\mathfrak{M}}(d^{\mathfrak{M}^{k+1}}(a)). \end{aligned}$$

(a) Proceda por inducción en la construcción del término t. Puesto que no hay símbolos de constante en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, el término más sencillo es, digamos, una variable y, y como y se puede escribir $d^0 g^0(y)$ (es el mismo término), la fórmula $\forall y (t = d^0 g^0(y))$ es válida; en particular, es una consecuencia de $\boldsymbol{T}$.

Si $t = du$ y $\boldsymbol{T} \vdash \forall x (u = d^m g^n(x))$, entonces $\boldsymbol{T} \vdash \forall x (t = d^{m+1} g^n(x))$.

Si $t = g(u)$ y $\boldsymbol{T} \vdash \forall x (u = d^m g^n(x))$, entonces en cada modelo $\mathfrak{M} = \langle M, d^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$ de $\boldsymbol{T}$ se cumple que para toda $a \in M$, $g^{\mathfrak{M}}(d^{\mathfrak{M}^m}(g^{\mathfrak{M}^n}(a))) = d^{\mathfrak{M}^m}(g^{\mathfrak{M}^{n+1}}(a))$, lo

que muestra $\boldsymbol{T} \vdash \forall x(t = d^m g^{n+1}(x))$.

(b) $\mathfrak{M}_0$ es un modelo de φ ya que las aplicaciones s_d y s_g son biyecciones que conmutan $[s_d(s_g(i,j))] = s_g(s_d(i,j)) = [(i+1, j+1)]$ y no toman el mismo valor en ningún punto $[(i, j+1) \neq (i+1, j)]$. Además, para cualesquier i y j en $\mathbb{Z}$ para cualesquier naturales m, n, se cumple

$$s_{d^m}(s_{g^n}(i,j)) = (i+n, j+m).$$

Se sigue que para $(m,n) \neq (0,0)$, tenemos

$$s_{d^m}(s_{g^n}(i,j)) \neq (i,j), s_{d^m}(i,j) = ((i, j+m) \neq (i+n, j) = s_{g^n}(i,j).$$

En consecuencia, $\mathfrak{M}_0$ es un modelo de cada fórmula φ_{mn} $((m,n) \neq (0,0))$ y, por consiguiente, es un modelo de $\boldsymbol{T}$.

(c) La aplicación h_{ab} es una biyección cuya inversa es h_{-a-b}. Más aún, para toda pareja $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se cumple

$$\begin{aligned} h_{ab}(s_d(i,j)) &= (i+a, j+1+b) = s_d(h_{ab}(i,j)) \\ h_{ab}(s_g(i,j)) &= (i+1+a, j+b) = s_g(h_{ab}(i,j)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, h_{ab} es un automorfismo de $\mathfrak{M}_0$.

De hecho, se puede probar que no hay otros automorfismos de $\mathfrak{M}_0$ que los h_{ab} (dado un automorfismo h de $\mathfrak{M}_0$, sea h_1, h_2 las aplicaciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ obtenidas al componer h con las dos proyecciones, es decir, $h(i,j) = (h_1(i,j), h_2(i,j))$); muestre que h_1 no depende de la segunda coordenada, que h_2 no depende de la primera y que las funciones de una variable asociadas naturalmente con h_1 y h_2 son biyecciones en $\mathbb{Z}$ que conmutan con la función sucesor.

(d) Ya sabemos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\varnothing$ son definibles. Sea $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ distinto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y de $\varnothing$. Sean i, j, k, l elementos de $\mathbb{Z}$ tales que $(i,j) \in A$ y $(k,l) \notin A$. Haga $a = k = i$ y $b = l - j$. Se cumple $h_{ab}(i,j) = (k,l)$, lo que demuestra que A no es invariante respecto al automorfismo h_{ab}, por lo que no es definible.]

51. Verifique que el teorema proposicional de interpolación de Robinson 4.7.8 se deriva de su caso particular el corolario 4.7.9.

52. Sea $\mathcal{C}$ una noción de consistencia, y suponga que para cada $n \in \omega$ tenemos un conjunto Φ_n de enunciados proposicionales tales que para cualquier $\Gamma \in \mathcal{C}$, existe $\varphi \in \Phi_n$ con $\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathcal{C}$. Pruebe que todo conjunto $\mathcal{C}$-consistente tiene un modelo V tal que para toda n, $V(\bigvee \Phi_n) = T$, es decir, para alguna $\varphi \in \Phi_n$, $V(\varphi) = T$.

53. Demuestre los siguientes resultados usando una noción de consistencia adecuada.

Defina por recursión

$$\begin{aligned} Rs^+(P(t_0,\ldots,t_{n-1})) &= \{P\} & Rs^-(P(t_0,\ldots,t_{n-1})) &= \varnothing \\ Rs^+(\neg\psi) &= Rs^-(\psi) & Rs^-(\neg\psi) &= Rs^+(\psi) \\ Rs^+(\psi\vee\theta) &= Rs^+(\psi)\cup Rs^+(\theta) & Rs^-(\psi\vee\theta) &= Rs^-(\psi)\cup Rs^-(\theta) \\ Rs^+(\exists\, x\psi) &= Rs^+(\psi) & Rs^-(\exists\, x\psi) &= Rs^-(\psi) \end{aligned}$$

Los elementos de $Rs^+(\varphi)$ son los símbolos de predicado que aparecen en forma positiva en φ, los de $Rs^-(\varphi)$ aparecen en forma negativa. Si Γ es un conjunto de enunciados, defina,

$$\begin{aligned} Rs^+(\Gamma) &= \bigcup\{Rs^+(\varphi) : \varphi\in\Gamma\} \\ Rs^-(\Gamma) &= \bigcup\{Rs^-(\varphi) : \varphi\in\Gamma\} \end{aligned}$$

(i) Pruebe que si Γ_0,Γ_1 son conjuntos de enunciados consistentes y $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ es inconsistente, existe un enunciado χ tal que $\Gamma_0\models\chi$, $\Gamma_1\models\neg\chi$, $Rs^+(\chi)\subseteq Rs^+(\Gamma_0)\cap Rs^-(\chi)\subseteq Rs^-(gG_0)\cap Rs^+(\Gamma_1)$.

(ii) Concluya que para cualesquier enunciados φ,ψ con $\models\varphi\to\psi$, existe un enunciado χ tal que $\models\varphi\to\chi$, $\models\chi\to\psi$ y $Rs^{\pm}(\chi)\subseteq Rs^{\pm}(\varphi)\cap Rs^{\pm}(\psi)$.

La parte (ii) se conoce como el teorema de interpolación de Lyndon. [Sugerencia: Modifique apropiadamente la noción de consistencia que se empleó en la prueba del teorema 4.7.30.]

54. En cada inciso, φ,ψ son enunciados tales que la igualdad ocurre a lo sumo en uno de ellos. Constate que $\varphi\models\psi$, pero que ambos carecen de interpolante de Craig en el que no aparezca la igualdad.

a) $\varphi\equiv\exists\, x(P(x)\wedge\neg P(x))$, $\psi\equiv\exists\, xQ(x)$.

b) $\varphi\equiv\exists\, xQ(x)$, $\psi\equiv\exists\, x(P(x)\vee\neg P(x))$

c) $\varphi\equiv\forall\, x,y(x=y)$, $\psi\equiv(P(x)\leftrightarrow P(y))$.

55. En el ejercicio 53 no se afirma que la ocurrencia de símbolos de función o constante o el de igualdad en un interpolante χ se puede correlacionar en forma similar con su ocurrencia en los conjuntos Γ_i.

(i) Redacte en forma precisa una conjetura al respecto y explique porqué la prueba no establece la conjetura.

(ii) Proporcione un contraejemplo para confirmar que la conjetura es falsa.

(iii) Formule y pruebe la siguiente forma débil de la conjetura involucrando igualdad, si el lenguaje carece de símbolos de función o constante y el de igualdad no aparecen en los miembros de Γ_0 o Γ_1, entonces el resultado del ejercicio

53(i) se cumple con la condición adicional de que el símbolo de igualdad no aparece en χ.

[Sugerencia: Para(iii) modifique la noción de consistencia para evadir el caso problemático reseñado en (i).]

56. Sean Σ, Γ conjuntos de $\mathcal{L}$-enunciados tales que $\Sigma \cup \Gamma$ es incosnstente. Muestre que existe un $\mathcal{L}$-enunciado θ tal que,

    a) $\Sigma \models \theta$ y $\Gamma \models \neg\theta$.

    b) Todo símbolo de relación, función o constante que aparece en θ, ocurre en algún elemento de Σ y en algún miembro de Γ.

57. (a) Exhiba como falla el teorema de consistencia de Robinson 4.7.39 cuando T no se supone completa.

    (b) Demuestre que el teorema de consistencia de Robinson se cumple si la hipótesis de que T es completa se remplaza por la hipótesis de que T es consistente, y que para $i = 1, 2$, T contiene cada consecuencia de T_i en $\mathcal{L}$.

58. Suponga que el lenguaje $\mathcal{L}$ carece de símbolos de función o constante y que un conjunto de enunciados $\Sigma(P)$ de $\mathcal{L} \cup \{P\}$ define a P en forma implícita. Constate que existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que,

    a) $\Sigma(P) \models P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

    b) Cualquier símbolo de $\mathcal{L}$ que ocurre en φ aparece en forma positiva y negativa en $\Sigma(P)$.

59. Sean $\mathcal{L}'$ una expansión del lenguaje $\mathcal{L}$, P un símbolo de n-predicado en $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ y T una $\mathcal{L}'$-teoría. Suponga que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y cualesquier dos expansiones $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$ modelos de$T$, las relaciones de $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{A}''$ corresponden a P son las mismas. Pruebe que existe una fórmula $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ con

$$T \models P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n).$$

60. Sean $\mathcal{L}'$ una expansión de $\mathcal{L}$ y T' una $\mathcal{L}'$-teoría. Suponga que cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tiene a lo sumo una expansión a un modelo de T'. Demuestre que existe una teoría T en $\mathcal{L}$ tal que los modelos de T son exactamente los reductos de los modelos de T' a $\mathcal{L}$.

61. Muestre que PA tiene dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\langle A, + \rangle \cong \langle B, + \rangle$ pero $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$. [Sugerencia: use el teorema de Beth.]

62. Suponga que el lenguaje $\mathcal{L}$ carece de símbolos de función, y sean φ, ψ $\mathcal{L}$-enunciados tales que ψ es universal y $\models \varphi \to \psi$. Pruebe que que existe un $\mathcal{L}$-enunciado universal θ tal que $\models \varphi \to \theta$, $\models \theta \to \psi$, y cada símbolo de relación o constante que

ocurre en θ, aparece en φ y ψ. Esto se conoce como el teorema de interpolación de Malitz. [Sugerencia: Sin perder generalidad alguna, suponga que ψ carece de cuantificadores, porque las variables acotadas en ψ se pueden remplazar por constantes. Sea S el conjunto de conjuntos finitos s de $\mathcal{L}(E)$-enunciados tales que sólo una cantidad finita de constantes en E aparecen en s, y s se puede escribir como una unión $s = s_1 \cup s_2$ donde s_2 carece de cuantificadores, s_1, s_2 tienen modelo y

(❋) no existe unenunciado universal θ de $\mathcal{L}(E)$ con

$$\models \bigwedge s_1 \to \theta, \qquad \models \bigwedge s_2 \to \neg\theta$$

y cada símbolo de relación o constante (incluyendo $e \in E$) que ocurra en θ, aparece en s_1 y en s_2.

Confirme que se trata de una noción de consistencia. Concluya que cada $s \in S$ tiene un modelo, por lo que $\{\varphi, \neg\psi\} \notin S$, lo que significa que existe un $\mathcal{L}$-enunciado θ con la forma requerida.]

63. Considere el enunciado

$$\begin{cases} < \text{ es un orden lineal}, \\ \forall x[\forall y(y < x \to \psi(y)) \to \psi(x)] \to \forall x \psi(x), \end{cases} \qquad (✷)$$

donde ψ es una $L_{\kappa\omega}$-fórmula con una única variable libre. Verifique que todo modelo de (✷) satisface (✸) del ejemplo 4.9.6 para toda $\alpha < \kappa$.

Concluya que todo modelo de (✷) de cardinalidad $< \kappa$ está bien ordenado. Sin embargo, exhiba estructuras que satisfacen (✷) pero no están bien ordenadas.

64. Considere el enunciado σ_α del ejemplo 4.9.13. Demuestre que

a) $\mathfrak{B}_\alpha \in Mod(\sigma_\beta)$ para $\beta \geq \alpha$.

b) $\mathfrak{A} \in Mod(\sigma_\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_\alpha$.

c) El recíproco de (b) no es cierto.

d) Toda subestructura consistente en un elemento de alguna $\mathfrak{B}_\alpha$ es modelo de σ_β para todo $\beta \in Or$, $\beta > 0$.

e) Cualquier subestructura de $\mathfrak{B}_\alpha$ extensional y transitiva es modelo de σ_α.

65. Encuentre un $L_{\kappa\omega}$-enunciado, donde $\kappa = (2^\omega)^+$, y un $L_{\omega_1\omega_1}$-enunciado que caractericen al modelo $\langle \mathbb{R}^+, +, 1\rangle$, salvo isomorfismos.

66. Compruebe que existe un $L_{\omega_1\omega_1}$-enunciado σ de $L_{\omega_1\omega_1}$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $|A| \leq \omega$. [Sugerencia: Considere

$$(\exists\, x_n)_{n<\omega} \forall\, y \bigvee_{k<\omega} (y = x_k).]$$

67. Sean $\mathcal{L} = \{U, S, E, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ y φ la conjunción de los siguientes enunciados.

① $\forall x((U(x) \leftrightarrow \neg S(x))$.

② $\forall x \forall y(E(x,y) \rightarrow U(x) \wedge S(y))$.

③ $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$.

④ $U(c_i)$ para toda i.

⑤ $\forall y \forall z[S(y) \wedge S(z) \wedge \forall x((E(x,y) \leftrightarrow E(x,z))) \rightarrow y = z)$.

⑥ $\forall x(U(x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{\infty} x = c_i)$

Compruebe que todo modelo de φ tiene cardinalidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$, por lo que este es otro ejemplo de la invalidez del teorema de Löwenheim-Skolem creciente en lógica infinitaria.

68. **Los conjuntos η_α.** En este ejercicio estudiaremos este tipo de conjuntos. Si $(L, <)$ es un orden lineal y $A, B \subseteq L$, escribimos $A < B$ si para cada $x \in A$ para todo $y \in B$ $x < y$. Si $A = \{a\}$ escribimos $a < B$, en forma similar $A < b$.

Un conjunto η_α es un orden lineal $(L, <)$ tal que si $A, B \subseteq L$, $A < B$ y $|A|, |B| < \aleph_\alpha$, entonces existe $c \in L$ tal que $A < c < B$. En consecuencia, un conjunto η_0 es simplemente un conjunto linealmente ordenado denso.

Si α es un ordinal definimos el conjunto:

$$H_\alpha = \{f \in 2^\alpha : \exists \xi < \aleph_\alpha \forall \eta \in (\xi, \aleph_\alpha)(f(\xi) = 1 \wedge f(\eta) = 0)\}.$$

En H_α consideramos el orden inducido por $2^{\aleph_\alpha}$, esto es, $f < g$ en H_α si $f < g$ en $2^{\aleph_\alpha}$, donde $2^{\aleph_\alpha}$ porta el orden lexicográfico.

a) Sea α un ordinal y $cf(\aleph_\alpha) = \aleph_\gamma$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(i) H_α es un conjunto η_γ.

(ii) $cf(H_\alpha, <) = \aleph_\gamma$. Aquí la cofinalidad se refiere a la cardinalidad del conjunto más pequeño cofinal en H_α con el orden $<$.

(iii) $cf(H_\alpha, <) = \aleph_\gamma$.

(iv) $|H_0| = \aleph_0$ y para $\alpha > 0$, $|H_\alpha| = \sum_{\beta<\alpha} 2^{\aleph_\beta}$.

[Sugerencia: Para cada $f \in H_\alpha$ sea $\zeta_f < \aleph_\alpha$ tal que $f(\zeta_f) = 1$ y $f(\eta) = 0$ para toda $\eta \in (\zeta_f, \aleph_\alpha)$. (i) Suponga que $A, B \subseteq H_\alpha$ con $A < B$ y $|A|, |B| < \aleph_\gamma$. Es obvio que podemos suponer que alguno de A, B no es vacío. Corrobore que hay tal posibilidad.

Caso 1. $A \neq \varnothing \neq B$. Sean

$$\xi = \sup\{\zeta_f : f \in A\},$$
$$\rho = \text{máx}\{\xi + 1, \sup\{\zeta_f : f \in B\}\}.$$

Así, $\xi, \rho < \aleph_\alpha$ ya que $|A|, |B| < \aleph_\gamma = cf(\aleph_\alpha)$. Defina $g \in 2^{\aleph_\alpha}$ mediante (para cada $\eta < \aleph_\alpha$):

$$g(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \leq \xi \text{ y } \exists f \in A(f \restriction \eta = g \restriction \eta \wedge f(\eta) = 1), \\ 0 & \text{si } \eta \leq \xi \text{ y no existe tal } f, \\ 0 & \text{si } \xi < \eta \leq \rho, \\ 1 & \text{si } \eta = \rho + 1, \\ 0 & \text{si } \rho + 1 < \eta < \aleph_\alpha. \end{cases}$$

Compruebe que $g \in H_\alpha$. Verifique que $A < g < B$: note que $g \notin A \cup B$ pues $g(\rho + 1) = 1$ mientras que $f(\rho + 1) = 0$ para cualquier $f \in A \cup B$; primero suponga que $f \in A$ y que $g < f$; sea $\eta = \chi(g, f)$. Entonces $g(\eta) = 0$ y $f(\eta) = 1$, de donde se sigue que $\eta \leq \xi$ y $g \restriction \eta = f \restriction \eta$, lo que contradice la definición de $g(\eta)$.

Suponga que $f \in B$ y $f < g$. Sea $\eta = \chi(f, g)$; así, $f(\eta) = 0$ y $g(\eta) = 1$. Se cumple que $\eta = \rho + 1$, de lo contrario, como $g(\eta) = 1$, tendríamos $\eta \leq \xi$ y existiría $h \in A$ tal que $h \restriction \eta = g \restriction \eta$, $h(\eta) = 1$, por lo que $f \restriction \eta = g \restriction \eta = h \restriction \eta$, $f(\eta) = 0$, $h(\eta) = 1$, por tanto $f < h$, pero $f \in B$ y $h \in A$, una contradicción.

Es claro que $\zeta_f \leq \rho$. Como

$$g \restriction (\rho + 1) = g \restriction \eta = f \restriction \eta = f \restriction (\rho + 1)$$

se deduce $g(\zeta_f) = 1$. De $\zeta_f \leq \rho$ se infiere $\zeta_f \leq \xi$ y como $g(\zeta_f) = 1$, concluimos que existe $k \in A$ tal que $k \restriction \zeta_f = g \restriction \zeta_f$ y $k(\zeta_f) = 1$. Tenemos $k \restriction (\zeta_f + 1) = g \restriction (\zeta + 1) = f \restriction (\zeta_f + 1)$ y $f(\rho) = 0$ para cada $\rho \in (\zeta_f, \aleph_\alpha)$. En consecuencia, $f \leq k$, lo que se opone a que $f \in B$, $k \in A$.

Caso 2. $A = \varnothing \neq B$. Sea $\rho = \sup\{\zeta_f : f \in B\}$ y defina $g \in H_\alpha$ mediante

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leq \rho, \\ 1 & \text{si } \xi = \rho + 1, \\ 0 & \text{si } \rho + 1 < \xi. \end{cases}$$

Es claro que $g < B$ es como se requiere.

Caso 3. $A \neq \varnothing = B$. Sea ξ como en el caso 1 y defina $g \in H_\alpha$ mediante ($\eta < \aleph_\alpha$)

$$g(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \leq \xi + 1, \\ 0 & \text{si } \xi + 1 + 1 < \eta. \end{cases}$$

Verifique que $A < g$.

(ii) Sea $\langle \delta_\xi : \xi < \aleph_\gamma \rangle$ una sucesión monótona creciente de ordinales con supre-

mo $\aleph_\alpha$. Para cada $\xi < \aleph_\gamma$ defina $f_\xi \in H_\alpha$ mediante $(\eta < \aleph_\alpha)$

$$f_\xi(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \leq \delta_\xi, \\ 0 & \text{si } \delta_\xi < \eta. \end{cases}$$

Es claro que $\langle f_\xi : \xi < \aleph_\gamma \rangle$ es una sucesión monótona creciente de elementos de H_α y que $\{f_\xi : \xi < \aleph_\gamma\}$ es cofinal en H_α.
(iii) Considere $\langle \delta_\xi : \xi < \aleph_\gamma \rangle$ como en (ii). Para cada $\xi < \alpha_\gamma$ defina $f_\xi \in H_\alpha$ mediante $(\eta < \aleph_\alpha)$

$$f_\xi(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < \delta_\xi, \\ 1 & \text{si } \eta = \delta_\xi, \\ 0 & \text{si } \delta_\xi = \eta. \end{cases}$$

Corrobore que $\langle f_\xi : \xi < \aleph_\gamma \rangle$ es una sucesión monótona decreciente de elementos de H_α y que $\{f_\xi : \xi < \aleph_\gamma\}$ es cofinal en $(H_\alpha, <)$.
(iv) Para cada $\delta < \aleph_\alpha$ sea

$$L_\delta = \{f \in H_\alpha : f(\delta) = 1 \wedge f(\varepsilon) = 0 \forall\, \varepsilon \in (\delta, \aleph_\alpha)\}.$$

Note que estos conjuntos son ajenos entre sí y su unión es H_α. Para $\alpha = 0$

$$|H_\alpha| = \sum_{\delta<\omega} |L_\delta| = \sum_{\delta<\omega} 2^{|\delta|} = \aleph_0.$$

Para $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} |H_\alpha| &= \sum_{\delta<\aleph_\alpha} |L_\delta| \\ &= \sum_{\delta<\omega} |L_\delta| + \sum_{\omega\leq\delta<\aleph_\alpha} |L_\delta| \\ &= \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\delta<\aleph_\alpha} 2^{|\delta|} \\ &= \aleph_0 + \sum_{\beta<\alpha} \left(2^{\aleph_\beta} \cdot |\{\delta < \aleph_\alpha : |\delta| = \aleph_\beta\}|\right) \\ &= \aleph_0 + \sum_{\beta<\alpha} \left(2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\beta+1}\right) \\ &= \sum_{\beta<\aleph_\alpha} 2^{\aleph_\beta}.] \end{aligned}$$

b) Si $\aleph_\alpha$ es regular, muestre que se cumplen las siguientes aseveraciones:
(i) H_α es un conjunto η_α.
(ii) $cf(H_\alpha, <) = \aleph_\alpha$.
(iii) $cf(H_\alpha, >) = \aleph_\alpha$.

(iv) $|H_0| = \aleph_0$ y para $\alpha > 0$ $|H_\alpha| = \sum_{\beta<\alpha} 2^{\aleph_\beta}$.

c) Si $\aleph_\alpha$ es regular, cerciórese de que existe un conjunto η_α.

d) Para cada ordinal α compruebe que existe un conjunto $\eta_{\alpha+1}$ de cardinalidad $2^{\aleph_\alpha}$.

e) (HGC) Para cada cardinal regular $\aleph_\alpha$ verifique que existe un conjunto η_α de cardinalidad $\aleph_\alpha$.

f) (Universalidad) Suponga que $\aleph_\alpha$ es regular. Si K es un conjunto η_α demuestre que cualquier conjunto linealmente ordenado de cardinalidad $\leq \aleph_\alpha$ se puede encajar en K. [Sugerencia: Considere cualquier conjunto linealmente ordenado L de cardinalidad $\leq \aleph_\alpha$, digamos $L = \{a_\xi : \xi < \aleph_\alpha\}$ y defina una sucesión $\langle f_\xi : \xi < \aleph_\alpha\rangle$ de funciones por recursión: si ya tenemos definida f_η para cada $\eta < \xi$, de tal forma que es una función estrictamente creciente que aplica un subconjunto de L de tamaño $< \aleph_\alpha$ en K y tal que $f_\rho \subseteq f_\eta$ siempre que $\rho < \eta < \xi$. Sea $g = \bigcup_{\eta<\xi} f_\eta$. En tal caso g es creciente estricta y aplica un subconjunto de L de cardinalidad $< \aleph_\alpha$ en K. Si $a_\xi \in dom(g)$, haga $f_\xi = g$. Suponga que $a_\xi \notin dom(g)$; sean

$$A = \{g(b) : b \in dom(g), b < a_\xi\},$$
$$B = \{g(b) : b \in dom(g), a_\xi < b\}.$$

Entonces $A < B$ y $|A|, |B| < \aleph_\alpha$, así que por la propiedad de los conjuntos η_α existe $c \in K$ tal que $A < c < B$. Haga

$$f_\xi = g \cup \{(a_\xi, c)\}$$

para tal c. Compruebe que $\bigcup_{\xi<\aleph_\alpha} f_\xi$ es como se busca.]

69. Axiomatice la noción de conjunto η_{λ^+} en $L_{\lambda^+\lambda^+}(<)$. [Sugerencia: Considere la conjunción φ de los siguientes enunciados:

a) $<$ es un orden lineal.

b) $\forall v \restriction \lambda \forall w \restriction \lambda \left(\bigwedge_{\alpha,\beta<\lambda}(v_\alpha < w_\beta) \to \exists x \bigwedge_{\alpha,\beta<\lambda}(v_\alpha < x < w_\beta)\right)$.

c) $\forall v \restriction \lambda \exists x, y \bigwedge_{\alpha<\lambda}(x < v_\alpha < y)$.]

70. Sea $\mathfrak{G}$ una gáfica. Un circuito de Hamilton en $\mathfrak{G}$ es una trayectoria que comienza y termina en el mismo vértice e incluye cada vértice restante una sola vez.

a) Escriba un enunciado de segundo orden que se cumpla en $\mathfrak{G}$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ tiene un circuito de Hamilton.

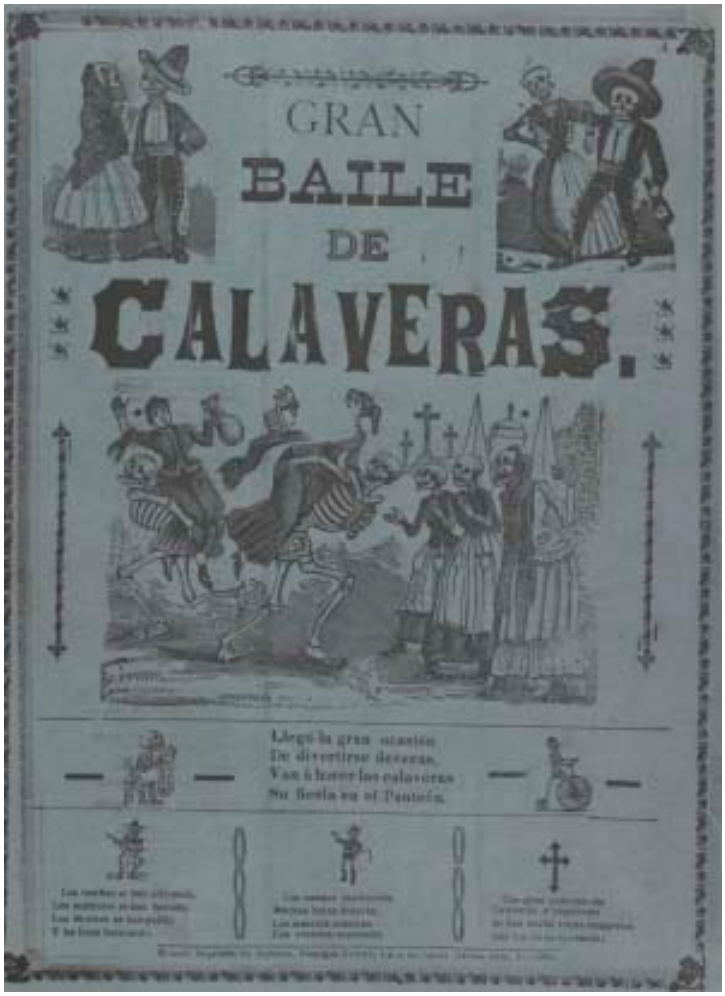
b) Escriba un $L_{\omega_1\omega}$-enunciado que se cumpla en $\mathfrak{G}$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ tiene un circuito de Hamilton.

71. Describa un enunciado de segundo orden que se cumple en una estructura $\mathfrak{M}$ si y sólo si $\mathfrak{M}$ es finita y de tamaño impar.

72. Sea $\mathfrak{G}$ una gráfica finita. El grado de un vértice v en G es la cantidad de vértices adyacentes a v. Una trayectoria de Euler es una trayectoria que involucra cada vértice una y solamente una vez. L. Euler demostró que una gráfica finita tiene una de tales trayectorias si y sólo si existen a lo sumo dos vértices de grado impar.

    a) Describa un enunciado de segundo orden que se cumpla en $\mathfrak{G}$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ tiene una trayectoria de Euler.

    b) Establezca un $L_{\omega_1\omega}$-enunciado que se cumpla en $\mathfrak{G}$ si y sólo si G tiene una trayectoria de Euler.


GRAN
BAILE
DE
CALAVERAS.
Llegó la gran ocasión
De divertirse deveras,
Van á hacer los calaveras
Su fiesta en el Panteón.

5

Lógica intuicionista

5.1 Introducción

Grosso modo podemos dividir en dos los sistemas de lógica que hemos estudiado y otros que son muy comunes en la literatura: las extensiones de la lógica clásica de primer orden, como la lógica modal de dominio constante o la lógica de segundo orden. Por otro lado, hay otros sistemas que validan fórmulas que no son universalmente válidas según la lógica clásica, tal es el caso de la lógica modal de dominio variable y de la lógica intuicionista que estudiaremos en este capítulo.

La lógica intuicionista es producto de una filosofía de las matemáticas, el intuicionismo, que fue propuesta por L.E.J. Brouwer (1891-1966) y que pretende ofrecer una solución a la llamada crisis de los fundamentos de las matemáticas ocurrida a finales del siglo XIX y principios del XX. Una idea central del intuicionismo es que las matemáticas son una libre creación de la mente y que se producen en forma independiente de todo lenguaje. Un enunciado de esta disciplina sólo puede ser validado por una construcción mental que demuestre su verdad. Desde luego, Brouwer no se refería a la mente de un individuo determinado sino a la de un sujeto creador idealizado sin limitaciones de espacio ni de tiempo. Por ejemplo, el intuicionista admite cada uno de los números naturales como construidos a partir de la intuición del tiempo. Más precisamente, tales números son producto de la idea de distinción o de dualidad (*two-ity*) que surge de la experiencia temporal del sujeto creador. Sin embargo, el intuicionista rechaza el infinito actual de los números naturales, es decir, esta pluralidad como totalidad acabada. Un enunciado sobre este conjunto es aceptable sólo cuando asevera algo sobre cada uno de sus miembros. Por otro lado, una proposición que enuncia la existencia de un número natural con cierta propiedad sólo debe plantearse, de acuerdo con Brouwer, si tenemos un procedimiento efectivo que nos permita construir ese número. Una diferencia importante con otras filosofías de la matemática es que para el intuicionismo la verdad de un enunciado de esta disciplina es dependiente del tiempo: un enunciado probado o refutado en un

momento dado permanecerá así en todo instante futuro, pero un enunciado puede no haber sido probado ni refutado en un tiempo dado.

No abordaremos más la concepción de las matemáticas del intuicionista. Baste decir que, a diferencia de lo que ocurre con otros constructivistas, la matemática intuicionista no es un fragmento de la matemática clásica ni viceversa.

5.2 Lógica intuicionista

La lógica intuicionista, en cambio, sí es un fragmento de la lógica clásica. Uno de sus objetivos es «explicar» el razonamiento constructivo. Por «explicar» queremos decir proveer un concepto formal y riguroso que corresponda a una noción intuitiva. En este caso la noción informal es la de demostración constructiva. Como el lector habrá constatado (incluso en este texto), en matemáticas puede darse una prueba no constructiva de un resultado. Esto ocurre, por ejemplo, cuando probamos un enunciado de la forma $(A \vee B)$ sin que la prueba nos permita dirimir si A es el caso o si B es el caso. O bien podemos demostrar un enunciado de la forma $\exists x Ax$ sin que la prueba nos provea de los medios para determinar en forma algorítmica al objeto que satisface Ax. Un ejemplo concreto es el siguiente: probaremos que existen 2 números irracionales a y b tales que a^b es un número racional.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, $a = b = \sqrt{2}$ resuelve el problema.
Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional, entonces $((\sqrt{2})^{(\sqrt{2})})^{\sqrt{2}}$ es racional.

Pero esta prueba no nos permite determinar cuáles son esos dos números, pues no permite discernir cuál de las dos opciones mencionadas se obtiene.

El enunciado

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ es racional} \quad \vee \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ no es racional}$$

no es verdadero para el intuicionista, a pesar de ser una instancia de la ley del tercero excluido; se vuelve verdadero en el momento en que disponemos de una prueba constructiva de uno de los dos disyuntos.

Una fuente de pruebas no constructivas es la reducción al absurdo. Por ello el intuicionista rechaza una forma de este procedimiento. Si simplemente sabemos que la suposición de que no ocurre ni A ni B conduce a una contradicción, no podemos afirmar $A \vee B$. De igual manera no estamos autorizados a afirmar que $\exists x Ax$ si sólo sabemos que de la suposición de que $\neg \exists x Ax$ se llega a una contradicción (en ese caso, sólo podremos aseverar que $\neg\neg \exists x Ax$). Aunque usaremos los mismos símbolos lógicos que en los sistemas clásicos, en la lógica intuicionista no tendrán, estrictamente hablando, el mismo sentido. Éste se determinará semánticamente o por un conjunto de axiomas.

Comencemos con la llamada interpretación Brouwer-Heyting-Kolmogorov, que es la que más naturalmente se desprende de las consideraciones anteriores: la noción básica

es la de «*a prueba E*», donde por «prueba» entendemos demostración constructiva o construcción. Diremos que un enunciado es verdadero si disponemos de una prueba de él. Los conectivos serán entendidos de acuerdo a las siguientes cláusulas.

Supongamos dado un dominio D.

- a prueba $E \wedge F$ si $a = (b, c)$ y b prueba E y c prueba F,
- a prueba $E \vee F$ si $a = (b, c)$ y $b = 0$ y c prueba E o $b = 1$ y c prueba F,
- a prueba $E \to F$ si a es una construcción que convierte cada prueba k de E en una prueba $a(k)$ de F,
- ninguna a prueba $\bot$,
- a prueba $\forall x Ax$ si a es una construcción tal que para cada $b \in D$, $a(b)$ es una prueba de $A(b)$,
- a prueba $\exists x Ax$ si $a = (b, c)$ tal que $b \in D$ y c prueba $A(b)$.

Como siempre, definimos $\neg p$ como $p \to \bot$, por lo que una prueba de $\neg p$ sería un procedimiento que transforme una prueba de p en una prueba de $\bot$ (por lo tanto, una prueba de que no hay prueba de p).

«Eres como la muerte de Apango; que ni chupa, ni va al fandango». Se dice de la gente que no participa, pero tampoco deja que los otros lo hagan.

Esta interpretación nos permitirá comprobar que ciertos enunciados son válidos intuicionísticamente, pero el procedimiento se complica de forma extraordinaria para enunciados un poco más complejos, por lo que buscaremos otros procedimientos más sencillos. En la primera parte nuestro lenguaje no contendrá el predicado de identidad. Empezaremos dando un sistema de deducción natural aún más débil que la lógica intuicionista y al que llamaremos LM (porque la lógica que caracteriza se conoce en la literatura como lógica mínima).

Aunque suponemos que el lector ya ha tenido algún contacto con sistemas de deducción natural, le recordaremos que las reglas tendrán la forma

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Sigma \vdash \Theta}{\varepsilon \vdash \gamma}$$

lo que significará que si tenemos las derivaciones que aparecen sobre la línea horizontal (llamadas premisas), estamos autorizados a llevar a cabo la derivación indicada bajo esa misma línea. Una regla del tipo

$$\frac{}{\Sigma \vdash \gamma}$$

significa que la derivación $\Sigma \vdash \gamma$ puede llevarse a cabo en cualquier circunstancia.

«Acocote nuevo, tlachiquero viejo». Se emplea para dar a entender que una tarea difícil debe hacerla el que tiene habilidad o experiencia. Acocote es un güaje largo y hueco que se usa para extraer el tlachique, que es el pulque dulce.

En lugar de dar las definiciones de «prueba», etc., daremos algunos ejemplos que aclaren las dudas del lector, he aquí las reglas.

- Axioma

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

- Debilitamiento

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ d$$

- Reducción

$$\frac{\Gamma, B,\ B \vdash A}{\Gamma,\ \ B \vdash A}\ r$$

- Introducción del condicional

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ i \quad \to$$

- Eliminación del condicional

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}\ e \quad \to$$

❁ Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ i\ \wedge$$

❁ Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ e\ \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ e\ \wedge$$

❁ Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ i\ \vee \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ i\ \vee$$

❁ Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma, \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ e\ \vee$$

❁ Introducción del cuantificador universal

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash (\forall x)A}\ i\ \forall$$

siempre que x no esté libre en las fórmulas de Γ.

❁ Eliminación del cuantificador universal

$$\frac{\Gamma \vdash (\forall x)Ax}{\Gamma \vdash Ac}\ e\ \forall$$

donde c es una constante cualquiera o una variable libre para x en $A(x)$.

❁ Introducción del cuantificador existencial

$$\frac{\Gamma \vdash Ac}{\Gamma \vdash (\exists x)Ax}\ i\ \exists$$

❁ Eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\Gamma \vdash (\exists x)Ax \quad \Gamma,\ A(x/y) \vdash C}{\Gamma \vdash C} \qquad e\ \exists$$

siempre que y no esté libre en las fórmulas de Γ ni en C.

Nótese que

$$\frac{\Gamma, Ay \vdash C}{\Gamma, (\exists\, x)Ax \vdash C}$$ cuando y no está libre en Γ ni en C

es una regla derivada del sistema pues

$$\frac{\Gamma, (\exists\, x)Ax \vdash (\exists\, x)Ax \quad \Gamma, Ay \vdash C}{\Gamma, (\exists\, x)Ax \vdash C}$$

es una aplicación de $e\ \exists$. Asimismo, las reglas de debilitamiento e introducción del condicional autorizan el paso de $\Gamma \vdash B$ a $\Gamma \vdash (A \to B)$ a

«No le hace que nazcan chatos, nomás que respiren bien». Lo que importa es que los hijos nazcan bien. Se puede decir lo mismo de otro trabajo u obra, que aunque no sea bella o perfecta, lo que importa es que funcione bien.

Un sistema para la lógica intuicionista se obtiene agregando a LM la regla

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

mientras que un sistema de deducción natural para la lógica clásica se obtiene agregando a LM la regla

$$\frac{\Gamma \neg A \vdash \bot \quad \text{RAA}}{\Gamma \vdash A}$$

Adviértase que las reglas

$$\frac{\Gamma A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\ i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\ e$$

son reglas derivadas de LM (pues $\neg A \equiv A \to \bot$).

Obviamente, $LM < LI < LC$. No insistiremos sobre la diferencia entre LM y LI. El interés de mencionar LM como un subsistema de LI es sugerir que hay diversos tipos de negaciones. En lo sucesivo, salvo mención explícita $\vdash \theta$ significará que θ es demostrable en lógica intuicionista. A veces utilizaremos $\vdash_i$ y $\vdash_c$ para distinguir entre derivación intuicionista y clásica.

Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.2.1. $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

$A \wedge \neg A \vdash A$
$A \wedge \neg A \vdash \neg A$
$A \wedge \neg A \vdash \bot$
$\vdash A \wedge \neg A \to \bot$.

«El que más temprano se moja, más tiempo tiene para secarse». Si los errores de la vida se cometen siendo joven, queda mucho tiempo para enmendarse.

Ejemplo 5.2.2. $\vdash A \to (\neg A \to B)$

$\neg A \vdash A \to A$
$\neg A, A \vdash A$
$A \vdash \neg A \to \neg A$
$A, \neg A \vdash \bot$
$A, \neg A \vdash B$
$A \vdash \neg A \to B$
$\vdash A \to (\neg A \to B)$.

Ejemplo 5.2.3. $\vdash A \to \neg\neg A$

$\vdash A \to (\neg A \to \bot)$ del ejemplo 5.2.2
$\vdash A \to \neg\neg A$ abreviación.

Ejemplo 5.2.4. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$A \to B, B \to \bot, A \vdash B$
$A \to B, B \to \bot, A \vdash B \to \bot$
$A \to B, B \to \bot, A \vdash \bot$
$A \to B, \neg B \vdash \neg A$
$A \to B \vdash (\neg B \to \neg A)$.

«La puerca más flaca es la primera que rompe el chiquero». Los más débiles son los que se rebelan primero.

Ejemplo 5.2.5. $\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$

$B, A \vdash B$
$B \vdash A \to B$
$\neg A, A \vdash \bot$
$\neg A, A \vdash B$
$\neg A \vdash A \to B$
$\neg A \vee B \vdash \neg A \vee B$
$\neg A \vee B \vdash A \to B$
$\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$.

Ejemplo 5.2.6. $\vdash \neg(\exists x)Fx \to (\forall y)\neg Fy$

$Fy \vdash (\exists x)F$
$Fy, \neg(\exists x)Fx \vdash (\exists x)Fx$
$Fy, \neg(\exists x)Fx \vdash \neg(\exists x)Fx$
$Fy, \neg(\exists x)Fx \vdash \bot$
$\neg(\exists x)Fx \vdash \neg Fy$
$\neg(\exists x)Fx \vdash (\forall y)\neg Fy$
$\vdash \neg(\exists x)Fx \to (\forall y)\neg Fy$.

Ejemplo 5.2.7. $\vdash (\forall y)\neg Fy \to \neg(\exists x)Fx$

$Fx, (\forall\, y)\neg Fy \vdash Fx$
$Fx, (\forall\, y)\neg Fy \vdash \neg Fx$
$Fx, (\forall\, y)\neg Fy \vdash \bot$
$(\exists\, x)Fx, (\forall\, y)\neg Fy \vdash \bot$
$(\forall\, y)\neg Fy \vdash \neg(\exists\, x)Fx$.

Ejemplo 5.2.8. $\vdash (\exists x)\neg\varphi x \to \neg(\forall x)\varphi x$.

Ejercicio para el lector

Ejemplo 5.2.9. $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$

$\neg A, A \wedge B \vdash \neg A$
$\neg A, A \wedge B \vdash A$
$\neg A, A \wedge B \vdash \bot$
$\neg B, A \wedge B \vdash \neg B$
$\neg B, A \wedge B \vdash B$
$\neg B, A \wedge B \vdash \bot$
$\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \bot$
$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.

Ejemplo 5.2.10. $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\begin{aligned}
\neg A \wedge \neg B, A &\vdash A\\
\neg A \wedge \neg B, A &\vdash \neg A\\
\neg A \wedge \neg B, A &\vdash \bot\\
\neg A \wedge \neg B, B &\vdash B\\
\neg A \wedge \neg B, B &\vdash \neg B\\
\neg A \wedge \neg B, B &\vdash \bot\\
\neg A \wedge \neg B, A \vee B &\vdash \bot\\
\neg A \wedge \neg B &\vdash \neg(A \vee B).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\neg(A \vee B), A &\vdash A \vee B\\
\neg(A \vee B), A &\vdash \neg(A \vee B)\\
\neg(A \vee B), A &\vdash \bot\\
\neg(A \vee B) &\vdash \neg A.
\end{aligned}$$

De igual manera:

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B.$$

Ejemplo 5.2.11. $\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee C$

$$\begin{aligned}
A \wedge B &\vdash A \\
A \wedge B &\vdash A \vee C \\
C &\vdash A \vee C \\
(A \wedge B) \vee C &\vdash A \vee C \\
A \wedge B &\vdash B \\
A \wedge B &\vdash B \vee C \\
C &\vdash B \vee C \\
(A \wedge B) \vee C &\vdash B \vee C \\
(A \wedge B) \vee C &\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\
A, B &\vdash A \wedge B \\
A, B &\vdash (A \wedge B) \vee C \\
B &\vdash A \to ((A \wedge B) \vee C) \\
C &\vdash (A \wedge B) \vee C \\
C &\vdash A \to ((A \wedge B) \vee C) \\
B \vee C &\vdash A \to ((A \wedge B) \vee C) \\
A, (B \vee C) &\vdash ((A \wedge B) \vee C) \\
C, (B \vee C) &\vdash ((A \wedge B) \vee C) \\
(A \vee C), (B \vee C) &\vdash ((A \wedge B) \vee C) \\
&\vdash (A \vee C) \to ((B \vee C) \to ((A \wedge B) \vee C)) \\
(A \vee C) \wedge (B \vee C) &\vdash A \vee C \\
(A \vee C) \wedge (B \vee C) &\vdash (B \vee C) \to ((A \wedge B) \vee C) \\
(A \vee C) \wedge (B \vee C) &\vdash (B \vee C) \\
(A \vee C) \wedge (B \vee C) &\vdash ((A \wedge B) \vee C).
\end{aligned}$$

Note en este ejemplo como si $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma$ entonces $\Gamma, (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$.

No te apures, Gavilán, que para ti, no es la polla.
Si acaso te tocarán los asientos de la olla.

Ejemplo 5.2.12. $(\exists x)Ax \vdash \neg(\forall x)\neg Ax$

$$\begin{array}{c}(\exists x)\neg Ax, (\forall x)Ax \vdash (\exists\, x)\neg Ax\\ \neg Ay, (\forall x)Ax \vdash \neg Ay\\ \neg Ay, (\forall x)Ax \vdash Ay\\ \neg Ay, (\forall\, x)Ax \vdash \bot\end{array}$$

En resumen,

$$\begin{array}{c}(\exists\, x)\neg Ax, (\forall\, x)Ax \vdash (\exists\, x)\neg Ax\\ \neg Ay, (\forall\, x)Ax \vdash \bot\\ (\exists\, x)\neg Ax, (\forall\, x)Ax \vdash \bot\end{array}$$

por consiguiente,

$$(\exists x)\neg Ax \vdash \neg(\forall x)Ax.$$

Lema 5.2.13. $\vdash \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$

Demostración. $\Rightarrow$) $\vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$ por el ejemplo 5.2.3

$\Leftarrow$) $\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg A$ por el ejemplo 5.2.3

$\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg\neg A$

$\neg\neg\neg A, A \vdash \bot$

$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

□

Lema 5.2.14. $\vdash \neg\neg\, \bot\leftrightarrow\bot$.

Demostración. $\Rightarrow$)

$$(\bot \to \bot) \to \bot \vdash (\bot \to \bot) \to \bot$$
$$(\bot \to \bot) \to \bot \vdash (\bot \to \bot) \text{ axioma y debilitamiento}$$
$$(\bot \to \bot) \to \bot \vdash \bot$$
$$\vdash ((\bot \to \bot) \to \bot) \to \bot$$
$$\vdash (\neg\neg\bot \to \bot)$$

$\Leftarrow$) $\vdash \bot \to \neg\neg\bot$ ya probado.

□

Lema 5.2.15.

a) *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \vdash \beta$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$.

b) *Si* $\Gamma \vdash \neg\alpha$ *o* $\Gamma \vdash \neg\beta$, *entonces* $\Gamma \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.

c) *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *o* $\Gamma \vdash \beta$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta)$.

d) *Si* $\Gamma \vdash \neg\alpha$ *y* $\Gamma \vdash \neg\beta$, *entonces* $\Gamma \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$.

e) *Si* $\Gamma \vdash \beta$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$.

f) *Si* $\Gamma \vdash \neg\alpha$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$.

g) *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \vdash \neg\beta$, *entonces* $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$.

h) *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \vdash \beta$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

i) *Si* $\Gamma \vdash \neg\alpha$ *y* $\Gamma \vdash \neg\beta$, *entonces* $\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

j) *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \vdash \neg\beta$ *o* $\Gamma \vdash \beta$ *y* $\Gamma \vdash \neg\alpha$, *entonces* $\Gamma \vdash \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

«Contigo la milpa es rancho y el atole champurrado». Es una verdadera declaración de amor: junto a ti la vida me parece maravillosa y las limitaciones no parecen pesadas.

Demostración.

a) Por $i \wedge$.

b) Si $\Gamma \vdash \neg\alpha$ entonces $\Gamma, \alpha \vdash \bot$ y, por lo tanto, $\Gamma, (\alpha \wedge \beta) \vdash \bot$ o $\Gamma \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.

c) Por $i \vee$.

d) ya demostrado.

e) Por $i \rightarrow$.

f) Ejercicio para el lector.

g) Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma, (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \bot$.

h) –j) Ejercicios para el lector.

□

Lema 5.2.16. *Sea α una fórmula proposicional y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ las letras enunciativas que aparecen en α. Dada una asignación A (clásica) de valores de verdad a $\beta_1, \ldots, \beta_n$, designamos como β_i' a β_i si β_i es verdadero de acuerdo con A, y designaremos como β_i' a $\neg\beta_i$ si β_i es falso de acuerdo con A. Igualmente α' será α, si α es verdadero de acuerdo con A, y α' será $\neg\alpha$ si α es falso de acuerdo con A. Entonces $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \alpha'$.*

Demostración. Por inducción en la longitud de α. Si α es una letra proposicional, el teorema se reduce a $\alpha \vdash \alpha$ o $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$.

1. Si α es $\neg\beta$

   a) Si β es verdadero, α es falso, β' es β y α' es $\neg\alpha$; es decir, α' es $\neg\neg\beta$. Por hipótesis de inducción, $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \beta$. Por el ejemplo 5.2.3 $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \neg\neg\beta$.

   b) Si β es falso, α verdadero, β' es $\neg\beta$ y α' es α; es decir, α' es $\neg\beta$. Por hipótesis de inducción, $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \neg\beta$; por consiguiente, $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \alpha'$.

2. Si α es $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$

   a) Si α_1 y α_2 son verdaderos (de acuerdo con A)
   $\alpha' = \alpha$, $\alpha_2' = \alpha_2$ y $\alpha_1' = \alpha_1$.
   Por hipótesis de inducción, $\beta_1' \ldots, \beta_n' \vdash \alpha_1$ y $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \alpha_2$ por el lema 5.2.15 (a) $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$; es decir, $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \alpha'$.

   b) Si α_1 es falso (según A) α_1' es $\neg\alpha_1$ y $\alpha' = \neg\alpha$; por lo tanto, lo que hay que demostrar es que si $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \neg\alpha_1$, entonces $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ pero esto es el lema 5.2.15 (b).

   c) Si α_2 es falso. Similar al anterior.

Los casos para los otros conectivos son consecuencia directa del lema anterior y se dejan como ejercicios para el lector. □

«Hijo de maguey, mecate». Los hijos heredan lo que son sus padres.

Lema 5.2.17.

$$\dfrac{\begin{array}{r}\beta \vdash \alpha \\ \neg\beta \vdash \alpha\end{array}}{\vdash \neg\neg\alpha}$$

Demostración.
$\neg\alpha \vdash \neg\beta$ por la primera hipótesis y ejemplo 5.2.4
$\neg\beta \vdash \alpha$
$\neg\alpha \vdash \alpha$ transitividad aplicada a las dos líneas anteriores
$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
$\neg\alpha \vdash \bot$
$\vdash \neg\neg\alpha$. ☐

Teorema 5.2.18. *Si α es una tautología, entonces $\vdash_i \neg\neg\alpha$.*

Demostración. Sean $\beta'_1, \ldots, \beta'_n$ las letras enunciativas de α. Por el lema 5.2.16.
$\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1}, \beta_n \vdash \alpha$ y $\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1}, \neg\beta_n \vdash \alpha$.
El primer caso corresponde a una asignación en la que β_n es verdadera y el segundo a una asignación que da falso a β_n. En ambos casos α es verdadera (pues es una tautología).
$\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1}, \beta_n \vdash \alpha$
$\beta'_1, \ldots, \beta'_n, \neg\beta \vdash \alpha$
$\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1} \vdash \neg\neg\alpha$ por el lema 5.2.17
Ahora hacemos lo mismo con β'_{n-1}. Después de n pasos, tendremos que $\vdash \neg\neg\alpha$. ☐

Corolario 5.2.19. *$\neg\alpha$ es tautología si y sólo si $\vdash_i \neg\alpha$*

Demostración. $\Rightarrow$) por el teorema 5.2.18 y el lema 5.2.13 ($\vdash \neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$)
$\Leftarrow$) Pues si $\vdash_i \neg\alpha$, entonces $\vdash_c \neg\alpha$ y esto si y sólo si $\models \neg\alpha$ ☐

Lema 5.2.20.

a) $\neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$

b) $\vdash (\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \wedge \beta)$

Demostración. a)

$$\begin{aligned}
\alpha, \neg\beta &\vdash \neg(\alpha \to \beta) \quad \text{por el lema 5.2.16}\\
\neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta &\vdash \neg\alpha\\
\neg\neg(\alpha \to \beta) &\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha)\\
\neg\neg(\alpha \to \beta) &\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)\\
&\vdash \neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta), \alpha, \beta &\vdash \bot\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta), \alpha &\vdash \neg\beta\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta), \alpha &\vdash \neg\neg\beta\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta), \alpha &\vdash \bot\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \neg\alpha\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \neg\neg\alpha\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta, \neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \bot\\
\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta &\vdash \neg\neg(\alpha \wedge \beta)
\end{aligned}$$

□

Lema 5.2.21. *Si $+$ es un conectivo binario $\vee$, $\wedge$ $\to$, o $\leftrightarrow$*

$$\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha + \gamma) \leftrightarrow (\beta + \gamma)$$

Demostración. Consideremos el caso del condicional

$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \to \gamma, \quad \beta \vdash \beta \to \alpha$
$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \to \gamma, \quad \beta \vdash \beta$
$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \to \gamma, \quad \beta \vdash \alpha$
$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \to \gamma, \quad \beta \vdash \alpha \to \gamma$
$\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \alpha \to \gamma, \quad \beta \vdash \gamma.$

Los otros casos son similares. □

Teorema 5.2.22 (Glivenko). *Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \neg\beta$ es una tautología si y sólo si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash_i \neg\beta$.*

Demostración. $\Leftarrow$). Es obvio.

$\Rightarrow$) Si $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \neg\beta$ es una tautología, entonces $\vdash_i \neg\neg((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \alpha_n) \to \neg\beta)$ por el corolario 5.2.19.

Del lema 5.2.20, $\vdash_i \neg\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \neg\neg\neg\beta$.

De nueva cuenta, por el lema 5.2.20 $\vdash_i (\neg\neg\alpha_1 \wedge \neg\neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\neg\alpha_n) \to \neg\neg\neg\beta$ y por el ejemplo 5.2.13 $\vdash_i (\neg\neg\alpha_1 \wedge \neg\neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\neg\alpha_n) \to \neg\beta$.

Finalmente, por el ejemplo 5.2.3 $\vdash_i (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \neg\beta$. □

Lema 5.2.23. $\vdash \neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

Demostración. Note que $\neg\neg A \to \neg\neg B \to \neg\neg(A \to B)$ es una tautología.

Por el teorema de Glivenko, $\neg\neg A \to \neg\neg B \vdash \neg\neg(A \to B)$. El otro condicional es el inciso a) del lema 5.2.20. □

Lema 5.2.24. $\vdash \neg\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)$

Demostración.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &\vdash \alpha \\ \neg\alpha &\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \\ \neg\neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \neg\neg\alpha \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \neg\neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \neg\neg\beta \\ \neg\neg(\alpha \wedge \beta) &\vdash \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \end{aligned}$$

El otro condicional es el inciso b) del lema 5.2.20 y es consecuencia del lema de Glivenko.

□

Corolario 5.2.25. $\vdash \neg\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\beta)$

Lema 5.2.26. $\vdash \neg\neg(\forall x)\varphi x \to (\forall x)\neg\neg\varphi x$

Demostración.

$$\begin{aligned} &\vdash (\exists x)\neg\varphi x \to \neg(\forall x)\varphi x \quad \text{por el ejemplo 5.2.8} \\ &\vdash \neg\neg(\forall x)\varphi x \to \neg(\exists x)\neg\varphi x \\ &\vdash \neg\neg(\forall x)\varphi x \to (\forall x)\neg\neg\varphi x \quad \text{por el ejemplo 5.2.6} \end{aligned}$$

□

Definición 5.2.27. Dada una fórmula A (sin símbolos funcionales ni identidad) definimos A^g (traducción de Gödel de A) de la siguiente manera:

- $\bot^g = \bot$

- $A^g = \neg\neg A$ si A es atómica
- $(\neg A)^g = \neg A^g$
- $(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$
- $(A \vee B)^g = \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$
- $(A \to B)^g = A^g \to B^g$
- $((\forall x)\varphi x)^g = (\forall x)\varphi^g x$
- $((\exists x)\varphi x)^g = \neg(\forall x)\neg\varphi^g x$
- Sea $\Gamma^g = \{x^g \mid x \in \Gamma\}$

Teorema 5.2.28. *Para toda fórmula A, $\vdash (\neg\neg A^g \leftrightarrow A^g)$.*

Demostración. Si $A = \bot$ el resultado se sigue del lema 5.2.14.

Si A es $\neg B$, $B \vee C$ o $(\exists x)B$, A^g comienza por un símbolo de negación, ya probamos que $\vdash \neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\neg\alpha$. (Ejemplo 5.2.13).

Si $A = B \wedge C$ o $A = B \to C$, el resultado es consecuencia del lema 5.2.24 y del lema 5.2.23, así como de la hipótesis de inducción.

Si A es de la forma $(\forall x)Ax$, $A^g = (\forall x)A^g x$ y por lo tanto tenemos que probar que $\vdash \neg\neg(\forall x)A^g x \leftrightarrow (\forall x)A^g x$. Ya probamos que $\vdash \neg\neg(\forall x)\varphi^g x \to (\forall x)\neg\neg\varphi^g$ (Lema 5.2.26) y por hipótesis de inducción, $\vdash \neg\neg\varphi^g \leftrightarrow \varphi^g$. Por lo tanto, $\vdash \neg\neg(\forall x)\varphi^g x \to (\forall x)\varphi^g x$; por otro lado, $\vdash_{LM} (\forall x)\varphi^g x \to \neg\neg(\forall x)\varphi^g x$ por el ejemplo 5.2.3. ∎

Teorema 5.2.29. $\Gamma \vdash_c \varphi \leftrightarrow \Gamma^g \vdash_i \varphi^g$.

Demostración.

$\Rightarrow$) La demostración procede por inducción sobre la demostración de $\Gamma \vdash_c \varphi$.

- Supongamos que la última regla utilizada es la de introducción correspondiente al conectivo $\to$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash_c \beta}{\Gamma \vdash_c\ A \to B}$$

entonces, por hipótesis de inducción $\Gamma^g, A^g \vdash_i B^g$; claramente, $\Gamma^g \vdash_i A^g \to B^g$.

- Si la última regla es $e_\to$, $i_\wedge$, $e_\wedge$ el resultado se sigue de manera similar.
- Supongamos ahora que la última regla utilizada es $i\ \vee$

$$\frac{\Gamma \vdash_c A}{\Gamma \vdash_c A \vee B}$$

Debemos demostrar que $\Gamma^g \vdash_i \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$; por hipótesis de inducción $\Gamma^g \vdash_i A^g$,
$\Gamma^g,\ \neg A^g \wedge \neg B^g \vdash_i A^g$,
$\Gamma^g,\ \neg A^g \wedge \neg B^g \vdash_i \neg A^g$,
$\Gamma^g,\ \neg A^g \wedge \neg B^g \vdash_i \bot$,

$\Gamma^g \vdash_i \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$.

- Si la última regla es $i \ \exists$

$$\frac{\Gamma \vdash_c Aa}{\Gamma \vdash_c (\exists x)Ax}$$

Por hipótesis de inducción $\Gamma^g \vdash_i A^g a$; por lo tanto $\Gamma^g \vdash_i (\exists x)A^g x$, y por el ejemplo 5.2.12, $\Gamma^g \vdash_i \neg(\forall x)\neg A^g x$.

- Si la última regla utilizada es RAA

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash_c \bot}{\Gamma \vdash_c A}$$

Por hipótesis de inducción $\Gamma^g, \neg A^g \vdash_i \bot^g$; por lo tanto $\Gamma^g, \vdash_i \neg\neg A^g$ y por el teorema 5.2.28, $\Gamma^g \vdash_i A^g$.

- Si la útima regla utilizada es $e \ \vee$

$$\frac{\Gamma \vdash_c B \vee C \quad \Gamma, B \vdash_c A \quad \Gamma, C \vdash_c A}{\Gamma \vdash_c A}$$

Por hipótesis de inducción, $\Gamma^g \vdash_i \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)$; $\Gamma^g, B^g \vdash_i A^g$ y $\Gamma^g, C^g \vdash_i A^g$,
$\Gamma^g, \ \neg A^g, C^g \vdash_i \bot$,
$\Gamma^g, \ \neg A^g, B^g \vdash_i \bot$,
$\Gamma^g, \ \neg A^g \vdash_i \neg B^g$,
$\Gamma^g, \ \neg A^g \vdash_i \neg C^g$,
$\Gamma^g, \neg A^g \vdash_i \neg B^g \wedge \neg C^g$
$\Gamma^g, \ \neg A^g \vdash_i \bot$,
$\Gamma^g \vdash_i \neg\neg A^g$,
y por el teorema, 5.2.28 $\Gamma^g \vdash_i A^g$.
El caso $e \ \exists$ es similar.
$\Leftarrow$) Claramente $\vdash_c \varphi \leftrightarrow \varphi^g$ y $\Gamma \vdash_i \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_c \varphi$.
El caso de la regla de eliminación del cuantificador existencial es dejado como ejercicio al lector (véase el ejercicio 7). □

Definición 5.2.30. Una fórmula es negativa si sólo contiene los operadores $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$ $\bot$ y todos sus átomos ocurren negados.

Corolario 5.2.31. *Sea A una fórmula negativa, entonces $\vdash_c A$ si y sólo si $\vdash_i A$.*

Definición 5.2.32. La traducción de Kuroda A^k de una fórmula A se define como $\neg\neg A'$, donde:

a) Si A es atómica o $A = \bot$, $A' = A$.

b) $(\neg A)' = \neg A'$

c) $(A \vee B)' = A' \vee B'$

d) $(A \wedge B)' = A' \wedge B'$

e) $(A \rightarrow B)' = A' \rightarrow B'$

f) $((\exists x)A)' = (\exists x)A'$

g) $((\forall x)A)' = (\forall x)\neg\neg A'$

Es decir, la traducción de Kuroda se obtiene negando doblemente toda la fórmula y haciendo la sustitución sancionada por g) en cada subfórmula universalmente cuantificada.

Definición 5.2.33. $\Gamma^k = \{x^k \mid x \in \Gamma\}$

«Es como ollita que hierve mucho, o se quema o se derrama». Una persona poco tolerante que ante cualquier cosa pierde los estribos.

Lema 5.2.34. *Para toda fórmula* A, $\vdash_i A^g \leftrightarrow A^k$.

Demostración. a) $\bot^g = \bot$ y $\bot^k = \neg\neg\bot$ y, como ya probamos, $\vdash_i \bot \leftrightarrow \neg\neg\bot$.

b) Si A es atómica, $A^g = A^k = \neg\neg A$.

c) Si A es $\neg B$, entonces $A^g = \neg B^g$, por hipótesis de inducción, $\vdash_i B^g \leftrightarrow B^k$, es decir, $\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$ y, por consiguiente, $\vdash_i \neg B^g \leftrightarrow \neg\neg\neg B'$ y, por lo tanto, $\vdash_i A^g \leftrightarrow A^k$.

d) Si A es $(B \wedge C)$, $A^g = (B^g \wedge C^g)$, mientras que
$A^k = \neg\neg(B \wedge C)' = \neg\neg(B' \wedge C')$
pero $\vdash_i \neg\neg(B' \wedge C') \equiv (\neg\neg B' \wedge \neg\neg C')$
y, por hipótesis de inducción, $\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$ y $\vdash_i C^g \leftrightarrow \neg\neg C'$,
por lo que $\vdash_i A^g \leftrightarrow A^k$.

e) Si $A = (B \vee C)$, $A^g = \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)$, mientras que $A^k = \neg\neg(B' \vee C')$.
Por hipótesis de inducción,
$\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$ y $\vdash_i C^g \leftrightarrow \neg\neg C'$
por lo tanto,
$\vdash_i (\neg B^g \wedge \neg C^g) \leftrightarrow (\neg\neg\neg B' \wedge \neg\neg\neg C')$
$\vdash_i (\neg B^g \wedge \neg C^g) \leftrightarrow (\neg B' \wedge \neg C')$
$\vdash_i \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g) \leftrightarrow \neg(\neg B' \wedge \neg C')$
$\vdash_i A^g \leftrightarrow \neg\neg(B' \vee C')$ (por el teorema de Glivenko);
por lo tanto,
$\vdash A^g \leftrightarrow A^k$

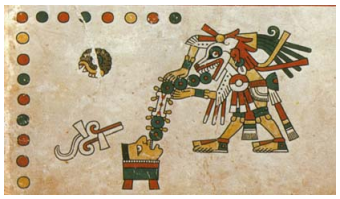
f) Si $A = (B \to C)$, $A^g = B^g \to C^g$ y $A^k \equiv (\neg\neg B' \to \neg\neg C')$ (lema 5.2.23)
Por hipótesis de inducción, $\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$
y $\vdash_i C^g \leftrightarrow \neg\neg C'$;
por lo tanto, $\vdash_i (B^g \to C^g) \leftrightarrow (\neg\neg B' \to \neg\neg C')$
y por el lema 5.2.23, $\vdash_i (B^g \to C^g) \leftrightarrow \neg\neg(B' \to C')$
por lo tanto, $\vdash_i A^g \leftrightarrow A^k$.

g) Si $A = (\forall x)B$, $A^g = (\forall x)B^g$, mientras que $A^k = \neg\neg(\forall x)\neg\neg B'$;
por hipótesis de inducción, $\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$;
por lo tanto, $\vdash_i (\forall x)B^g \leftrightarrow (\forall x)\neg\neg B'$;
puesto que $\vdash_i \neg(\exists x)\varphi x \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi x$, (ejemplos 5.2.6 y 5.2.7)
$\vdash_i (\forall x)B^g \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg B'$
En consecuencia $\vdash_i (\forall x)B^g \leftrightarrow \neg\neg\neg(\exists x)\neg B'$ y
$\vdash_i (\forall x)B^g \leftrightarrow \neg\neg(\forall x)\neg\neg B'$ (ejemplos 5.2.6 y 5.2.7)

h) Si $A = (\exists\, x)B$, entonces $A^g \equiv \neg(\forall\, x)\neg B^g$. Por hipótesis de inducción, $\vdash_i B^g \leftrightarrow \neg\neg B'$. Por ende, $\vdash_i A^g \leftrightarrow \neg(\forall\, x)\neg\neg\neg B'$ y por el lema 5.2.13, $\vdash_i A^g \leftrightarrow \neg(\forall\, x)\neg B'$. De acuerdo con los ejemplos 5.2.6 y 5.2.7 $\vdash_i A^g \leftrightarrow \neg\neg(\exists\, x)B'$, pero $A^k \equiv \neg\neg(\exists\, x)B'$.

□

Corolario 5.2.35. *$\Gamma \vdash_c A$ si y sólo si $\Gamma^k \vdash_i A^k$.*



No había ni un pueblo en toda la tierra. Lobos, víboras y otros animales vivían en la oscuridad, pues no existían entonces ni el sol, nuestro padre, ni el fuego, nuestro abuelo.

Una vez apareció en la laguna un animal parecido a un toro. Allí se paró. La gente lo miró con sorpresa, pues alumbraba, iluminaba, brillaba mucho. Salió de pronto y regresó por donde había venido. Diariamente llegaba a pararse en la laguna.

La gente estaba intrigada, pues no sabía qué clase de animal era. Se juntaron y fueron a orillas de la laguna, allí se quedaron esperando a que saliera. Al rato salió y allí se estuvo. Intentaron flecharlo, pero las flechas se quemaban sin dañarlo.

Un hombre sabio, un ancestro, había descubierto lo que quería el toro; y dijo a la gente que había llegado la hora, que ya se cumpliría lo que él sabía.

«Miren», les dijo, «lo que ese animal animal quiere es que le junten sus alimentos: yesca y leña de todas clases, para arder en ellas».

Escucharon las palabras del sabio y reunieron cuanto había pedido. El animal llegó a la laguna y allí estuvo un rato. Otra vez empezaron a tirarle con sus flechas sin lograr herirlo.

Se quedaron pensativos, nada podían hacer. ¿Cómo dominarlo? ¿Cómo quitarle aquello que el sabio había visto?

El ancestro habló nuevamente: «Vamos a pedirle ayuda a la estrella más grande».

Como este ancestro tenía poderes, habló con él y lo trajo hasta donde estaba el animal. Le enseñó cómo era de brillante el toro, él lo vio.

El animal salió de la laguna y tomó el camino que acostumbraba tomar. Iba a la mitad de ese camino cuando el señor estrella saltó sobre él, descarándolo y haciendo que de su cuerpo saltaran chispas. La gente corrió llevando la yesca y la leña que tenían preparadas, las encendieron y añadieron más leña hasta que creció la lumbre.

Así fue como se adueñaron del fuego. Formaron luego un pueblo pequeño. Otras gentes no tenían fuego, vivían aislados; no los aceptaban ni permitían que se les unieran pues no habían participado en la creación de nuestro abuelo el fuego. Los otros empezaron a tramar cómo robárselo, pero nunca los dejaban acercarse alrededor de la lumbre.

Un tlacuache se comprometió: «Les aseguro que yo me lo robaré», le decía a su gente...

(...continúa)

5.3 La identidad

Ahora agreguemos a nuestro sistema el símbolo de identidad $=$ con las reglas

- $\vdash_i x = x$.
- $A(\tau),\ \tau = u\ \vdash_i A(u)$ si u es un término libre para τ en $A(\tau)$.

Como ejemplo de su uso, mostraremos que $\vdash_i x = y \leftrightarrow y = x$
$x = y,\ x = x \vdash y = x$
$x = x \vdash (x = y \to y = x)$
$\vdash x = x \to (x = y \to y = x)$
$\vdash x = x$
$\vdash (x = y \to y = x)$

En cambio, fórmulas como $x = y \ \vee \ x \neq y$ que sancionan el uso de la identidad clásica no serán válidas en LI.

Para el caso de un lenguaje con identidad, el teorema 5.2.29 toma la forma siguiente:
Como «$x = y$» es una fórmula atómica, definimos $(\tau_1 = \tau_2)^g$ como $\neg\neg(\tau_1 = \tau_2)$.

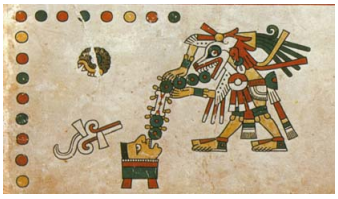
Corolario 5.3.1. *$\Gamma \vdash_c A$ si y sólo si $\Gamma^g, (\forall x)(\forall y)(\neg\neg x = y \to x = y) \vdash_i A^g$.*

Demostración. De manera trivial se agrega a la prueba del teorema el caso $(\tau_1 = \tau_2)^g$.

Tanto en la traducción de Gödel como en la de Kuroda, podemos debilitar la hipótesis pues
$x = y \vdash_i x = y$
$x = y \vdash_i \neg\neg x = y \to x = y$
$x \neq y, \neg x \neq y \vdash_i \bot$
$x \neq y, \neg x \neq y \vdash_i x = y$

$x \neq y \vdash_i \neg\neg x = y \to x = y$
por lo tanto, $x = y \vee x \neq y \vdash_i \neg\neg x = y \to x = y$. □

Corolario 5.3.2. *$\Gamma \vdash_c A$ si y sólo si Γ^k, $(\forall x)(\forall y)(x = y \vee x \neq y) \vdash_i A^k$.*



...Fue con aquéllos, llegó con el que allí gobernaba y empezó a platicarle.

Así admitieron que se acercara a la lumbre. Allí se sentó. Empezó a preguntar dónde habían obtenido algo tan maravilloso que calentaba así. El tlacuache, que tenía frío, se calentó. Repetía: «Qué cosa tan maravillosa tienen ustedes, estoy tan a gusto. Tengo sueño, ¿me dejan dormir aquí?».

«Si no vienes a robárnoslo, si dices la verdad; dijo el jefe, te daremos permiso».

«No, no vengo a robar», mintió».

Lo dejaron y el jefe ordenó a su gente: «Vigílenlo, no sea que se lo lleve. Mientras unos duermen, otros velen. Cuando los dormidos despierten, ésos velarán que el tlacuache no se vaya».

El tlacuache escuchó las órdenes y se acostó, esperando que los otros se acostaran también.

Pusieron más leña en el fuego y se acostaron alrededor del tlacuache haciendo cinco vallas alrededor del animal, que quedó junto a la hoguera.

El tlacuache pensaba. «¿Cómo saldré?» Hizo un plan, pues tenía poder.

El tlacuache durmió a todos con su poder, todos empezaron a roncar alrededor. Calculando que ya estaban profundamente dormidos, se levantó sin hacer el menor ruido. Agarró un tizón y se lo llevó en su cola enrollada. Silenciosamente cruzó las cinco vallas hasta que salió. Cuando estuvo fuera echó a correr.

Alguien oyó el ruido y gritó: «Ya nos robaron el fuego».

Despertaron todos y lo persiguieron, pero ya no lo pudieron alcanzar, lo perdieron de vista, no supieron por dónde se había ido.

El tlacuache llegó a su casa, preparó la hoguera y prendió el fuego. La gente, en todas partes, obtuvo fuego. Así se repartió entre todos; así prendió. La cola del tlacuache se peló cuando robó el tizón, y así la tiene hasta la fecha.

Mito huichol

«Todas mis liendres lo oyeron». Dícese cuando alguien repite y vuelve a repetir muchas veces sus palabras.

5.4 Semántica

Definición 5.4.1. Una fórmula es cerrada cuando no contiene variables libres.

Definición 5.4.2. Un marco de Kripke para la lógica intuicionista es una terna $M = \langle W, R, D\rangle$ donde W es un conjunto no vacío (sus elementos se llamarán nodos), R es una relación reflexiva y transitiva de W en W, y D es una función que a cada w asocia un conjunto no vacío $D(w)$ de tal forma que si $u, v \in W$ y R_{uw}, entonces $D(u) \subseteq D(w)$.

En lo que sigue consideraremos un lenguaje L con algunas constantes y sin letras funcionales ni símbolos de identidad.

Dado un marco de Kripke para la lógica intuicionista $M = \langle W, R, D\rangle$ para cada $w \in W$, sea $C(w)$ un conjunto de constantes tales que $C(v) \subseteq C(w)$ si R_{vw}, y de tal manera que por cada elemento de $D(w)$ haya una constante y sólo una en $C(w)$. Sea $\mathfrak{L}_w$ el resultado de agregar a $\mathfrak{L}$ las constantes del conjunto $C(w)$ y $A_\tau(w)$ las fórmulas atómicas cerradas de L_w.

Definición 5.4.3. Un modelo de Kripke para la lógica intuicionista es un cuádruple $\langle W, R, D, V\rangle$ tal que $\langle W, R, D\rangle$ es un marco de Kripke para la lógica intuicionista y V una función tal que para cada $w \in W$, $V(w) \subset A_\tau(w)$ y tal que si uRw, $V(u) \subset V(w)$.

La definición parecerá menos intrincada si vemos a W como un conjunto de estados de conocimiento ordenados temporalmente, de manera que en cada instante t el sujeto creador (o el matemático idealizado del que hablamos al principio del capítulo) ha construido los objetos $D(t)$ (nombrados por las constantes $(C(t))$ y ha probado las fórmulas $V(t)$. Desde luego, cuando decimos «ha construido» queremos decir que es capaz de construir o que «tiene regla para producir» y, por lo tanto, es razonable exigir que en cada momento los objetos hasta entonces existentes tengan cada uno su nombre. Lo que el matemático ha probado $(V(u))$ seguirá siendo válido en el futuro $(vRw \to (V(u) \subset V(w))$; ningún objeto desaparecerá, aunque algunos nuevos surgirán $(uRw \to D(u) \subset D(w))$

Estipulamos además que para toda constante t de L, $t \in C(u)$ para algún $u \in W$ y que si una constante designa a un objeto en w, designa al mismo objeto en todo mundo posterior.

Definiremos en seguida una extensión, $\models$, de V que tendrá como dominio W y para cada $w \in W$, $\models (w)$ será un subconjunto de las fórmulas de L_w. Como siempre, $\alpha \in \models (w)$ será denotado por «$w \models \alpha$» o «$\models_w \alpha$».

Definición 5.4.4. Sea $M = \langle W, R, D, V\rangle$ un modelo intuicionista y α una fórmula cerrada de L; diremos que α es verdadera en W o $\models_w \alpha$ si y sólo si

a) α es atómica y $\alpha \in V(w)$.

b) α es $\neg\beta$ y para todo v tal que Rwv, $\not\models_v \beta$.

c) α es $(\beta \wedge \gamma)$ y $\models_w \beta$ y $\models_w \gamma$.

d) α es $(\beta \vee \gamma)$ y $\models_w \beta$ o $\models_w \gamma$.

e) α es $(\beta \to \gamma)$ y para todo v, tal que Rwv, si $\models_v \beta$ entonces $\models_v \gamma$.

f) α es $(\exists x)\gamma x$ y existe $c \in C(w)$ tal que $\models_w \gamma(x/c)$.

g) α es $(\forall x)\gamma x$ y para todo v tal que Rwv y para todo $\tau \in C(v)$ $\models_v \gamma(x/\tau)$.

Adviértase que hubiésemos obtenido el mismo resultado para la negación si hubiéramos definido $\neg A$ como $A \rightarrow \bot$.

Podemos extender la definición anterior a fórmulas que no son cerradas. Si α es abierta y $\overline{\alpha}$ es su cerradura universal[1] definimos $\models_w \alpha$ como $\models_w \overline{\alpha}$, donde α es una fórmula de L_w.

Definición 5.4.5. Una fórmula α es válida intuicionísticamente si α es verdadera en cada modelo intuicionista.

Lema 5.4.6. *$\models_w \neg\neg\varphi$ si y sólo si para cualquier v tal que Rwv hay un z, Rvz y $\models_z \varphi$.*

Demostración. Por definición $\models_w \neg\neg\varphi$ si y sólo si para cualquier v si Rwv, entonces $\not\models_v \neg\varphi$ y esto ocurrre si y sólo si existe un z tal que Rvz y $\models_z \varphi$. □

Lema 5.4.7. *a) $\models_w \neg(\exists x)\neg\varphi x$ si y sólo si para todo v tal que Rwv, y para todo $c \in C(v)$ hay un z tal que Rvz tal que $\models_z \varphi(c)$.*

b) $\models_w \neg(\forall x)\neg\varphi x$ si y sólo si para todo v tal que Rwv existen un z tal que Rvz, un $\tau \in C(z)$ y un s con la propiedad de que Rzs y $\models_s \varphi(t)$.

Demostración. a) $\models_w \neg(\exists x)\neg\varphi x$ si y sólo si (por definición) para todo v tal que Rwv $\not\models_v (\exists x)\neg\varphi x$ y esto es cierto si y sólo si para todo $c \in C(v)$, $\not\models_v \neg\varphi(c)$. Por último $\not\models_v \neg\varphi(c)$ si y sólo si existe un z, Rvz y $\models_z \varphi(c)$.

b) Se deja al lector como ejercicio.

□

Definición 5.4.8. Llamamos a un nodo w terminal si ningún $v \in w$, $v \neq w$ es tal que Rwv.

En un nodo terminal las condiciones de verdad de una fórmula son exactamente las mismas que en la lógica clásica. Por ello, cada modelo clásico puede considerarse un modelo intuicionista de un solo nodo.

Corolario 5.4.9. *Si $\models_i \alpha$, entonces $\models_c \alpha$.*

Lema 5.4.10. *Si Ruv y $\models_u \varphi$, entonces $\models_v \varphi$.*

Demostración. a) Si φ es atómica, el lema se cumple por definición.

b) Si $\varphi = \neg A$

Supongamos que Ruv y que $\models_u \neg A$, pero $\not\models_v \neg A$. Entonces existe z tal que Rvz y $\models_z A$. Dado que Ruv y Rvz, entonces Ruz, pero eso es contradictorio.

[1] Es decir, $\overline{\alpha}$ es $(\forall v_1)\cdots(\forall v_n)\alpha$ donde $v_1, \ldots, v_n$ son las variables libres de α en orden de aparición.

c) Si $\varphi = A \wedge B$.

Supongamos que Ruv y que $\models_u A \wedge B$.

entonces, por definición, $\models_u A$ y $\models_u B$.

Por hipótesis de inducción $\models_v A$ y $\models_v B$ y, en consecuencia, $\models_v A \wedge B$.

El caso de la disyunción es análogo.

d) Si $\varphi \equiv A \to B$, supongamos que $\models_u A \to B$ y sea v tal que Ruv. Debemos mostrar que $\models_v A \to B$. Sea z tal que Rvz y $\models_z A$. Como Ruv y Rvz entonces Ruz y, por lo tanto, $\models_z B$, de aquí que $\models_v A \to B$.

e) Si $\varphi = (\exists x)\psi x \quad Ruv \quad$ y $\quad \models_u (\exists x)\psi x$

entonces $\models_u \psi c$ para alguna $c \in C(u) \subset C(v)$;

por hipótesis de inducción $\models_v \psi c$ y,

por lo tanto, $\models_v (\exists x)\psi x$.

f) Si $\varphi = (\forall x)Ax$, $\models_u (\forall x)Ax$ y Ruv.

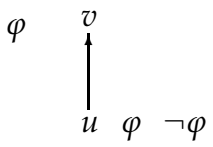
Sea z tal que Rvz y $c \in C(z)$.

Puesto que Ruz, $\models_z Ac$ y por lo tanto $\models_v (\forall x)Ax$.

□

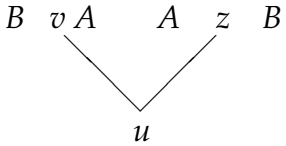
Utilizando modelos de Kripke, mostremos que algunas fórmulas clásicamente válidas son falsas en algunos modelos intuicionistas. Las flechas del diagrama correspondientes a la reflexividad y a la transitividad del modelo no serán dibujadas.

a) $\not\models_i \neg\neg\varphi \to \varphi$



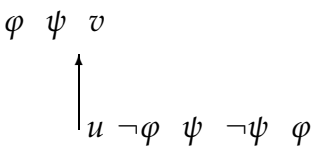
Aquí u y v son los nodos del modelo. La flecha indica que Ruv que φ y $\neg\varphi$ aparezcan a la derecha de u significa que $\not\models_u \varphi$ y $\not\models_u \neg\varphi$. Que φ esté a la izquierda de v representa que $\models_v \varphi$; claramente aquí $\models_u \neg\neg\varphi$ pues en todo mundo al que u tiene acceso $\neg\varphi$ es falsa. Además, $\not\models_u \varphi$, por lo que $\not\models_u \neg\neg\varphi \to \varphi$.

b) $\not\models_i (A \to B) \vee (B \to A)$



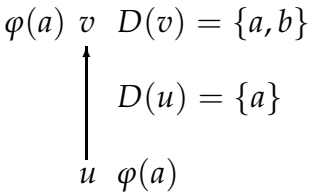
Claramente, $\not\models_u (A \to B)$ y $\not\models_u (B \to A)$.

c) $\not\models_i (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$.



$\models_u \varphi \to \psi$ pero $\not\models_u \neg\varphi$ y $\not\models_u \psi$.

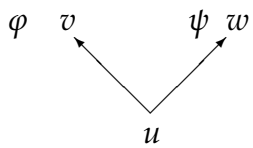
d) $\not\models_i \neg(\forall x)\varphi x \to (\exists x)\neg\varphi$.



Por definición, $\models_u \neg(\forall x)\varphi x$ si y sólo si
para todo v tal que Ruv, $\not\models_v (\forall x)\varphi x$ y esto
si y sólo si $\not\models_u \varphi(a)$ o $\not\models_v \varphi(a)$ o $\not\models_v \varphi(b)$;
se concluye que $\models_u \neg(\forall x)\varphi x$.
Por otro lado, $\models_u (\exists x)\neg\varphi(x)$ si y sólo si
$\models_u \neg\varphi a$ y esto
si y sólo si $\not\models_u \varphi(a)$ y $\not\models_v \varphi(a)$;
concluimos que $\not\models_u (\exists x)\neg\varphi$ y $\not\models_u \neg(\forall x)\varphi x \to (\exists x)\neg\varphi$.

Al que nace pa' tamal, del cielo le caen las hojas. Refrán popular predestinacionista que significa que el que nace para algo le vendrán espontáneamente todos los medios para ello.

e) $\not\models_i \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$



puesto que $\varphi \wedge \psi$ no es verdadero en ninguno de los tres nodos

$\models_u \neg(\varphi \wedge \psi)$

pero $\not\models_u \neg\varphi$

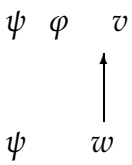
pues $\models_v \varphi$ y

$\not\models_u \neg\psi$ pues $\models_w \psi$

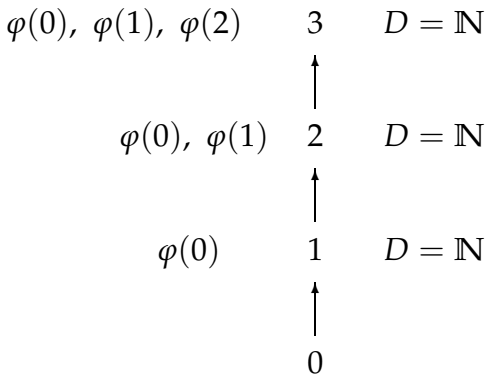
y por lo tanto

$\not\models_u \neg\varphi \vee \neg\psi$.

f) $\not\models_i (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.



g) $\not\models_i (\forall x)\neg\neg\varphi x \to \neg\neg(\forall x)\varphi x$.



Aquí debemos entender que el diagrama continúan hacia arriba con el mundo 4, el 5... indefinidamente siguiendo el mismo patrón. Utilizando el lema 5.4.6, $\models_0 \neg\neg\varphi(0)$ si y sólo si para cualquier v tal que $R0v$ hay un z tal que Rvz y $\models_z \varphi(0)$. En consecuencia, para cualquier $n \in D(v)$, $R0v$, $\models_n \neg\neg\varphi(n)$ y por lo tanto, $\models_0 (\forall x)\neg\neg\varphi(x)$. De nuevo, $\models_0 \neg\neg(\forall x)\varphi x$ si y sólo si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un m tal que nRm y $\models_m (\forall x)\varphi x$, lo que es falso.

«No le estés dando vuelta al malacate porque se te enredan las pitas». No hacer las cosas más complicadas de lo que son en realidad, o no provocar a una persona.

Con el mismo método podemos probar que algunos esquemas son válidos.

h) $\models_i (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Por definición, $\models_u (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

si y sólo si para todo v tal que Ruv si $\models_v \varphi \wedge \neg\psi$

entonces $\models_v \neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Supongamos un v tal que Ruv y $\models_v \varphi \wedge \neg\psi$ y que $\not\models_v \neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Ahora bien, $\not\models_v \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si

existe un z tal que Rvz (y Ruz) y

$\not\models_z \varphi$ o $\models_z \psi$, pero eso no puede ocurrir pues

$\models_v \varphi$ y $\models_v \neg\psi$.

i) $\models_i (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$.

Mostraremos que $\models_u A \rightarrow B$ y $\not\models_u \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ conduce a una contradicción. Lo primero significa que en cualquier mundo futuro a u (o en u mismo) si A es verdadero, B lo es también.

$\not\models (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ significa que hay un w tal que Ruw

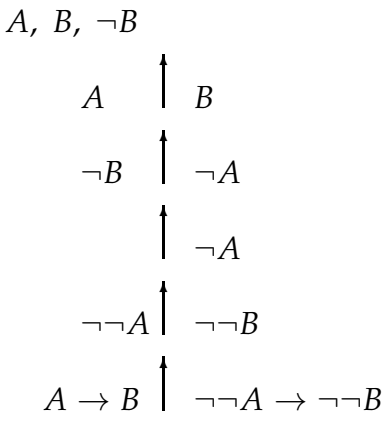
$$\models_w \neg\neg A \qquad (1)$$

y

$$\not\models_w \neg\neg B \qquad (2)$$

(1) significa que en todo mundo v, futuro a w, $\not\models_v \neg A$ y por lo tanto que por cada uno de esos mundos hay otro posterior en el que A es verdadera y en el que, en consecuencia de nuestra hipótesis, B es verdadera;

(2) significa que en algún nodo posterior a w se probará $\neg B$ y lo mismo ocurrirá en todo mundo posterior, lo que contradice (1).



j) $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$.

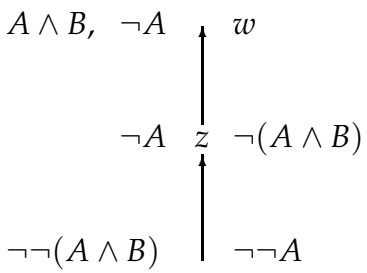
Probemos primero que

$\models_u \neg\neg(A \wedge B)$ (1) y $\not\models_u \neg\neg A$ (2) es contradictorio.

Por (2) existe un mundo posterior a u, z tal que $\models_z \neg A$, por lo que para todo w si Rzw, $\models_w \neg A$. Tenemos por (1) que $\not\models_z \neg(A \wedge B)$ y, por lo tanto, en un mundo posterior w, $\models_w A \wedge B$.

Pero entonces hay un nodo w con $\models_w A \wedge B$ y $\models_w \neg A$ contradicción.

El lector debe recordar que la relación R no es un orden total. Es por la disposición de los conectivos y cuantificadores que en estos diagramas estamos autorizados a dibujar la rama que se muestra. En lo sucesivo escribiremos a veces $n \leq m$ en lugar de nRm.



Probaremos ahora que $\models_u (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ y que $\not\models_u \neg\neg(A \wedge B)$ es contradictorio. Si abreviamos Ruv como $u \leq v$ y utilizamos los símbolos lógicos en el metalenguaje, podemos visualizar mejor lo que esto significa.

$\vdash_u \neg\neg A \Leftrightarrow (\forall v \geq u)(\exists w > v)$ tal que $\models_w A$ (1)

$\vdash_u \neg\neg B \Leftrightarrow (\forall v \geq u)(\exists z > v)$ tal que $\models_z B$ (2)

$\not\vdash_u \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists r \geq u) \models_r \neg(A \wedge B)$ (3)

Por (3), Sea $r_0 \geq u$ tal que $\models_{r0} \neg(A \wedge B)$ (4)

Por el principio de permanencia

$(\models_u \varphi$ y $v \leq v \Rightarrow \models_v \varphi)$ $(\forall v \geq r_0) \models_v \neg(A \wedge B)$ (10)

Por (1) existe w_0 tal que $w_0 \geq r_0$ y $\vdash_{w_0} A$. (7)

Por (2) puesto que $w_0 \geqslant u$ existe z_0 tal que $z_0 \geq w_0$ y $\vdash_{z_0} B$ (8)

Por el principio de permanencia, $\vdash_{z_0} A \wedge B$, lo que contradice (10).

k) $\models_i \neg\neg(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\neg\varphi(x)$.

Supongamos que $\models_u \neg\neg(\forall x)\varphi x$ y $\not\models_u (\forall x)\neg\neg\varphi x$.

$\models_u \neg\neg(\forall x)\varphi x \Rightarrow (\forall v > u)(\exists w > v) \models_w (\forall x)\varphi x$ (1)

$\not\models_u (\forall x)\neg\neg\varphi x \Rightarrow (\exists r \geq u)(\exists a \in D(r)) \not\models_r \neg\neg\varphi a$

Sean $r_0 \geq u$ y $a \in D$ tales que $\not\models_{r_0} \neg\neg\varphi a$; entonces $(\exists s > r_0)$ tal que $\models_s \neg\varphi a$. Sea s_0 tal que $\models_{s_0} \neg\varphi a$; entonces $(\forall z \geq s_0)$

$\models_z \neg\varphi a \quad a \in D(z)$

por (1) $(\exists w > s_0) \quad \models_w (\forall x)\varphi x$, lo que es contradictorio.

Ejemplo 5.4.11. Si x no está libre en A, entonces

$$\models_i A \vee (\forall x)Bx \to (\forall x)(A \vee Bx).$$

Supongamos que

$$\models_u A \vee (\forall x)Bx \text{ pero } \not\models_u (\forall x)(A \vee Bx)$$

$$\not\models_u (\forall x)(A \vee Bx) \Rightarrow (\exists v \geq u)(\exists a \in D(v)) \quad \not\models_v A \vee Ba$$
$$\Rightarrow \quad \not\models_v A \text{ y } \not\models_v Ba,$$

pero entonces

$$\not\models_v A \text{ y } \not\models_v (\forall x)Bx,$$
$$\not\models_u A \vee (\forall x)Bx.$$

Ejemplo 5.4.12. Aunque x no esté libre en A,
$\not\models_i (\forall x)(A \vee Bx) \to A \vee (\forall x)Bx$.

$$\begin{array}{lll} Ba \quad A \; v \; Bb & & B = \{a\} \quad D_v = \{a, b\} \\ \uparrow & & \\ Ba \quad u \; A & & B = \{a\} \quad D_u = \{a\} \end{array}$$

puesto que $\models_u Ba \Rightarrow$ para todo $x \in D(u)$
$\models_u (A \vee Bx)$
puesto que $\models_v A \Rightarrow$ para todo $x \in D(v)$
$\models_v (A \vee Bx)$
por lo tanto, $\models_u (\forall x)(A \vee Bx)$

por otro lado, $\nVdash_u A$ y puesto que $\nVdash_v Bb$, $\nVdash_u (\forall x)Bx$
por consiguiente, $\nVdash_u A \vee (\forall x)Bx$.

Ejemplo 5.4.13. $\models_i (\exists x)\neg Ax \to \neg(\forall x)Ax$
Supongamos que $\models_u (\exists x)\neg Ax$ (1) y

$$\nVdash_u \neg(\forall x)Ax \tag{✣}$$

De (✣) concluimos que $(\exists v \geq u) \models_v (\forall x)Ax$; llamemos v_0 al valor de v que hace verdadera esta aserción; entonces

$$(\forall w \geq v_0 > u)(\forall a \in D(w)) \models_w Aa. \tag{✦}$$

Por otro lado, existe $t \in D(u)$ tal que $\models_u \neg A(t)$ con $t \in D(u)$; entonces $t \in D(w)$ y, por monotonía, $\models_w \neg A(t)$, pero esto contradice (✦).

Ejemplo 5.4.14. $\models_i \neg(\exists x)Ax \leftrightarrow (\forall x)\neg Ax$.
Supongamos que

$$\models_u \neg(\exists x)Ax \tag{✧}$$

Esto significa que $(\forall w \geq u) \quad \nVdash_w (\exists x)Ax$ lo que, a su vez, implica que para cualquier $a \in D(w)(w \geq u)$,

$$\nVdash_w Aa \tag{5.4.1}$$

Por otro lado, supongamos que $\nVdash_u (\forall x)\neg Ax$; entonces existe $v \geq u$ y $b \in D(v)$ tal que $\nVdash_v \neg Ab$; por lo tanto, $(\exists r \geq v)$ tal que $\models_r Ab$, pero esto contradice que para cualquier $a \in D(w)(w \geq u)$, $\nVdash_w Aa$, pues $r \geq v \geq u$.

Ahora supongamos que

$$\models_u (\forall x)\neg Ax \tag{✪}$$

y

$$\nVdash_u \neg(\exists x)Ax \tag{✯}$$

por (✯) $(\exists v \geq u) \models_v (\exists x)Ax$. Por lo tanto, $(\exists v \geq u)$ y $(\exists a \in D(v)) \models_v Aa$. Pero, por (✪), $(\forall v \geq u)$ y $(\forall a \in D(v)) \models_v \neg Aa$ y por consiguiente $\nVdash_v Aa$, lo que es contradictorio.

 **Teorema 5.4.15.** *Si* $\Sigma \vdash_i \alpha$, *entonces* $\Sigma \models_i \alpha$.

Demostración. Supongamos que $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es un conjunto de fórmulas cerradas.

Sea $M = \langle W, R, D, V\rangle$ un modelo de Kripke para la lógica intuicionista y $w \in W$.

Supongamos que α se derivó de Σ a través de una derivación Der. Haremos inducción sobre los elementos de Der.

a) Si $\alpha \in \Sigma$, el caso es obvio.

b) Si el último paso de Der fue del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \text{ y } \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$$

Por hipótesis de inducción, si $w \models \gamma$ (para toda $\gamma \in \Gamma$) entonces $\models_w \alpha$ y $\models_w \beta$, de lo que concluimos $\models_w \alpha \wedge \beta$.

Similares son los casos de $\wedge e$ y $\vee i$ y triviales los de debilitamiento y reducción.

c) Si el último paso Der fue del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B, \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Por hipótesis de inducción, si $\models_w \gamma$ (para toda $\gamma \in \Gamma$) $\models_w A \vee B$ y si $\models_w A$, entonces $\models_w C$; si $\models_w B$, entonces $\models_w C$.

Dado que $\models_w A \vee B$ o $\models_w A$ o $\models_w B$; en ambos casos se sigue que $\models_w C$.

d) Si el último paso de Der fue

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

por hipótesis de inducción, $w \models \gamma$ (para toda $\gamma \in \Gamma$), entonces $\models_w A \to B$ y $\models_w A$; por lo tanto, $\models_w B$.

e) Si el último paso de Der fue

$$\frac{\Gamma A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to B)}$$

entonces, por hipótesis de inducción, para cualquier w tal que $\models_w \gamma$ (para toda $\gamma \in \Gamma$) y $\models_w A$, entonces $\models_w B$. Sea w que cumple el antecedente de este condicional. Debemos mostrar que $\models_w A \to B$. Sea u tal que Rwu y $\models_v A$. Por monotonía, $\models_u \gamma$ (para cada $\gamma \in \Gamma$); por lo tanto, $\models_u B$ y $\models_w A \to B$.

f) El caso

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash B} \text{ es trivial.}$$

g) Si el último paso de Der fue

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash (\forall x)Ax}$$

donde t no aparece libre en Γ, entonces, por hipótesis de inducción, $\Gamma \models A(t)$. Si $\models_w \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ entonces para toda $t \in \mathcal{L}(w)$ (donde t es una constante o variable libre en Γ) $\models_w A(t)$. Por monotonía para toda v, tal que Rwv, $\models_v \Gamma$. Por lo tanto, $\models_v A(t)$ para todo $t \in \mathcal{L}(v)$. De aquí se sigue que $\models_w (\forall\, x)Ax$.

h) El caso $\forall e$ es trivial y los de los cuantificadores existenciales son similares.

□

Definición 5.4.16. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un conjunto K de constantes, un conjunto Γ de fórmulas es K saturado si:

(i) $\Gamma \nvdash_i \bot$

(ii) Si $A \vee B \in \Gamma$, entonces $A \in \Gamma$ o $B \in \Gamma$

(iii) Si $(\exists x)A(x) \in \Gamma$, entonces $Ac \in \Gamma$ para alguna constante $c \in K$

Teorema 5.4.17. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas cerradas de un lenguaje $\mathcal{L}$ y K un conjunto numerable de constantes no pertenecientes a $\mathcal{L}$. Si $\Gamma \nvdash_i \alpha$, entonces hay un conjunto Δ de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L} + K$ tal que Δ es K saturado, $\Gamma \subset \Delta$ y $\Delta \nvdash_i \alpha$.*

Demostración. Construiremos Δ mediante una serie de extensiones $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \ldots$. Sea $\Gamma_0 = \Gamma$. Supongamos que ya tenemos Γ_n tal que $\Gamma_n \nvdash \alpha$ y Γ_n sólo contiene un número finito de constantes de K.

Supongamos que hemos enumerado todas las fórmulas de la forma $B \vee C$ o $(\exists x)B$.

Si ya tenemos Γ_n, consideremos la primera fórmula θ de nuestra lista (es decir disyuntiva o existencial) que no haya sido considerada y tal que $\Gamma_n \vdash_i \theta$ y si es de la forma $B \vee C$ tal que $B \notin \Gamma_n$ y $C \notin \Gamma_n$.

a) Si se trata de una fórmula de la forma $B \vee C$; si $\Gamma_n, B \nvdash_i \alpha$, sea $\Gamma_n \cup \{B\} = \Gamma_{n+1}$. Si no, sea $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{C\}$.

b) Si se trata de una fórmula del tipo $(\exists x)B$, sean d una constante de K que no figure en $\Gamma_n \cup \{\alpha\} \cup \{B\}$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{B(x/d)\}$. Sea $\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$.

Para concluir, debemos mostrar que,

a) $\Delta \nvdash_i \alpha$. Basta, por supuesto, demostrar que $\Gamma_n \nvdash \alpha$, entonces $\Gamma_{n+1} \nvdash \alpha$. Supongamos que $\Gamma_n \nvdash \alpha$ y que Γ_{n+1} se obtuvo al considerar una fórmula disyuntiva $(B \vee C)$.

Si $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{B\}$, entonces, por definición, $\Gamma_n, B \nvdash \alpha$.

Si $\Gamma_n, B \vdash \alpha$, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{C\}$; pero si $\Gamma_n, B \vdash \alpha$ entonces $\Gamma_n, C \nvdash \alpha$ pues si $\Gamma_n, B \vdash \alpha$ y $\Gamma_n, C \vdash \alpha$, dado que $\Gamma_n \vdash B \vee C$, entonces $\Gamma_n \vdash \alpha$, lo que va contra la hipótesis de inducción.

Supongamos ahora que Γ_{n+1} se obtuvo al considerar una fórmula existencial $(\exists x)B$ y que $\Gamma_{n+1} \vdash \alpha$, es decir que $\Gamma_n \cup \{B(d)\} \vdash \alpha$. Puesto que $\Gamma_n \vdash (\exists x)Bx$, entonces $\Gamma_n \vdash \alpha$ pues d no es libre en Γ_n ni en α, lo que es contradictorio.

b) Δ es una teoría C-saturada.

1. Supongamos que $B \vee C \in \Delta$ y sea n el primer natural tal que $\Gamma_n \vdash B \vee C$. Obviamente $B \vee C$ no ha sido considerada antes del paso n y para todo $m > n$, $\Gamma_m \vdash B \vee C$. Cuando $B \vee C$ sea finalmente considerada en el paso p o $B \in \Gamma_{p+1}$ o $C \in \Gamma_{p+1}$ y, por lo tanto, o $B \in \Delta$ o $C \in \Delta$.
2. Supongamos que $(\exists x)Bx \in \Delta$ y sea n el primer natural tal que $\Gamma_n \vdash (\exists x)Bx$. En algún momento h posterior a n o igual a n, $(\exists x)Bx$ será considerado y $B(d) \in \Gamma_{n+1}$ para alguna constante d, y por lo tanto, $B(d) \in \Delta$.
3. Si $\Delta \vdash \bot$ entonces existe un natural n tal que $\Gamma_n \vdash \bot$ y, por lo tanto, $\Gamma_n \vdash \alpha$, lo que es contradictorio.

□

 **Teorema 5.4.18.** *Si $\Gamma \nvdash_i \alpha$ hay un modelo de Kripke para la lógica intuicionista $M = \langle W, R, D, V\rangle$ y $w \in W$ tal que $w \models \Gamma$ y $w \not\models \alpha$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de α y C_0 un conjunto numerable de constantes nuevas.

Sea Γ_0 tal que $\Gamma \subset \Gamma_0$, Γ_0 es C_0-saturado y $\Gamma_0 \nvdash \alpha$ que existe, por el teorema anterior; tomemos ahora una sucesión $C_1, C_2, \ldots$ de conjuntos de constantes tales que $C_i \cap C_j = \emptyset$ $(i, j \geq 0)$, ninguna de las cuales pertenece a $\mathcal{L}$.

Sea $C^n = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n \quad \mathcal{L}^n = \mathcal{L} \cup C^n$ y $\mathcal{L}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n$

Definimos el modelo de Kripke $M = \langle W, R, D, V\rangle$ de la siguiente manera: $W = \{\Delta : \Gamma_0 \subset \Delta$ y existe n tal que Δ es C^n saturado $\}$, Rvw si y sólo si $v \subset w$, Si $w \in W$, $D(w) = C^n$ con n como el menor natural x tal que w es C^x saturado.

Si R^n es un símbolo de relación n-aria y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D_w$, $V(w, R^n(a_1, \ldots, a_n)) =$ verdadero si y sólo si $R^n(a_1, \ldots, a_n) \in w$.

Ahora bien, lo único que falta demostrar es que si $w \in W$ y β es una fórmula de $\mathcal{L}^*$, $\models_w \beta$ si y sólo si $\beta \in w$ y la demostración sigue las pautas de otras pruebas similares que ya hemos visto en esta obra. □

5.5 Árboles semánticos

Recurriremos de nuevo a la técnica de los árboles semánticos (también llamada de los tableaux) para la lógica intuicionista. A diferencia de lo que ocurre con los árboles para el cálculo de predicados y para la lógica modal, un árbol para la lógica intuicionista contendrá, además de una fórmula, un signo «+» o «-» y un índice.

Así, un nodo «$\alpha + i$» indicará que la fórmula α es verdadera en el mundo i, y «$\alpha - i$» significará que α es falsa en i. Ahora «$\neg\alpha + i$» no será equivalente a «$\alpha - i$» pues el que una fórmula sea falsa en un nodo i no implica que su negación sea verdadera en i. Las reglas para la construcción de árboles serán las que especificaremos enseguida. Si en el árbol tenemos la expresión iRj diremos que j es un sucesor de i o que i es un antecesor de j.

Si α es atómica

$$\begin{array}{l} \alpha \ + \ i \\ | \\ \alpha \ + \ j \end{array}$$

donde j es cualquier índice tal que iRj haya aparecido en la rama. Esta regla corresponde a la condición hereditaria (y a veces la aplicaremos para α no atómica, como una regla derivada).

$$\begin{array}{l} \alpha \wedge \beta \ + \ i \\ | \\ \alpha \ + \ i \\ | \\ \beta \ + \ i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha \wedge \beta \ - \ i \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \ - \ i \qquad \beta \ - \ i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha \vee \beta \ + \ i \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \ + \ i \qquad \beta \ + \ i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha \vee \beta \ - \ i \\ | \\ \alpha \ - \ i \\ | \\ \beta \ - \ i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg\alpha \ + \ i \\ | \\ \alpha \ - \ j \end{array}$$

donde j es cualquier índice tal que iRj aparece en un nodo de la rama.

$$\begin{array}{l} \neg\alpha \ - \ i \\ | \\ iRj \\ | \\ \alpha \ + \ j \end{array}$$

donde j es un índice que no ha aparecido hasta ahora en la rama.

$$\begin{array}{l} (\alpha \to \beta) \ + \ i \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \ - \ j \qquad \beta \ + \ j \end{array}$$

donde j es cualquier índice tal que iRj aparece en un nodo de la rama.

$$\begin{array}{l} (\alpha \to \beta) \ - \ i \\ | \\ iRj \\ | \\ \alpha \ + \ j \\ | \\ \beta \ - \ j \end{array}$$

donde j es un índice que no ha aparecido hasta ahora en la rama.

$$\begin{array}{l}(\exists x)\varphi x \quad + \; i \\ \quad\vert \\ \quad \varphi c \quad + \; i\end{array}$$

Para alguna constante c nueva en la rama.

$$\begin{array}{l}(\exists x)\varphi x \quad - \; i \\ \quad\vert \\ \quad \varphi c \quad - \; j\end{array}$$

Para cualquier constante c si ninguna ha aparecido en la rama, o cualquier c que figure en algún momento en la rama y cualquier j tal que jRi aparece en la rama, siempre y cuando c se haya introducido en el mundo j o en un antecesor de j.

$$\begin{array}{l}(\forall x)\varphi x \quad + \; i \\ \quad\vert \\ \quad \varphi c \quad + \; j\end{array}$$

Para cualquier constante c si ninguna ha aparecido en la rama, o cualquier c que figure en algún momento en la rama y cualquier j tal que iRj aparece en la rama, siempre y cuando c se haya introducido en el mundo j o en un antecesor de j.

$$\begin{array}{l}(\forall x)\varphi x \quad - \; i \\ \quad\vert \\ \quad iRj \\ \quad\vert \\ \quad \varphi c \quad - \; j\end{array}$$

Para alguna j nueva en la rama y una nueva constante c

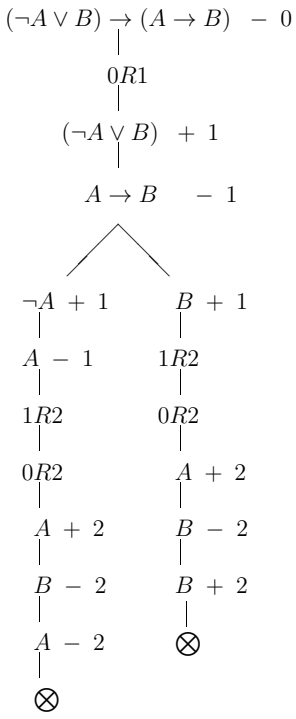
Desde luego, también supondremos que el procedimiento incluye las indicaciones respectivas a la reflexividad y a la transitividad de la relación de accesibilidad y a que el dominio de un mundo nunca puede ser vacío. La rama de un árbol se cerrará sea porque aparezca en él una fórmula afirmada y la misma fórmula negada o sea porque una fórmula y su negación ocurran afirmadas (es decir, con signos positivos) pero no porque una fórmula y su negación aparezcan con signos negativos en una misma rama. Veamos ahora algunos ejemplos.

«Cantar ajeno, palabra ajena» Significa que alguien no dice sus propias palabras, trátese de vieja plática o de discurso cortesano, y no es sino un macehual el que los pronuncia.

Ejemplo 5.5.1.

Considere el siguiente árbol,

$\models_i (\neg A \vee B) \to (A \to B)$



Para los tarugos siempre es día de san Bartolo. Refrán popular de tipo exclamativo que significa que para los tarugos siempre es su día.

Ejemplo 5.5.2. Observe con atención el siguiente árbol:

$\models_i A \to \neg\neg A$

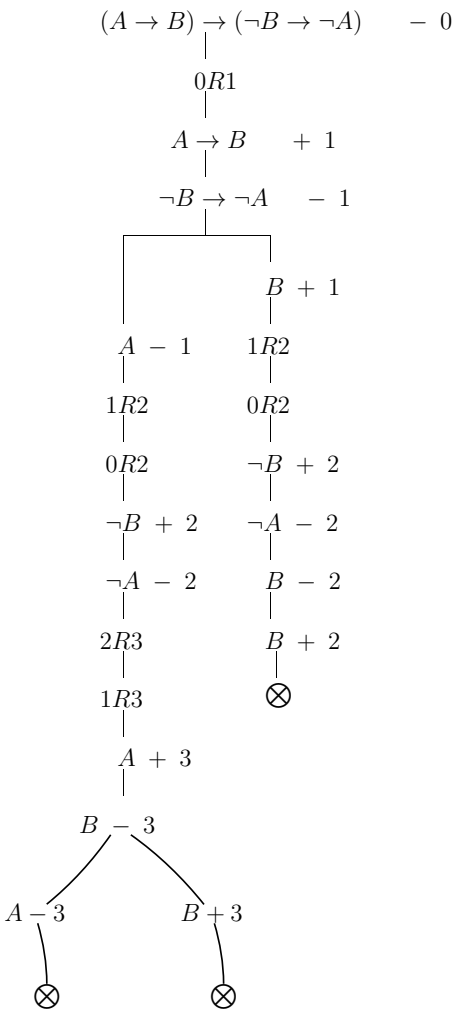
$$
\begin{array}{l}
A \to \neg\neg A \quad - \ 0 \\
\quad | \\
0R1 \\
\quad | \\
\quad A \ + \ 1 \\
\quad | \\
\neg\neg A \ - \ 1 \\
\quad | \\
1R2 \\
\quad | \\
0R2 \\
\quad | \\
\neg A \ + \ 2 \\
\quad | \\
\quad A \ - \ 2 \\
\quad | \\
\quad A \ + \ 2 \\
\quad | \\
\quad \otimes
\end{array}
$$

«Mala crianza, tontería». Dícense estas palabras del que no es educado, no habla bien, no hace bien aquello que se le encarga, vive en su mala crianza, en su tontería.

Nadie se rasca para afuera. Refrán popular que se usa para expresar en forma sentenciosa que todo mundo busca su propio provecho.

Ejemplo 5.5.3. Construimos el árbol

$\models_i (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$



Mi papá se fue al puerto y me dejó una navaja con un letrero que dice «si quieres comer, trabaja».

Ejemplo 5.5.4. Ahora el árbol

$\models_i \neg\neg A \to A$

$\neg\neg A \to A \quad - \quad 0$

$0R1$

$\neg\neg A \quad + \quad 1$

$A \quad - \quad 1$

$\neg A \quad - \quad 1$

$1R2$

$A \quad + \quad 2$

$\neg A \quad - \quad 2$

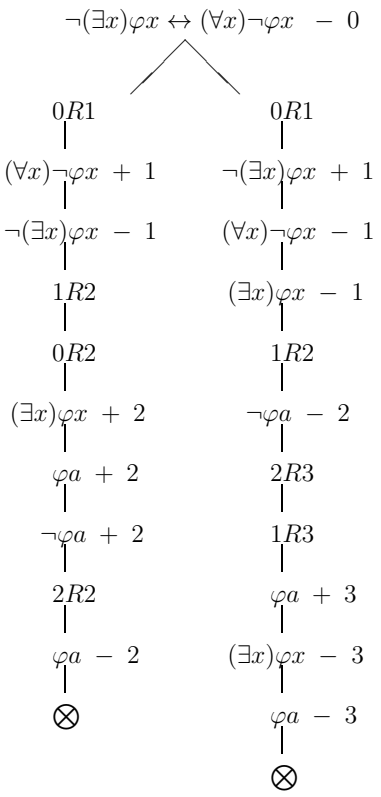
$2R3$

$A \quad + \quad 3$

observamos claramente que el árbol no va a cerrrarse.

«Andas jadeando, dándote golpes de pecho, como si hubieras bebido toloache». Se dice a aquél que ya no quiere oír consejo, que está como borracho, como si hubiera tomado toloache, así vive, ya no se acuerda de los consejos que le han dado.

$\models_i \neg(\exists x)\varphi x \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi x$



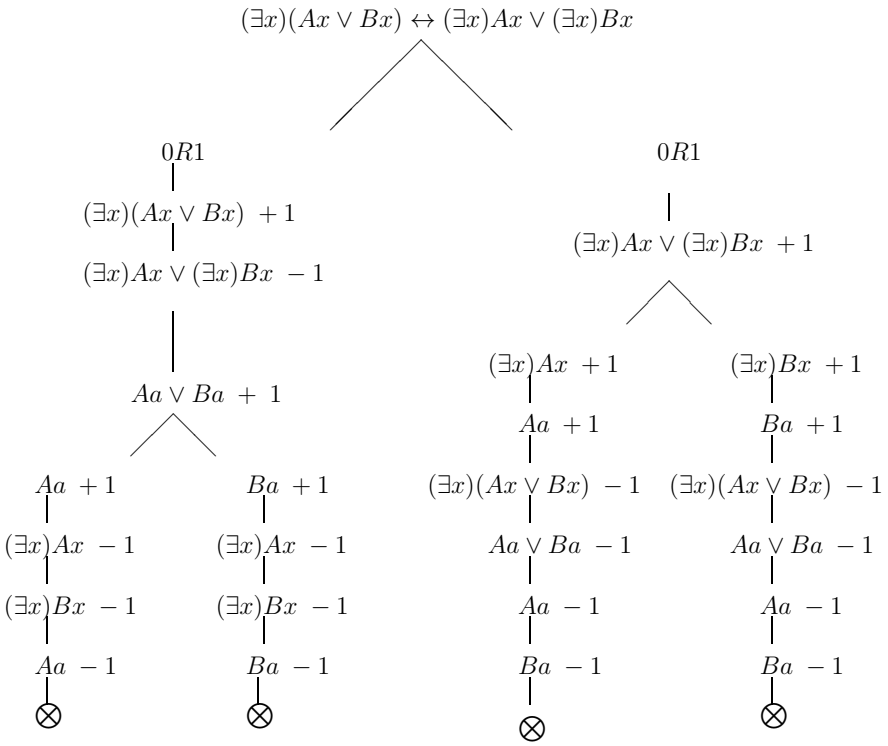
Ejemplo 5.5.5.

«Obsidiana que hiere, caña tiesa». Estas palabras se decían de aquél que vivía odiando a otro y daba grandes pruebas de ello, que andaba diciendo: ¿qué le haré a ese maldito? Mucho andaba buscando, inventando algo malo que hacer en su contra.

Todo el rato que está uno enojado, pierde de estar contento. Dicho que de manera simple expresa los inconvenientes de enojarse.

$\models_i \ (\exists x)(Ax \vee Bx) \leftrightarrow (\exists x)Ax \vee (\exists x)Bx$

Ejemplo 5.5.6.



«Como jade, como turquesa; derecho, redondo». Estas palabras se decían de algún excelente discurso o amonestación del rey; se decía: ha hablado admirablemente, como un jade, como una turquesa, derecho y redondo.

Ejemplo 5.5.7. Sea B una fórmula que no contiene libre a x.

$\models_i (\exists x)(Ax \to B) \to ((\forall x)Ax \to B))$

$(\exists x)Ax \to B) \to ((\forall x)Ax \to B) \;\; - \; 1$

$0R1$

$(\exists x)(Ax \to B) \;\; + \; 1$

$((\forall x)Ax \to B)) \;\; - \; 1$

$(Aa \to B) \;\; + \; 1$

$1R2$

$(\forall x)Ax \;\; + \; 2$

$B \;\; - \; 2$

$Aa \;\; - \; 2$ | $B \;\; + \; 2$

$Aa \;\; + \; 2$ | $\otimes$

$\otimes$

«Va echando humo, va ardiendo». Estas palabras se decían de aquel que hablaba con gran violencia, que decía cosas hirientes, y todos se quedaban espantados.

Ejemplo 5.5.8. Aquí A es una fórmula que no contiene libre a x.

$\not\models_i \ ((\forall x)\varphi x \to A) \to (\exists x)(\varphi x \to A)$

$((\forall x)\varphi x \to A) \to (\exists x)(\varphi x \to A) \ - \ 0$

$0R1$

$(\forall x \varphi x \to A) \ + \ 1$

$(\exists x)(\varphi x \to A) \ - \ 1$

$(\varphi a \to A) \ - \ 1$

$1R2$

$\varphi a \ + \ 2$

$A \ - \ 2$

$(\forall x)\varphi x \ - \ 2$ | $A \ + \ 2$

$2R3$ | $\otimes$

$\varphi c \ - \ 3$

$\varphi a \ + \ 3$

«Barro y recojo». Decíanse estas palabras de un trabajo o encargo de parte de la ciudad del templo; así se decía: nada más se barre, se recoge en la presencia de nuestro señor o de la ciudad.

Ejemplo 5.5.9.

$\nvDash_i \ \neg(\forall x)\varphi x \to (\exists x)\neg\varphi x$

$\neg(\forall x)\varphi x \to (\exists x)\neg\varphi x \ - \ 0$

$0R1$

$\neg(\forall x)\varphi x \ + \ 1$

$(\exists x)\neg\varphi x \ - \ 1$

$\neg\varphi a \ - \ 1$

$1R2$

$\varphi a \ + \ 2$

$(\forall x)\varphi x \ - \ 2$

$2\mathrm{R}3$

$\varphi b \ - 3$

$\varphi a \ + 3$

«Te lanzaste al barranco, al precipicio». Es decir, te metiste en dificultades, nadie más te metió; dícese cuando uno hace algo malo, ya una muerte, ya algo peligroso o terrible, que no se debe hacer.

Hemos estado suponiendo en estos ejemplos que si el árbol de $\alpha \ - \ 0$ se cierra, entonces $\models \alpha$ y que si una rama del mismo queda abierta, entonces $\nvDash \alpha$. Ha llegado el momento de probar estas afirmaciones.

Definición 5.5.10. Consideremos un árbol A para la lógica intuicionista y un modelo (intuicionista) $M = \langle W, R, D, V\rangle$. Llamemos a una rama r de A verdadera en M si existen funciones $f : \{x \mid \text{es un nodo de } r\} \to W$ y $g : \{x : x \text{ es una constante que aparece en } r\} \to \cup_{w\in W} D(w)$ tales que

a) Cada vez que un nodo de r tiene una expresión de la forma $\alpha + i$ donde α es una fórmula, entonces $f(i) \in W$ y $M \models_{f(i)} \alpha$

b) Cada vez que un nodo de r tiene una expresión de la forma $\alpha - i$ donde α es una fórmula, entonces $f(i) \in W$ y $M \nvDash_{f(i)} \alpha$

c) Si iRj aparece en r, $Rf(i)f(j)$.

d) Si una constante k aparece en una expresión de la forma $\alpha + i$ o $\alpha - i$, $g(k) \in D(f(j))$ si iRj aparece en el árbol.

Teorema 5.5.11. *Si una rama r de un árbol es verdadera en un modelo M y es extendida por una regla para la construcción de árboles semánticos, una de las nuevas ramas r', también es verdadera en M o en una variante notacional de M.*

Demostración. Nos limitaremos a considerar algunos casos. Supongamos que en r aparece un nodo con la expresión $\neg\alpha + i$, que en r figuraba iRj, y que fue agregada al final de r la expresión $\alpha - j$ para obtener r'. Dado que r era verdadero en M, en M existen $w, v, \in W$, Rwv y $\neg\alpha$ es verdadera en w, por lo que α es falso en j y r' es verdadera en M.

Si en r aparece un nodo con la expresión $\neg\alpha \quad - \quad i$ y extendemos r agregando a su nodo final

$$\begin{array}{l} | \\ iRj \\ | \\ \alpha \quad + \; j \end{array}$$

donde j es un índice que no aparecía en r, entonces, como r era veradera en M, en M existen $f(i), s \in W$ tales que $\neg\alpha$ es falsa en $f(i)$, $Rf(i)s$ y α es verdadera en s.

Dado que j no aparecía en r, podemos extender f de tal manera que $f : \{x \mid x \text{ nodo de } r'\} \to W$, estipulando que $f(j) = s$. Con esta función es claro que r' es verdadera en M.

Los otros casos para los conectivos proposicionales son similares. Supongamos ahora que en r aparecen nodos de la forma $(\forall x)\alpha + i$, iRj y que r fue extendida para agregar a su nodo final $\alpha(x/a) + j$, donde a es una constante que ya aparecía en r en el nodo j o en un antecesor de j. Como r es verdadera en M, en M existen $f(i)$ y $f(j)$ tales que $Rf(i)f(j)$, a denota un elemento de $D(f(i))$ y, por lo tanto, $g(a) \in D(f(j))$. Por consiguiente, $\alpha(a)$ es verdadera en $f(j)$.

Si en r aparece un nodo de la forma $(\forall x)\alpha \quad - i$ y r fue extendida agregando a su nodo final

$$\begin{array}{l} iRj \\ | \\ \alpha b \quad - \; j \end{array}$$

donde j es un índice nuevo en la rama y b una constante nueva, entonces, como r es verdadera en M, existen $f(i)$ y $s \in W$ tales que $f(i)Rs$ y $(\forall x)\alpha$ es falso en $f(i)$ y $\alpha(d)$ es falso para un elemento d de $D(s)$. Dado que j y b no aparecen en r, extendemos f al dominio $\{x \mid a \text{ es un nodo de } r'\}$ y g al dominio $\{x \mid x \text{ es una constante que aparece en una fórmula de } r'\}$, estipulando que $f(j) = s$ y $g(b) = d$. Con estas funciones es claro que r' es verdadera en una variante notacional de M. ∎

Corolario 5.5.12. *Si el árbol de α se cierra, entonces α es insatisfacible*

Demostración. Si α fuese satisfacible, sería verdadera en algún modelo intuicionista M y, por el teorema anterior, alguna rama de su árbol semántico sería verdadera en M por lo cual no podría contener una fórmula con el mismo índice una vez con signo positivo y otra con signo negativo. ∎

Ahora mostraremos que si un árbol para una fórmula α queda abierto, α es satisfacible. Sin embargo, no hablamos aquí de cualquier árbol que tenga α en su nodo original.

Podría ocurrir que, siguiendo todas las reglas de construcción, una rama para α quede abierta no porque α sea satisfacible sino porque una fórmula o una combinación de fórmulas conduce a un proceso infinito sin que se hayan aplicado las reglas a otra fórmula de la rama que sí llevarían a cerrarla.

Para evitarlo mostraremos que hay un árbol al que llamaremos sistemático, que se produce al aplicar las reglas de tal manera que aseguramos que cada nodo del árbol intervenga tarde o temprano en su construcción.

Definición 5.5.13. Un árbol es llamado completo cuando no es posible extenderlo aplicando las reglas de construcción de árboles.

Definición 5.5.14. Un árbol sistemático para γ es un árbol construido de acuerdo con el siguiente método:

Etapa 1: Coloque $\gamma + 0$ en el nodo raíz.

Etapa $n+1$: Supongamos que al término de la n-ésima etapa el árbol no se ha cerrado. En la aplicación de las siguientes reglas, evite repeticiones (no escriba una fórmula con un signo y un índice en un nodo, si en otro nodo de la rama ya aparece esa fórmula con el mismo signo e índice, ni iRj si iRj ya aparece en la rama; tome el primer nodo (contando de arriba hacia abajo) que se encuentre en la primera rama abierta (contando de izquierda a derecha) y que tenga una línea no palomeada. Llamaremos n al nodo en cuestión. Si en n aparece:

1. $\alpha + i$, donde α es una fórmula atómica, agregue al final de cada rama abierta que pase por ese nodo y que tenga la expresión iRj, la terminación

   $$\begin{array}{ll} | & \\ \alpha & +\text{j} \end{array}$$

   Hágalo para cada una de tales j y palomee esa línea.

2. $\alpha - i$, donde α es una fórmula atómica, palomee esa línea.

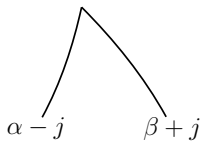
3. $(\alpha \wedge \beta) + i$, agregue al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

   $$\begin{array}{ll} | & \\ \alpha & +\text{i} \\ | & \\ \beta & +\text{i} \end{array}$$

   y palomee ese nodo.

   Los casos en que en n se hallan $(\alpha \vee \beta) + i$, $(\alpha \vee \beta) - i$ o $(\alpha \wedge \beta) - i$ son análogos.

4. $(\alpha \to \beta) + i$, agregue al final de cada rama abierta que pase por n la terminación



donde j es cualquier índice tal que iRj aparece en la rama. Haga lo mismo para cada una de tales j y agregue $(\alpha \to \beta) + i$ al final de cada rama extendida en este paso. Palomee el nodo original.

5. $(\alpha \to \beta) - i$, añada al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{c} iRj \\ | \\ \alpha + j \\ | \\ \beta - j \end{array}$$

donde j es el primer índice que no ha aparecido hasta ahora en el árbol. Palomee ese nodo.

6. $\neg\alpha + i$, adjunte al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha - j \end{array}$$

donde j es cualquier índice tal que iRj aparece en la rama. Haga lo mismo para cada una de tales j y agregue $\neg\alpha + i$ al final de cada rama extendida en este paso. Palomee el nodo original.

7. $\neg\alpha - i$ agregue, al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{c} iRj \\ | \\ \alpha + j \end{array}$$

donde j es el primer índice que no ha aparecido hasta ahora en el árbol y palomee la fórmula.

8. $(\exists\, x)\alpha + i$, agregue al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha(x/k) + i \end{array}$$

donde k es la primera constante que no ha aparecido en el árbol. Palomee ese nodo.

9. $(\forall\, x)\alpha + i$, añada al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{l}\alpha(x/a)+i\\ \quad\vdots\\ \alpha(x/\beta)+i\\ \quad\vdots\\ \alpha(x/m)+i\end{array}$$

donde $a, b, \ldots, m$ son todas las constantes que han figurado en fórmulas con índices j tales que jRi (o solo agregue $\alpha(x/a)+i$, si ninguna constante ha aparecido en los referidos mundos). Añada además la terminación

$$\begin{array}{l}\quad\vdots\\ (\forall x)\alpha+e\end{array}$$

para cada índice e tal que iRe ha aparecido en la rama. El caso $(\exists v)\alpha - i$ es similar.

10. $(\forall x)\alpha \quad -i$, agregue al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{l}\quad\vdots\\ iRj\\ \quad\vdots\\ \alpha(x/a)-j\end{array}$$

donde j y a son, respectivamente, el primer índice y la primera constante que no ha aparecido hasta ahora en la rama. Palomee la fórmula.

11. iRj agregue al final de cada rama abierta que pase por n la terminación

$$\begin{array}{l}\quad\vdots\\ iRi\\ \quad\vdots\\ jRj\end{array}$$

Añada además

$$\begin{array}{l}\quad\vdots\\ eRj\end{array}$$

por cada índice e tal que eRi aparece en la rama.

Siga con el primer nodo (que no esté palomeado y que pueda desarrollarse de acuerdo al procedimiento descrito) en la rama abierta que se encuentra más a la derecha del nodo que acaba de considerar. Cuando termine con todas las ramas habrá concluido la etapa $n+1$. En cualquier momento, si aparece una fórmula en dos ocasiones con el mismo índice y dos signos distintos en la misma rama, cierre esta.

Teorema 5.5.15. *Si una rama de un árbol sistemático para α está abierta α es satisfacible.*

Demostración. La demostración se basa en la construcción de un modelo para α a partir de una rama abierta de un árbol sistemático para α.

Si elegimos una de tales ramas r, definimos $M_r = \langle W_r, R_r, D_r, V_r \rangle$ de la siguiente manera:

$W_r = \{i \mid i \text{ es un índice de } r\}$

$R_r(i,j) \leftrightarrow iRj$ aparece en un nodo de r

$D_r(j) = \{c \mid c$ constante que aparece en una fórmula α seguida de un índice i en un nodo de r tal que iRj aparece en $r\}$

Si α es una fórmula atómica, $M_r \models_i \alpha$ si y sólo si $\alpha + i$ aparece en un nodo de r.

El teorema se sigue entonces del siguiente lema.

□

Lema 5.5.16. *Sea α es una fórmula que aparece en r y sea $i \in W_r$; $M_r \models_i \alpha$, si $\alpha + i$ aparece en un nodo de r y $M_r \not\models_i \alpha$ si $\alpha - i$ está en r.*

Demostración. Sea α una fórmula que aparece en r. Si α es atómica, el teorema se sigue por definición de M_r.

i) Si α es $\neg\beta$ y $\neg\beta \quad + \quad i$ aparece en un nodo de r, entonces, por la forma en que se construyó el árbol sistemático para cada $j \in W_r$, si $(i,j) \in R$, iRj está en un nodo de r y $\beta \quad - \quad j$ es parte de r.

   Por hipótesis de inducción, $M_r \not\models_j \beta$ y, por lo tanto, $M_r \models_i \alpha$

ii) Si α es $\beta \to \gamma$ y $\beta \to \gamma + i$ aparece en r, entonces para cada $j \in W_r$ tal que iRj está en un nodo de r (es decir, tal que $(i,j) \in R$), o $\beta - j$ o $\gamma + j$ aparece en r.

   Por hipótesis de inducción, $M_r \not\models_j \beta$. Por lo tanto $M_r \models_j \gamma$. Como esto ocurre para cada una de tales $j \in W_r$ (iRj), entonces $M_r \models_i \alpha$.

   Por otro lado, si $\beta \to \gamma - i$ aparece en r, entonces por la forma en que se construyó el árbol sistemático, existe un $j \in W_r$ tal que Rij (o tal que iRj aparece en r) y $\beta + j$ y $\gamma - j$ están en r. Por hipótesis de inducción, $M_r \models_j \beta$ y $M_r \not\models_j \gamma$. Por lo tanto, $M_r \not\models_i \alpha$

   Los casos de la conjunción y la disyunción son muy sencillos.

   De los relativos a los cuantificadores, sólo haremos uno y dejamos el otro al lector interesado.

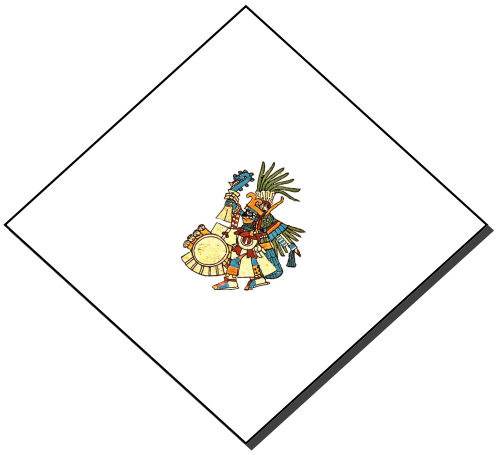
   Si α es $(\forall x)\beta$ y $(\forall x)\beta + i$ aparece en r, entonces, por la forma en que se construyó el árbol sistemático, para cada j tal que iRj aparece en r (es decir, para cada $j \in W_r$ tal que $(i,j) \in R$), y cada constante c que figura en una fórmula de cualquier k tal que kRj aparece en el árbol (es decir, para cada elemento c de $D_r(j)$) $\beta(x/c) + j$ aparece en r. Por hipótesis de inducción, para cada elemento c de $D_r(j)$, $M_r \models_j \beta(x/c)$, y esto para cada j tal que $(i,j) \in R$, por lo que $M_r \models_i \alpha$ Por último, si $(\forall x)\beta - i$ aparece en r, existe un $j \in W_r$ tal que iRj está en r (y por lo tanto $(i,j) \in R$) y hay

una constante c nueva hasta esa altura de r tal que $\beta(x/c) - j$ aparece en r. Por hipótesis de inducción, $M_r \not\models_j \beta(x/c)$ y, por ende, $M_r \not\models_i \alpha$

Recordemos las palabras de un canto que algo reflejan lo que fue la visión de los vencidos:

Todo esto pasó con nosotros,
nosotros lo vimos,
nosotros tuvimos que admirarlo.
Con esta lamentosa y triste suerte
nos vimos angustiados.
En los caminos yacen dardos rotos,
los cabellos están esparcidos.
Destechadas quedan las casas,
enrojecidos tienen sus muros...
Golpeábamos en tanto los muros de adobe
y fue nuestra herencia una red de agujeros.
Con escudos fue resguardado.
Pero nuestra soledad
ni con escudos pudo ya sostenerse.

Manuscrito anónimo de Tlatelolco, de 1528, Anales históricos de la nación Mexicana.



5.6 ➠ Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes tautologías no son válidas desde el punto de vista intuicionista, pero sí equivalentes .

   a) $(P \vee \neg P)$

   b) $(\neg\neg P \to P)$

   c) $((\neg P \to P) \to P)$

   d) $((P \to Q) \to P) \to P)$

   e) $\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$

   f) $(P \to Q) \vee (Q \to R)$

2. A partir de la definición de modelo intuicionista y de verdad de una fórmula en un mundo de un modelo determine cuáles son las condiciones de verdad de los siguiente enunciados:

   a) $\forall x \exists y \forall x (Axy \to \neg Bxz)$

   b) $\neg\forall x \neg\exists y Bxy$

   c) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

   d) $\forall x \neg Ax \to \neg\forall x Ax$

   e) $\forall x (Ax \to \exists y \neg Bxy)$

3. ¿Qué distingue a la lógica intuicionista de la lógica modal de domninio creciente $KM + S4$?

4. Recuerde el lector que la lógica mínima es la lógica intuicionista menos la regla que autoriza a derivar una proposición cualquiera de una contradicción. Demuestre que las siguientes fórmulas son teoremas de la lógica intuicionista. Onserve que en su prueba se emplea $\bot \vdash Q$, lo que sugiere que no son teoremas de la lógica mínima:

   a) $((P \vee Q) \wedge \neg P) \to Q$

   b) $(P \wedge \neg P) \to Q)$

   c) $((P \wedge \neg P) \vee Q) \to Q$

   d) $(Q \vee Q) \to (\neg\neg Q \to Q)$

e) $(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

f) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

g) $(P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

h) $\neg\neg(\neg\neg P \rightarrow P)$

5. Demuestre que los siguientes son teoremas de la lógica mínima: $((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow \neg\neg B)$, $B \rightarrow \neg\neg B)$.

6. Demuestre que si a las reglas de la lógica mínima agregamos la regla: $A \vee B)$, $\neg B \vdash A$ obtenemos la lógica intuicionista.

7. Demuestre que si $\Gamma \vdash_C (\exists\, x)Ax$ y $\Gamma, A(x/y) \vdash_C B$, entonces $\Gamma^g \vdash_i B^g$. [Sugerencia: cuando tenga $\Gamma^g, \neg B^g \vdash A^g(x/y)$ aplique la regla de introducción del cuantificador universal.]

8. (Traducción de Kolmogorov) Dada una fórmula cerrada del cálculo de predicados clásico, anteceda cada letra proposicional que figure en ella por una doble negación y haga lo mismo para cada subfórmula no atómica. Por ejemplo, Si α es $(P \vee \exists x(\neg Ax \wedge Bx))$, la fórmula resultante de estas transformacones será $\neg\neg(\neg\neg P \wedge \neg\neg\exists x\neg\neg(\neg\neg Ax \wedge \neg\neg Bx))$. Demuestre que la fórmula resultante es un teorema intuicionista si solo si la fórmula original es un teorema clásico.

9. (Traducción de Krivine). Las siguientes cláusulas definen para cada fórmula α, su traducción de Krivine α^{Kr}:

   a) Si ρ es una letra proposicional, $\rho_{Kr} = \neg\rho$

   b) $\bot_{Kr} = \neg \bot$

   c) $(A \wedge B)_{Kr} = (A_{Kr} \wedge B_{Kr}$

   d) $(A \vee B)_{Kr} = (A_{Kr} \vee B_{Kr}$

   e) $(A \rightarrow B)_{Kr} = (\neg A_{Kr} \wedge B_{Kr}$

   f) $(\forall x A)_{Kr} = (\exists x) A_{Kr}$

   g) $(\exists x A)_{Kr} = \neg\exists\neg A_{Kr}$

   h) $\alpha^{Kr} = \neg\alpha_{Kr}$

   Demuestre que $\vdash_{CP} \alpha$ si y solo si $\vdash_i \alpha^{Kr}$ (donde CP denota el cálculo de predicados clásico.

6

Lógicas abstractas y el Teorema de Lindström

En este capítulo final presentamos uno de los principales temas que motivan nuestra obra: las lógicas abstractas. Es nuestra intención hacer patente que la lógica matemática es una disciplina en constante crecimiento, cuyos desarrollos transcurren en las más diversas direcciones. Pronto retomaremos algunas de las extensiones de la lógica de primer orden que describimos en capítulos previos, pero enmarcándolas en un contexto más general, aunque hayamos de repetir algunos hechos. También introducimos algunas nociones nuevas de la LPO (lógica de primer orden) que se extienden a lógicas abstractas, y otras muchas que pueden no ser conocidas para el lector. Igualmente, no dudamos en hacer evidente que la teoría de conjuntos necesaria se incrementa considerablemente, en realidad, la interrelación entre las lógicas abstractas y la teoría avanzada de conjuntos se puede llevar a límites insospechados: desde la teoría elemental de ambas, hasta teoría de modelos núcleo, grandes cardinales, etc., e igualmente los desafios de las nuevas lógicas hacen florecer la teoría de conjuntos. Esta sección es realmente avanzada y el lector debe estar conciente de que, posiblemente, apareceran temas que desconozca por completo, pero nuestra tarea es, precisamente, motivar el estudio de estas disciplinas, y a la vez dar una presentación que facilite, en lo posible, la incorporación a esta área. Así, el capítulo inicia con la definicón de lógica abstracta y diversas nociones asociadas a ella. Tratamos diversos ejemplos y mostramos aplicaciones al álgebra. Una y otra vez se señala que al volver más expresiva una lógica, realmente más poderosa que primer orden, algo habremos de perder, y esto no queda en una mera conjetura, sino que existe un resultado que conforma esta pérdia. Nos referimos al Teorema de Lindström que es el motivo de la última sección, pero antes introducimos la noción de isomorfismo parcial y los sistemas de ida y vuelta, que desempeñan un papel escencial en la demostración del Teorema de Lindström. En la medida de lo necesario trataremos de seguir [GaVaVi24], [EbFlTh18], [Fl75] y [Fl85].

«El señor K. tenía en muy alta estima la amabilidad. Siempre decía: –Conversar con una persona por pura cortesía, no juzgar a nadie por sus posibilidades, ser amable sólo con quien es amable, tratar fríamente a quien es caluroso, y calurosamente a quien se comporta frámente, eso no es ser amable.

6.1 Lógicas abstractas

A continuación colectamos varias definiciones, nociones, etc. que seguramente son conocidas para el lector pero es mejor asegurarse de establecerlas con precisión. Cuando tratemos con lenguajes formales $\mathcal{L}$ diremos que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es de la forma $\mathfrak{A} = \langle A, F\rangle$, donde A es como siempre el universo no vacío y F es una aplicación cuyo dominio es $\mathcal{L}$ y,

- $F(P) \subseteq A^n$, si P es un símbolo de n-relación.
- $F(f) : A^n \longrightarrow A$ si f es un símbolo de n-función.
- $F(c) \in A$, si c es un símbolo de constante

La lógica de primer orden (LPO) posee una sintaxis y una semántica, es decir, para cada lenguaje $\mathcal{L}$ existe un conjunto $Enun(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$-enunciados y una relación de satisfacción $\models$ entre $\mathcal{L}$-enunciados y $\mathcal{L}$-estructuras. Entre las propiedades sintácticas de la LPO detectamos las siguientes.

1. Para cada $\varphi \in Enun(\mathcal{L})$ existe un lenguaje, el más pequeño posible (respecto a $\subseteq$), $\mathcal{L}_\varphi \subseteq \mathcal{L}$, tal que $\varphi \in Enun(\mathcal{L}_\varphi)$.
2. Si $\mathcal{L}'$ es otro lenguaje con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, entonces $Enun(\mathcal{L}) \subseteq Enun(\mathcal{L}')$.

Es importante entender que una lógica abstarcta conlleva un lenguaje y fórmulas (enunciados), pero que las fórmulas o enuciados no necesariamente responden a una semántica como la LPO, pueden diferir drásticamente de lo que lo que hasta ahora conocemos. Esto puede sonar un tanto irreal, sobre todo porque los ejemplos que hemos visto y trataremos después siguen hasta cierto punto la sintaxis de la LPO. Pero existen lógicas abstractas cuya intaxis dista mucho de ser la que conocemos.

En cuanto a la semántica, si $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models \varphi$. Ciertas relaciones entre la semántica y la sintaxis se describen enseguida.

1. Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, $\varphi \in Enun(\mathcal{L})$ y $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}'$-estructura, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \restriction \mathcal{L} \models \varphi$.

2. Sean $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ lenguajes y τ una función de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}'$ tal que $\tau(P)$ es un símbolo de n-relación cuando P lo es, $\tau(f)$ es un símbolo de m-función, si f lo es, y $\tau(c)$ es un símbolo de constante, cuando c lo es. Suponga que φ es un $\mathcal{L}$-enunciado y que φ' se obtiene de φ al remplazar cada símbolo no lógico $*$ que aparezca en φ por $\tau(*)$. Si (A, F) es una $\mathcal{L}$-estructura, entonces

$$(A, F) \models \varphi \Leftrightarrow (A, F \circ \tau) \models \varphi'.$$

Después de tantos preparativos llegamos al punto de definir lógica abstracta, o lógica en general.

Definición 6.1.1. Una lógica (abstracta) $\mathbb{L}$ consiste en una función L y una 2-relación $\models_{\mathbb{L}}$, donde L asocia, a cada lenguaje $\mathcal{L}$, un conjunto $L(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$-enunciados de $\mathbb{L}$. Se cumple lo siguiente.

1. Si $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$, $L(\mathcal{L}_0) \subseteq L(\mathcal{L}_1)$.
2. Si $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ (es decir, $\mathfrak{A}$ y φ están $\models_{\mathbb{L}}$-relacionados, $(\varphi, \mathfrak{A}) \in \models_{\mathbb{L}}$), entonces para un $\mathcal{L}$ apropiado, $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y $\varphi \in L(\mathcal{L})$.
3. Si $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi$.
4. Si $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$, $\varphi \in L(\mathcal{L}_0)$ y $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}_1$-estructura, ocurre que

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}_0 \models_{\mathbb{L}} \varphi.$$

6.2 Ejemplos

Antes de seguir con mas definiciones es importante ilustar lo recién dicho con ejemplos sumamente importantes. Observe que todos los ejemplos incorporan lógicas que extienden a la LPO, lo cual no quiere decir que todas las lógicas abstractas lo hagan. Sin embargo, a nosotros nos interesan aquellas que sí lo hacen.

Lógica de primer orden LPO con igualdad

Según convenga usaremos LPO, o $\mathbb{L}_I$ o $L_{\omega\omega}$ para denotar a la lógica de primer orden. Su sintaxis la conocemos muy bien, el conjunto $L(\mathbb{L}_I)$ consiste en las fórmulas que carecen de variables libres. La semántica también ha sido ampliamente discutida, de suerte que conocemos $\models_{\mathbb{L}_I}$.

Lógica de segunda orden

Esta lógica se denota $\mathbb{L}_{II}$. En ella el lenguaje $\mathcal{L}$ **sí** difiere de uno de primer orden. Tenemos todos los símbolos lógicos y no lógicos de un lenguaje de primer orden, para

estos la semántica es absolutamente igual a la de primer orden; el cambio es que aparecen símbolos de segundo orden $X, Y, Z, \ldots$ y un símbolo de 2-relación $\in$ (membresía), donde los términos de $\mathbb{L}_{II}$ son los de la LPO, las fórmulas atómicas de $\mathbb{L}_{II}$ consisten en las atómicas de la LPO junto con las fórmulas $X = Y$ y $t \in X$, donde X, Y son variables y t es un término. Las $\mathbb{L}_{II}$-fórmulas se generan cerrando las fórmulas atómicas respecto a conectivos lógicos y cuantificación finita de primer y segundo orden. Los enunciados son fórmulas que carecen de variables libres. En cuanto a la semántica, $\models_{\mathbb{L}_{II}(\boldsymbol{\mathcal{L}})}$, la relación se define en forma similar a la de la LPO, pero debemo añadir

$$(A, F) \models_{\mathbb{L}_{II}(\boldsymbol{\mathcal{L}})} \exists X \varphi$$

donde φ es una fórmula. En este caso, el significado es Existe un subconjunto X de A tal que φ se cumple en (A, F). Note que cualquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula de LPO aparece en $L_{II}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$.

Lógica de segundo orden débil

La notación es $\mathbb{L}_{II}^{w}$; la sintaxis de esta lógica es exactamente la misma que la de segundo orden $\mathbb{L}_{II}$. Lo único que cambia es la semántica, y en ésta, sólo varía la claúsula sobre $\exists X \varphi$,

$$(A, F) \models_{\mathbb{L}_{II}(\boldsymbol{\mathcal{L}})} \exists X \varphi$$

donde φ es una fórmula. En este caso, el significado es Existe un subconjunto finito X de A tal que φ se cumple en (A, F). Por supuesto, también ocurre que cualquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula de LPO aparece en $L_{II}^{w}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$.

Lógicas con cuantificadores de cardinalidad

Usamos Q_α para denotar los nuevos cuantificadores, donde α es un ordinal arbitrario pero fijo. Empleamos $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$ o simplemente Q_α cuando no hay peligro de confusión. Los símbolos de esta nueva lógica son los de la LPO excepto que añadimos el cuantificador Q. Los términos de Q_α son los de la LPO, lo mismo ocurre con las fórmulas atómicas. Las fórmulas de $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$ se conforman al cerrar el conjunto de fórmulas atómicas respecto a conectivos y cuantificadores, $\exists, Q$, así que si φ es una $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$, también lo es $Q_\alpha x \varphi$. Los enunciados son fórmulas sin variables libres. La semántica, $\models_{\mathbb{L}_{Q_\alpha}}$, se define como en la LPO con la excepción de que se añade una nueva claúsula,

$$(A, F) \models_{\mathbb{L}_{Q_\alpha}} Q_\alpha x \varphi$$

la cual significa que Existen al menos $\aleph_\alpha$ elementos z en A que satisfacen φ. Si $\alpha = 0$, $Q_0 x \varphi$ se lee Existe una cantidad infinita de x en A que validan a φ. Si $\alpha = 1$, $Q_\alpha x \varphi$ significa Existe una cantidad innumerable de x en A que satisfacen a φ. Otra vez, lo que expresemos en $\mathbb{L}_I$, lo podemos hacer en $\mathbb{L}_{Q_\alpha}$.

Lógicas infinitarias.

Usamos la notación $L_{\kappa\lambda}$, donde κ, λ son cardinales infinitos, y $L_{\omega\omega}$ es simplemente la LPO. También aparecen $L_{\kappa\infty}$, $L_{\infty\lambda}$ y $L_{\infty\infty}$. Los lenguajes son de primer orden. La sintaxis es la de la LPO pero añadimos lo siguiente.

- En el caso $L_{\kappa\lambda}$ se permiten conjunciones/disyunciones de conjuntos de fórmulas de tamaño $< \kappa$, y cuantificación existencial (o universal) sobre conjuntos de variables de cardinalidad $< \lambda$.
- Si tratamos con $L_{\infty\lambda}$ (respectivamente, $L_{\kappa\infty}$), las fórmulas permiten conjunciones o disyunciones (respectivamente, cuantificación) sobre conjuntos de fórmulas de cualquier cardinalidad (respectivamente, sobre conjuntos de variables de cualquier cardinalidad).
- De tratarse de $L_{\infty\infty}$ las fórmulas permiten conjunciones/disyunciones sobre conjuntos de fórmulas de cualquier cardinalidad y cuantificación sobre conjuntos de fórmulas de cualquier tamaño.

La semántica extiende en forma natural a la de LPO. Establecemos la semántica de $\mathbb{L}_{L_{\kappa\lambda}}$, las de $\mathbb{L}_{L_{\kappa\infty}}$, $\mathbb{L}_{L_{\infty\lambda}}$ y $\mathbb{L}_{L_{\infty\infty}}$ son extensión obvia de la primera. Así, las claúsulas correspondientes a las fórmulas que son de primer orden tienen la semántica correspondiente. Sólo atendemos los casos que salen de la LPO.

⁕ Si $\varphi \equiv \exists v_0, \ldots, v_\alpha \psi$ con $\alpha < \lambda$, entonces

$$(A, F) \models_{\mathbb{L}_{L_{\kappa\lambda}}} \varphi$$

significa que existen α elementos x en A que satisfacen φ (estos elementos no son necesariamente distintos entre sí).

⁕ Si $\theta \equiv \bigvee \Phi$, donde Φ es un conjunto de fórmulas de tamaño menor que κ,

$$(A, F) \models_{\mathbb{L}_{L_{\kappa\lambda}}} \theta$$

significa que al menos una fórmula en Φ se cumple en (A, F).

⁕ Los casos $\varphi \equiv \forall v_0, \ldots, v_\alpha \psi$ con $\alpha < \lambda$ y $\theta \equiv \bigwedge \Phi$, donde Φ es un conjunto de fórmulas de tamaño menor que κ se definen, ya sea usando la definición de $\forall$ y $\bigwedge$ en términos de $\exists$ y $\bigvee$, o bien en la forma obvia tomando en cuenta como la definimos para $\exists$ y $\bigvee$.

Note que cualquier fórmula de LPO se puede expresar en estas lógicas.

Ejemplo 6.2.1. Si trabajamos en el lenguaje de la teoría de grupos $\mathcal{L}_G$ con $L_{\omega_1\omega}$ podemos formar el enunciado

$$\varphi \equiv \bigvee_{n\in\omega} \exists x_1, \ldots, x_n \forall y (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Los grupos que son modelos de φ son precisamente los grupos finitos, es decir, φ es un enunciado que caracteriza a todos los grupos de orden finito. Recordemos que la lógica de primer orden no era capaz de expresar tal enunciado.

Ejemplo 6.2.2. Sean κ y λ cardinales inifinitos. Como ya vimos, la lógica infinitaria $L_{\kappa\lambda}$ es aquella que permite formar conjunciones y disyunciones de una cantidad menor a κ de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad menor a λ de variables. En estas lógicas es posible definir grupos de torsión, los conjuntos H_λ, y una noción imprescindible: conjunto bien ordenado, lo cual es posible en $L_{\omega_1\omega_1}$. Dados dos cardinales tales que $\kappa > \lambda$, en $L_{\kappa\lambda}$ podemos expresar que un conjunto tiene cardinalidad $< \lambda$ por medio del enunciado

$$\exists\, \vec{x} \left(\bigwedge_{\xi\neq\zeta} x_\xi \neq x_\zeta \wedge \bigwedge_{\xi} \varphi(x_\xi) \right).$$

Pero no es necesario una lógica infinitaria para expresar esta propiedad; también se puede lograr por medio de *cuantificadores generalizados*. La fórmula $Q_1 x \varphi(x)$ expresa que existen al menos ω_1 testigos para la fórmula φ. Más adelante, trataremos la *lógica estacionaria*, que es otra lógica que extiende $\mathbb{L}(Q_1)$.

> «–Es difícil enseñar a aquellas personas con las que se está enojado –dijo el señor Keuner–. Y sin embargo, es muy necesario, puesto que son las que más lo necesitan.

Antes vimos que las lógicas infinitarias no admiten el teorema de compacidad o el de Löwenheim-Skolem. La pérdida de compacidad o del teorema de Löwenheim-Skolem podría hacernos creer que considerar lógicas abstractas distintas de $\mathbb{L}_I$ no tiene sentido. Ciertamente, la pérdida es enorme, pero la ganancia en expresibilidad puede ser también considerable; por tanto, requerimos establecer compromisos entre las pérdidas y las ganancias. Más aún, para ciertas lógicas existen herramientas que atenuan la ausencia de compacidad. La primera de ellas es la de *propiedad de consistencia* que ya antes vimos, para primer orden y una lógica no clásica. Con la intención de subsanar la falta del teorema de compacidad para la lógica $L_{\kappa\omega}$, $\kappa > \omega$ (incluso también para ciertas lógicas

$L_{\kappa\lambda}$), se introducen las propiedades de consistencia. A grandes rasgos, una propiedad de consistencia S es una familia de conjuntos de enunciados que satisfacen ciertas propiedades de cerradura. Para ver con detalle dichas propiedades referimos al lector a [FeVi17] y [Gr75]. Estas propiedades de cerradura inducen un método de construción de modelos llamado el *método de Henkin*. La idea básica de este método es dotar a los símbolos puramente sintácticos de estructura semántica a través de una relación de equivalencia. Específicamente, se define una relación de equivalencia entre los términos del lenguaje lo que permite generar una estructura, de hecho, este método se trabajo en detalle en el capítulo 3 para la LPO. Este es el contenido del *teorema de existencia de modelos*, que asegura que cualquier elemento de una propiedad de consistencia S tiene modelo, por lo que para verificar que un conjunto de enunciados Σ tiene modelo, basta verificar que pertenence a alguna propiedad de consistencia, en lugar de probar que Σ es finitamente satisfacible. Para ilustrar las ideas anteriores y mostrar la importancia de las propiedades de consistencia, nos concentramos en algunos resultados para la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ que se presentan en [Ke71].

En general, para toda lógica, pero en particular para las lógicas infinitarias se acostumbra «codificar» las fórmulas para diversos fines. Como ejemplo ilustrativo considere $L_{\omega\omega}$ para un lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ numerable. Asociamos un natural a cada conectivo lógico, a los cuantificadores, a los símbolos no lógicos y a las variables, de suerte tal que si vemos una fórmula como una cadena de símbolos, usando potencias de productos de primos obtenemos un código (un número natural) único para cada fórmula. Si tenemos el código, también podemos revertir la operación y saber de qué fórmula se trata. No todo número natural es un código, pero todo código es un natural, y al final de cuentas cada natural es un conjunto (el conjunto de sus predecesores). En el caso de lenguajes innumerables o de lógicas más complejas, ya no podemos recurrir a los naturales, pero sí a conjuntos. Por ejemplo para una variable x, generamos el código $(x,5)$, para el cuantificador $\exists$, el código $(1,6)$, y así sucesivamente. Note que las parejas ordenadas son conjuntos, pero que si en un cierto universo tenemos presente a x y 5, no necesariamente vive también en el universo $(x,5)$; para asegurar que sí dispongamos de la pareja ordenada, nuestro universo debe ser «cerrado», al menos respecto a formación de parejas ordenadas. Recuerde que un natural es un conjunto finito que vive en H_ω (véase el capítulo 4). Si, por ejemplo, en el universo vive una fórmula con cuantificadores «dentro» de la fórmula, y queremos ponerla en FNP, para asegurar que se quede en el universo, mayores propiedades de cerradura se exigen para éste. En lo sucesivo, suponemos que nuestras fórmulas están codificadas, esto es, que si tenemos una $\mathbb{L}$-fórmula, la podemos ver como cadena sintáctica de símbolos o como un conjunto, su código. Así, para un lenguaje dado $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, tenemos un conjunto de códigos para las $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-fórmulas de una lógica $\mathbb{L}$.

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, podemos controlar la cantidad de fórmulas de la lógica $L_{\kappa\lambda}$ mediante un conjunto $\mathcal{A}$. En lo sucesivo seguimos tratando con las lógicas infinitarias, pero bien podrían aparecer otras lógicas abtractas.

Definición 6.2.3. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto, definimos $L_{\mathcal{A}}$ como el conjunto de fórmulas de la

lógica $L_{\omega_1\omega}$ que pertenecen a $\mathcal{A}$, es decir,

$$L_{\mathcal{A}} = L_{\kappa\lambda} \cap \mathcal{A}.$$

Es evidente que no podemos permitir un conjunto arbitrario como el $\mathcal{A}$ en la definición 6.2.3, pues $L_{\mathcal{A}}$ podría ser demasiado débil. Por ello se introduce la noción de fragmento.

Definición 6.2.4. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto. Decimos que $L_{\mathcal{A}}$ es un fragmento de $L_{\kappa\lambda}$ si se cumplen las siguientes condiciones.

(a) $L_{\mathcal{A}}$ contiene a todas la fórmulas atómicas.

(b) Si $\varphi, \psi \in L_{\mathcal{A}}$, entonces $\varphi \wedge \psi \in L_{\mathcal{A}}$ y $\neg\varphi \in L_{\mathcal{A}}$.

(c) $\varphi \in L_{\mathcal{A}}$ y $x \in \mathcal{A}$, entonces $\exists x\varphi \in L_{\mathcal{A}}$.

(d) $L_{\mathcal{A}}$ es cerrado respecto a subfórmulas.

(e) Si $\Phi \subseteq L_{\mathcal{A}}$ y $\Phi \in \mathcal{A}$, entonces $\bigwedge \Phi \in L_{\mathcal{A}}$.

Antes vimo que para $L_{\omega\omega}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$, para $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ un lenguaje numerable, los códigos de las fórmulas aparecen en H_ω. Este conjunto es numerable y tiene propiedades muy amigables en cuanto a operaciones con conjuntos. No obstante, no contiene conjuntos infinitos, por lo que no nos sirve más para lenguajes innumerables o para lógicas $L_{\kappa\lambda}$ donde κ o λ sean mayores que ω. Así como caracterizamos H_ω como el conjunto de conjuntos hereditariemnte finitos, para un cardinal arbitrario μ, tenemos el conjunto H_μ de los conjuntos hereditariamente de cardinalidad $< \mu$. Así, para μ suficientemente grande, los códigos de fórmulas en $L_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ viven en H_μ. Otra vez, estos conjuntos tienen propiedades muy convenientes en cuanto a operaciones con conjuntos y muchos otros aspectos. No obstante, los conjuntos de fórmulas pueden ser demasiado grandes, por lo que una forma de tratar con tamaños más amigables es através del conjunto $\mathcal{A}$ que determina el fragmento; pero como recién mencionamos, $\mathcal{A}$ debe tener propiedades de cerradura. Se establece, pues, un compromiso entre el tamaño y las propiedades de cerradura. Las propiedades de cerradura de un conjunto se pueden establecer mediante ciertos axiomas, por ejemplo los de ZFE (volumen I) o bien subconjutos de estos axiomas, que dan lugar a teorías más debiles. Sirva de ilustración ZFE^- que es ZFE sin el axioma de potencia. Otras posibles axiomatizaciones, mucho más débiles, dan lugar a conjuntos admisibles o primitivo recursivo cerrados (véase [FeVi17] para todos estos asuntos). Así, si hablamos de un fragmento admisible, queremos decir que el conjunto $\mathcal{A}$ que da lugar al fragmento, es un conjunto admisible. Este asunto de las propiedades de cerradura del conjunto no es menor, puede dar lugar a enormes cambios en los resultados que se obtienen, por ejemplo para fragmentos admisibles o fragmentos primitivo recursivo cerrados. Un ejemplo es el siguiente resultado, el Teorema de Barwise.

Teorema 6.2.5 (Teorema de compacidad de Barwise)**.** *Sean $\mathcal{A} \subseteq H_{\omega_1}$ un conjunto admisible numerable y $X \subseteq L_{\mathcal{A}}$ un conjunto de enunciados Σ_1 en $\mathcal{A}$. Si todo subconjunto de X que pertenezca a $\mathcal{A}$ tiene modelo, entonces X tiene modelo.*

Demostración. Véase [FeVi17]. □

Más alla de su enorme fuerza y destacadas consecuencias, este teorema nos sirve para discutir varios asuntos en nuestros modestos límites. Por principio de cuentas, el fragmento es numerable (el conjunto H_{ω_1} de los conjuntos herditariamente de cardinalidad $< \aleph_1$ es innumerable). En este punto no perdemos nada en pensar que tenemos un fragmento numerable de $L_{\omega_1\omega}$. Recuerde que el teorema de compacidad en LPO establece que si una teoría X es finito satisfacible, entonces es satisfacible. Ya vimos (capítulo 4) que en L_{ω_ω} se pierde compacidad, pero el Teorema de Barwise la recupera...hasta cierto punto. Primero, la teoría en cuestión X no es arbitraria, sino que debe ser Σ_1 (véase el capítulo 4). No sólo es finito satisfacible, sino que cualquier subconjunto suyo que pertenezca a $\mathcal{A}$ debe ser satisfacible. No obstante, es un gran resultado de enorme relevancia que permite obtener cierto tipo de compacidad respecto a una lógica más expresiva que la LPO. Para más sobre este teorema véase el excelente libro [Ba75] o [FeVi17]. Pero, como dijimos, la presencia de compacidad impide expresar buen orden.

Teorema 6.2.6. *Sean T un conjunto numerable de enunciados de $L_{\omega_1\omega}$ y suponagamos que el lenguaje contiene dos símbolos de predicado U (unario) y $<$ (binario). Si para cada $\alpha < \omega_1$, T tiene un modelo $\mathfrak{A} = \langle A, U, <, \dots \rangle$ tal que $<$ ordena linealmente a U y $\langle \alpha, < \rangle \subseteq \langle U, < \rangle$, entonces T tiene un modelo $\mathfrak{B} = \langle B, V, <, \dots \rangle$ tal que $<$ ordena linealmente a B y $\langle V, < \rangle$ contiene una copia de los números racionales.*

Una consecuencia de este teorema es que la noción de buen orden no se puede expresar con un enunciado de $L_{\omega_1\omega}$. Más adelante discutiremos que esto no se puede expresar en ninguna lógica infinitaria con cuantificación finita.

> «El señor Keuner conocía muy precariamente la condición humana. Así, decía: –Sólo se precisa conocer al hombre cuando se tiene y se pretende su explotación. «Pues pensar significa transformar». Cuando pienso en alguien lo metamorfoseo, de modo que casi llego a creer que esa persona no es como es, sino que ha sido siempre tal como yo comencé a pensarla.

Otra ventaja de compacidad en la LPO es que disponemos de un teorema de omisión de tipo. Entre sus muchas aplicaciones está la de poder construir ciertas extensiones (fin-extensiones) de ciertas estructuras. Puesto que una consecuencia del teorema de compacidad de primer orden es la *omisión de tipos* y en $L_{\omega_1\omega}$ falla el teorema de compacidad (general), no se puede aspirar a derivar un teorema de omisión de tipos fiel a su

versión de primer orden. Sin embargo, utilizando propiedades de consistencia, se logra la siguiente versión.

 **Teorema 6.2.7.** *Sean $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento numerable de $L_{\omega_1\omega}$, $T \subseteq L_{\mathcal{A}}$ un conjunto de enunciados y, para cada $n < \omega$, $\Phi(x_1 \ldots, x_{p_n})$ un conjunto de fórmulas de $L_{\mathcal{A}}$ con a lo sumo $x_1 \ldots, x_{p_n}$ como variables libres. Supongamos que*

(a) T tiene un modelo y

(b) para cada $n < \omega$ y cada fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_{p_n}) \in L_{\mathcal{A}}$, si $T \cup \{(\exists x_1, \ldots, x_{p_n})\psi\}$ tiene modelo, entonces existe $\varphi \in \Phi_n$ de tal forma que $T \cup \{\exists x_1, \ldots, x_{p_n}(\psi \wedge \varphi)\}$ también tiene modelo.

Entonces

$$T \cup \left\{ \bigwedge_{n<\omega} \forall \vec{x} \bigvee_{\varphi \in \Phi_n} \varphi(\vec{x}) \right\}$$

tiene modelo.

Todo lo anterior ha sido hecho para la lógica $L_{\omega_1\omega}$. El paso natural es extenderlo para las lógicas infinitarias $L_{\kappa\omega}$, con $\kappa > \omega_1$. En [Gr75] se define, para cada cardinal regular $\kappa > \omega$, la noción de κ-propiedad de consistencia como una familia de conjuntos de enunciados de $L_{\kappa\omega}$ que satisfacen ciertas propiedades de cerradura. De esta forma se puede extender (en cierto sentido) el teorema 6.2.6 a $L_{\kappa\omega}$, para κ un cardinal regular mayor a ω_1.

Las propiedades de consistencia es una forma de generar modelos para la lógica infinitaria, pero no es la única forma de hacer teoría de modelos infinitaria. Otra vía es independiente de los axiomas de **ZFE** y se basa en ciertos *grandes cardinales*. Dado un cardinal κ, podemos preguntarnos qué tan grande debe ser κ para que la lógica $L_{\kappa\omega}$ recupere cierto grado de compacidad. Esta pregunta da lugar a dos nociones de grandes cardinales.

> Decía el señor Keuner de alguien: –Es un gran estadista. No se deja impresionar por lo que uno es, sino por lo que puede ser. Por esto, no debe uno asombrarse de que los hombres sean hoy explotados por causa de sus propias desgracias sino de que deseen ser explotados. La culpa de los que los explotan por su desgracia es tanto mayor por cuanto abusan de un deseo de gran decencia.

Definición 6.2.8. Sea κ un cardinal no numerable.

1. κ es *compacto débil* si para todo lenguaje de tamaño a lo sumo κ para cualquier conjunto Σ de enunciados de $L_{\kappa\omega}$, Σ tiene un modelo siempre que todo subconjunto de Σ de cardinalidad menor a κ tenga modelo.

2. κ es *compacto fuerte* si para cualquier conjunto Σ de enunciados de $L_{\kappa\omega}$, Σ tiene un modelo siempre que todo subconjunto de Σ de cardinalidad menor a κ tenga modelo.

Existen gran cantidad de definiciones equivalentes de la noción de cardinal compacto débil. De hecho, es una de las clases de grandes cardinales que mas equivalencias admite, y la mayoría de ellas no hacen referencia a lógicas infinitarias, lo que oculta su origen y su relación con compacidad. Debe quedar claro que la definición dada sí implica que el cardinal compacto débil es inaccesible, lo cual no necesariamente se desprende con otras equivalencias. Así, es posible recuperar algún grado de compacidad, en presencia de axiomas adicionales a ZFE, lo que subsana, de forma parcial, los teoremas de Lindström en una dirección. Pero note que no se recupera la compacidad de primer orden, pues no basta con que los subconjuntos finitos sean satisfacibles.

Ahora enfoquémonos en el teorema de Löwenheim-Skolem creciente. Antes exhibimos un conjunto de enunciados de la lógica $L_{\omega_1\omega}$ que tiene modelos numerables pero no tiene modelos de tamaño mayor a $\aleph_0$, en otras palabras, el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente es falso para $L_{\omega_1\omega}$. Detengámonos por un momento en la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$. En [Ke71] se demuestra que para cada $\alpha < \omega_1$, existe un enunciado φ de $L_{\omega_1\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$, pero no tiene modelos de cardinalidad mayor a $\beth_\alpha$. Esto no debe ser sorprendente, pues ya hemos exhibido un ejemplo que muestra que el teorema de Löwenheim-Skolem creciente es falso. Keisler utiliza una propiedad de consistencia para demostrar que si Σ es un conjunto de fórmulas de $L_{\omega_1\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\beth_{\omega_1}$, entonces Σ tiene modelos de tamaño κ, para todo cardinal $\kappa > \beth_{\omega_1}$. Entonces $\beth_{\omega_1}$ es el cardinal a partir del cual se cumple el teorema de Löwenheim-Skolem creciente para $L_{\omega_1\omega}$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 6.2.9. Decimos que el *número de Hanf* μ de una lógica $\mathbb{L}$ es el primer cardinal a partir del cual se cumple el teorema de Löwenheim-Skolem creciente para cualquier enunciado en $\mathbb{L}$, en el sentido recién descrito.

> El discípulo Profundo se aproximó al señor K., el Pensador, y le dijo: –Quiero conocer la verdad.–¿Qué verdad? La verdad es conocida. ¿Acaso quieres saber la del comercio pesquero? ¿La de los impuestos, tal vez? Si porque te digan la verdad del comercio pesquero no pagas a mejor precio sus pescados, no la encontrarás nunca –le respondió el señor Keuner.

Los cardinales compactos fuertes tienen propiedades de números de Hanf para lógicas infinitarias; otra noción cardinal que se relaciona con la teoría de modelos de la lógica infinitaria es la de *cardinal inefable*.

Definición 6.2.10. Decimos que un cardinal κ es inefable si cualquier sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$, con $S_\alpha \subseteq \alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, es coherente, es decir, existe $S \subseteq \kappa$ de tal suerte que

$$\{\alpha < \kappa : S_\alpha = S \cap \alpha\} \text{ es un conjunto estacionario de } \kappa.$$

Si $\mu < \kappa$, entonces κ es inefable exactamente cuando a una sucesión arbitraria $(\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de $\mathcal{L}$-estructuras, con $|\mathcal{L}| < \kappa$ y que es continua en los ordinales límite, podemos encontrar un conjunto estacionario $S \subseteq \kappa$ de tal manera que si $\alpha, \beta \in S$ y $\alpha < \beta$ entonces $\mathfrak{A}_\alpha \preceq_{L_{\mu\mu}} \mathfrak{A}_\beta$. Particularmente, $\bigcup_{\alpha \in S} \mathfrak{A}_\alpha$ es una extensión de cada $\mathfrak{A}_\alpha$ para $\alpha \in S$. Esto nos dice que κ aproxima el *número de Hanf* de $L_{\mu\mu}$, siempre que tengamos dicha sucesión de estructuras.

Más adelante trataremos con problemáticas sobre la expresividad en lógicas infinitarias $L_{\kappa\omega}$, para κ un cardinal infinito, específicamente, trataremos la expresividad de grupos libres respecto a lógicas infinitarias más poderosas. Esto nos conduce a pensar en alguna lógica que extienda a las anteriores, para lo que utilizaremos a $L_{\infty\omega}$ para denotar a la lógica que permite formar conjunciones y disyunciones arbitrariamente grandes (pero bien definidas) de fórmulas y cuantificar sobre una cantidad finita de variables, es decir,

$$L_{\infty\omega} = \bigcup \{L_{\kappa\omega} : \kappa \text{ es un cardinal infinito}\}.$$

De la actriz Z. se contaba que se había dado muerte a causa de un amor desdichado. El señor Keuner dijo: –Se ha suicidado por amor a sí misma, pues es imposible que X. la haya amado. De lo contrario, ella no le hubiera hecho esto. El amor es algo que se da y no algo que se retiene. El amor es el arte de producir algo con las posibilidades de otro. Para ello se necesita la estima y el afecto de otro. Y esto siempre puede conseguirse. El deseo desproporcionado de ser amado tiene poco que ver con el auténtico amor. El amor a sí mismo siempre tiene algo de suicida.

Grupos Libres y Lógica Infinitaria

A lo largo de este apartado, todo grupo será un grupo abeliano. Tratemos la expresividad de nociones algebraicas particulares. Nos enfocamos en los grupos libres.

Definición 6.2.11. Decimos que un grupo F es libre si existe $X \subseteq F$ no vacío que satisface las siguientes condiciones.

1. $F = \langle X \rangle$.
2. Para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, si $n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = 0$, entonces $n_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Aquí $\langle X \rangle$ representa al subgrupo de F generado por X. Cuando X satisface los incisos 1. y 2. se le llama una base de F.

Usando la definición, no siempre es sencillo determinar si un grupo es libre. El siguiente teorema establece condiciones equivalentes para un grupo libre que pueden ser de utilidad.

 **Teorema 6.2.12.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un grupo F.*

1. *F es libre.*
2. *F es la suma directa interna de una familia de grupos cíclicos infinitos.*
3. *F es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Z}$.*

Mediante varios resultados se puede probar que la noción de ser libre no es expresable en $L_{\omega\omega}$, como pronto veremos, de modo que una pregunta interesante es si existe una lógica adecuada en la cual podamos expresar el concepto de grupo libre, por supuesto, el lenguaje en el que trabajaremos será el lenguaje de la teoría de grupos. Debido a que no es posible encontrar una fórmula de $L_{\omega\omega}$ que defina a la clase de los grupos libres, el siguiente paso es intentar encontrar dicha fórmula en alguna lógica infinitaria. Decimos que un grupo G es κ-libre (κ un cardinal innumerable) cuando todo subgrupo de G de tamaño $< \kappa$ es libre. Aquí, libre se puede sustituir por otras nociones algebraicas como «sin torsión», «proyectivo», «localmente proyectivos», etc., en tanto esta noción se herede a subgrupos.

 **Teorema 6.2.13.** *Si G es un grupo libre con una base numerable, entonces ocurre lo siguiente*

$$H \equiv_{L_{\infty\omega}} G \Leftrightarrow H \text{ es } \omega_1\text{-libre.}$$

Este teorema pareciera indicar que la noción de grupo libre es definible en la lógica infinitaria. Pronto veremos que el escenario es mucho más complejo, pero de entrada podemos dar una respuesta parcial en la dirección negativa.

Ejemplo 6.2.14. Sean I un conjunto infinito, $G = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$ y $H = \prod_{i\in I} \mathbb{Z}$. Queda claro que G es un grupo libre, mientras que H no lo es (referimos al lector a [EkMe02, Theorem IV.2.8] para una prueba de que H no es libre). Sin embargo,

$$G \equiv_{L_{\infty\omega}} H.$$

Esto muestra que la noción de grupo libre no se puede definir en la lógica $L_{\infty\omega}$, lo que contrasta con el teorema 6.2.13 que asegura que al menos se puede aproximar; la clave

es que no todo grupo ω_1-libre es un grupo libre. De hecho, el teorema 6.2.13, se puede extender de tal forma que H es κ^+-libre exactamente cuando existe un grupo libre G con una base de tamaño κ tal que

$$G \equiv_{L_{\infty\kappa}} H.$$

Esto no significa que los grupos libres puedan ser definibles en $L_{\infty\infty}$; como adelantamos previamente, la cuestión es más complicada. En la siguiente sección veremos que sí existe un cardinal κ de tal suerte que todo grupo κ-libre es libre. Pero esta condición es independiente de la teoría ZFE, puesto que una solución positiva involucra necesariamente nociones de grandes cardinales como compacto débil, compacto fuerte y fuerte.

Teorema 6.2.15 ([EkMe02])**.** *Sea R un DIP con $|R| < \kappa$.*

1. *Si M es un R-módulo κ-libre de cardinalidad κ y κ es compacto débil, entonces M es libre.*
2. *Si M es un R-módulo κ-libre de cardinalidad $\geq \kappa$ y κ es un cardinal compacto fuerte, entonces M es libre.*
3. *Si M es un R-módulo κ-libre de cardinalidad $\geq \kappa$ y κ es fuerte, entonces M es libre.*

El resultado anterior se puede extender a ciertas nociones, si cambiamos la propiedad de ser libre por alguna clase adecuada de módulos, obteniéndose resultados análogos con la misma clase de grandes cardinales; dichas propiedades se discutirán pronto. En general, la cuestión sobre la definibilidad de grupos libres es independiente de la teoría de conjuntos; ya mencionamos un resultado negativo y la independencia de los resultados positivos. Para un resultado positivo que no es independiente de ZFE es suficiente considerar un cardinal singular: si M es un R-módulo ($|R| < \kappa$) κ-libre con cardinalidad κ y κ es singular entonces M es libre (esto es lo que se conoce como el Teorema de compacidad singular de Shelah véase [NiSaVi26, Teorema 9.7.7]). Lo análogo ocurre con la respuesta negativa, es independiente de **ZFE**.

Teorema 6.2.16 ([EkMe02])**.** *Supongamos $V = L$. Sea κ un cardinal que no es compacto débil, entonces existe un grupo κ-libre que no es libre.*

Es decir, con la hipótesis adicional de $V = L$ tenemos un resultado negativo. Puesto que los cardinales compactos débiles sí pueden existir en L, la hipótesis sobre que κ no es compacto débil es medular. Este teorema depende de un resultado en L en el que se caracteriza a los cardinales compactos débiles como aquellos que reflejan conjuntos estacionarios.

Teorema 6.2.17. *Supongamos $V = L$. Los siguientes son equivalentes.*

1. *κ es compacto débil.*
2. *Si $S \subseteq \kappa$ es estacionario, entonces existe un cardinal regular $\alpha < \kappa$ tal que $S \cap \alpha \subseteq \alpha$ es un conjunto estacionario en α.*

Una implicación se satisface sin restriciones, cuando κ es compacto débil, cualquier estacionario $S \subset \kappa$ refleja en algún cardinal regular $\alpha < \kappa$. Luego Zeman, [Ze09], demostró que si $V = L[\vec{E}]$ donde $\vec{E}$ es una sucesión de extensores con ciertas propiedades, entonces la otra implicación se satisface. Esto es, cuando $V = L[\vec{E}]$ y κ no es compacto débil entonces para cualquier $S \subset \kappa$ existe $S' \subset S$ estacionario que no refleja .

> Lo único que el señor K. decía a propósito del estiló era lo siguiente: —Tendría que ser citable. Una cita es impersonal. ¿Quiénes son los mejores hijos? Los que dejan a sus padres en el olvido.

Δ-Interpolación

Dada una lógica abstracta $\mathbb{L}$ y un lenguaje $\mathcal{L}$, se definen clases de estructuras de la forma $K = \mathrm{Mod}(\varphi)$ donde $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$, es decir en K viven precisamente las $\mathbb{L}$-estructuras que satisfacen φ; estas clases de estructuras se llaman *elementales*, pero también podemos definir clases de estructura de forma *implícita*, es decir, utilizando símbolos extra, pero sin hacer referencia directa a ellos. Formalmente, K es una *clase proyectiva* de $\mathcal{L}$-estructuras cuando existen $\mathcal{L}^+ \supset \mathcal{L}$ y $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L}^+)$ de tal suerte que

$$K = \underbrace{\{\mathfrak{M} \restriction \mathcal{L} : \mathfrak{M} \models \varphi\}}_{=\mathrm{Mod}(\varphi)\restriction\mathcal{L}}. \tag{6.2.1}$$

En símbolos $K \in \Sigma(\mathbb{L})$.

Ejemplo 6.2.18. 1. En $\mathbb{L} = L_{\omega\omega}$ y $\mathcal{L}$ arbitrario, siempre podemos definir un orden lineal al acudir, primero, al lenguaje $\mathcal{L} \cup \{<\}$ y, segundo, al enunciado $\psi \in L(\mathcal{L} \cup \{<\})$:

$$\begin{aligned}\forall x, y, z\big((x < y \wedge y < z \to x < z) \wedge (x = y \vee x < y \vee y < x) \wedge \\ \neg x < x \wedge (x < y \to \neg y < x)\big).\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Esto es, la clase de órdenes lineales es *proyectiva en* $\mathbb{L}$ o bien $\Sigma(\mathbb{L})$.

2. En el contexto, del lenguaje de teoría de R-módulos $\mathcal{L}$, la clase K de R-módulos ordenados se pueden definir de forma proyectiva,

$$K = \{M : (M, <) \models \psi^+(<)\}$$

donde $\psi^+(<)$ es como en 6.2.2 más los enunciados $\forall x,y,z(x<y\to x+z<y+z)$, $\forall x,y(x<y\to -y<-x)$.

Queda claro que $\Sigma(\mathbb{L})$, pensada como la colección de enunciados proyectivos en $\mathbb{L}$, genera una lógica abstracta que extiende a $\mathbb{L}$, que resulta cerrada respecto a conjunciones, disyunciones y cuantificacion existencial. Con el fin de corroborar esto notemos que si $\varphi_i\in\mathbb{L}(\mathcal{L}_i)$ entonces $\mathcal{L}^+=\mathcal{L}_0\cup\mathcal{L}_1$ es tal que $\varphi_0\vee\varphi_1,\varphi_0\wedge\varphi_1\in\mathbb{L}(\mathcal{L}^+)$, mientras que para el caso existencial es suficiente notar que éste extiende al lenguaje mediante una constante. No obstante, no es evidente que $\Sigma(\mathbb{L})$ sea cerrada respecto negaciones; se podría pensar que si $\psi\in\mathbb{L}(\mathcal{L}^+)$ define proyectivamente a K, entonces $\neg\psi$ debe definir proyectivamente a $\mathrm{Est}(\mathcal{L})-K$, pero este no es el caso porque lo que define a una clase proyectiva es el enunciado en 6.2.1, que consta de dos cuantificaciones existenciales *fuera de la lógica* $\mathbb{L}$. En símbolos, no podemos asegurar que

$$\mathrm{Est}(\mathcal{L})-\mathrm{Mod}(\psi)\restriction\mathcal{L}=(\underbrace{\mathrm{Est}(\mathcal{L}^+)-\mathrm{Mod}(\psi)}_{=\mathrm{Mod}(\neg\psi)})\restriction\mathcal{L}.$$

Ejemplo 6.2.19. En $L_{\infty\omega}$ no se puede expresar el buen orden. Aún más, no se puede expresar el buen orden del forma implícita. Es decir, la clase de buenos órdenes no es $\Delta(L_{\kappa\omega})$. Véase [Di75, Theorem 4.4.1].

Esto da lugar a la siguiente noción. Una clase $K\subset\mathrm{Est}(\mathcal{L})$ se dice $\Delta(\mathbb{L})$, siempre que tanto K como $\mathrm{Est}(\mathcal{L})-K$ sean proyectivas en $\mathbb{L}$. Esto sí asegura que $\Delta(\mathbb{L})$, pensado como la colección de enunciados que son Δ en $\mathbb{L}$, sea una lógica abstracta cerrada respecto a negaciones. Esta noción genera una nueva lógica que sí es cerrada bajo negaciones, como lo ilustra el siguiente teorema.

Teorema 6.2.20. *Existe un operador Δ que transforma lógicas abstractas en lógicas abstractas que satisface las siguientes propiedades.*

1. $\mathbb{L}\leq\Delta(\mathbb{L})$.
2. $\Delta(\Delta(\mathbb{L}))=\Delta(\mathbb{L})$.
3. $\mathbb{L}_0\leq\mathbb{L}_1$ *implica* $\Delta(\mathbb{L}_0)\leq\Delta(\mathbb{L}_1)$.

Demostración. Véase [BaFe85, Theorem 7.2.4]. □

En el apartado dedicado a los cuantificadores generalizados discutiremos de forma breve una presentación de los enunciados de $\Delta(\mathbb{L})$; para más detalles sobre el operador Δ, referimos al lector a [MaShSt76] y [Va85]. Dadas estas propiedades, vemos que Δ es

un operador de cercanía: intuitivamente, dicho operador aproxima la lógica de segundo orden $\mathbb{L}_{II}$ asociada a $\mathbb{L}$, pero sin salir formalmente de $\mathbb{L}$. Es decir, con enunciados de $\mathbb{L}$, construidos a partir una colección de nuevos símbolos obtenemos nuevas clases de estructuras, por eso anteriormente les llamábamos definiciones implícitas. Esta nueva colección de símbolos funge como un cuantificador de segundo orden para $\mathbb{L}$ y, como veremos después, $\Delta(\mathbb{L})$ se puede representar utilizando cuantificadores generalizados. Existen lógicas, como primer orden, que satisfacen $\Delta(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$, dichas lógicas se dicen que satisfacen Δ-*interpolación*, que es una propiedad que establece un equilibrio entre semántica y sintaxis.

Ejemplo 6.2.21. Fijamos un anillo R. La clase de R-módulos libres es $\Sigma(L_{\infty\omega})$. Primero, nuestro lenguaje consta de los símbolos $\{0, +, -, r(\cdot) : r \in R\}$ donde 0 es la constante que se interpeta como el elemento neutro, $+$ es la suma en el grupo abeliano, $-$ es la operación de tomar inverso aditivo del grupo y, para $r \in R$, $r(\cdot)$ es la función $x \mapsto rx$, que relaciona el grupo y el anillo. Consideremos un nuevo símbolo U y fijemos $\varphi(U)$ como el enunciado

$$\forall y \bar{\bigvee}_{n<\omega} \exists\, ! x_1, ..., x_n \left(\bigwedge_{i \leq n} U(x_i) \wedge \bar{\bigvee}_{t \ \mathcal{L}\text{-término}} t(\vec{x}) = y \right);$$

donde $\bar{\bigvee}$ representa la disyunción exclusiva, es decir que se satisface la disyunción exactamante en un único disyunto. Expliquemos lo que simboliza dicha fórmula.

1. El primer cuantificador universal toma un elemento arbitrario y.
2. La disyunción exclusiva escoge un único natural n que determinará la cantidad de elementos a escoger en U.
3. El cuantificador $\exists\,!$ escoge elementos únicos $x_1, ..., x_n$.
4. El primer conyunto asegura que los elementos únicos pertenecen a U.
5. El segundo disyunto está formado por otra disyunción exclusiva, que se encarga de escoger un único término t en el lenguaje de R-módulos.
6. Finalmente, la igualdad $t(\vec{x}) = y$ asegura que y se representa con el término t y los elementos $\vec{x}$.

Ya discutimos que los términos de lenguaje representan combinaciones lineales. Por tanto, el enunciado establece que U es una base para el R-módulo porque cada elemento se puede escribir como combinación lineal de los elementos de U y dicha combinación lineal es única, de ahí la necesidad de la disyunción exclusiva. Además, la disyunción

exclusiva se puede definir en términos de la conjunción, la disyunción (inclusiva) y la negación. Con esto demostramos que *ser libre* es una expresión $\Sigma(L_{\infty\omega})$ en el lenguaje de teoría de R-módulos. Particularmente, la clase de grupos libres es una clase $\Sigma(L_{\infty\omega})$, en el lenguaje de teoría de grupos: $\{0, +, -\}$.

El ejemplo previo solo ilustra una parte del escenario. Puesto que el interés son las clases Δ, necesitamos asegurar que la clase de los grupos que *no son libres* también es Δ. Contamoscon la otra parte pero utilizando una condición que a primera vista parece inusual.

 **Teorema 6.2.22.** *Las siguientes son equivalentes.*

1. *La clase de grupos libres es definible en* $L_{\infty\infty}$.
2. *La clase de grupos libres es definible en* $\Delta(L_{\infty\infty})$.
3. *La clase de grupos libres es definible en* $\Delta(L_{\infty\omega})$.
4. *Existe un cardinal* κ *tal que* κ*-libre implica libre.*

Demostración. Véase [Me76]. 

Esto muestra la importancia del operador Δ. Notamos que la condición 6.2.22(4) puede ser independiente de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, ya vimos que hay grupos ω_1-libres que no son libres. En la otra dirección, cuando κ es un cardinal compacto débil y M es un R-módulo de cardinalidad $\kappa > |R|$ que es κ-libre, entonces es libre. Si κ es un cardinal compacto fuerte, o un cardinal fuerte, si M tiene cualquier cardinalidad $> |R|$ y es κ-libre, tiene que ser libre. Extendiendo la discusión a otra clase de módulos, se sabe que si κ es inaccesible débil pero no es ni compacto débil, ni ω_1-medible, entonces existe un R-módulo M, de cardinalidad $\kappa > |R|$ que es κ-*sin torsión* pero no es un R-módulo sin torsión ([NiSaVi20]).

El teorema también manifiesta la importancia de encontrar cardinales κ para los cuales κ-«libre» implique «libre», pues nos asegura la definibilidad en ciertas lógicas de las clases involucradas. Mayormente, estos resultados requieren algún axioma de gran cardinal.

Esto nos lleva a considerar otras clases de R-módulos que aproximan a los R-módulos libres. Especialmente, nos interesa considerar la relación entre el operador Δ, la lógica infinitaria y nociones de la forma κ-«libre», donde «libre» se refiere a alguna de las siguientes nociones.

1. proyectivo.
2. sin torsión[1].

[1]No confundir *sin torsión* con *libre de torsión*. Sin torsión traduce del inglés *torsionless* mientras que libre de torsión corresponde a *torsion free*.

3. localmente proyectivo.

4. Baer.

> El médico S. se lamentaba ante el señor K.: –He escrito sobre muchos procesos que en realidad se desconocían. Y no sólo he escrito sobre ellos, sino que los he curado.
> –¿Y se conocen en la actualidad los procesos sobre los que entonces trataste? –le preguntó el señor Keuner. –No –respondió S. –Más vale –repuso rápidamente el señor Keuner –que lo desconocido siga desconociéndose a que los misterios se multipliquen.

Para continuar este problema, se obtiene una caractarización fuerte de módulo libre por medio de una filtración del módulo con submódulos de menor tamaño. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 6.2.23. Decimos que el R-módulo M es *fuertemente κ-libre* si existe una sucesión $\{M_\xi : \xi < \kappa\}$ tal que

1. $|M_\xi| < \kappa$ para toda $\xi < \kappa$,

2. $M_\xi \leq M_{\xi+1} \leq M$ para toda ξ,

3. $M_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} M_\xi$ cuando $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y

4. $\{\xi < \kappa : M/M_{\xi+1}$ es κ-libre$\}$ es estacionario en κ.

Luego Eklof [Ek79] demostró que, considerando grupos, esta noción puramente algebraica es equivalente a una noción utilizando lógicas infinitarias, donde libre es la noción usual de libre. Queda por averiguar si este resultado se extiende a otras nociones de «libre».

Teorema 6.2.24. *G es un grupo fuertemente κ-libre exactamente cuando $G \equiv_{L_{\infty\kappa}} F$, donde F es algún grupo libre.*

Pasamos de una definición puramente algebraica, por medio de filtraciones, a una definición que depende de la lógica infinitaria $L_{\infty\kappa}$. El resultado previo nos permite definir nociones relacionadas.

Definición 6.2.25. Decimos que M es

1. *fuertemente sin κ-torsión* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un R-módulo sin torsión.

2. *fuertemente κ-proyectivo* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un R-módulo proyectivo.

3. *fuerte y localmente κ-proyectivo local* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente a un R-módulo localmente proyectivo.

4. *fuertemente κ-Baer* si es $L_{\infty\kappa}$-equivalente un R-módulo Baer.

Las nociones de módulos sin κ-torsión, κ-proyectivos y locamente κ-proyectivos han sido estudiadas en [NiSaVi20] y [NiSaVi] en torno a cardinales compactos débiles, compactos fuertes y cardinales fuertes.

Hemos visto que la lógica infinitaria se vuelve medular para nociones puramente algebraicas. La historia no termina aquí. Además de lógica infinitaria, podemos considerar la *lógica estacionaria*.

> Un falso discípulo se acercó al señor K., el pensador, a contarle lo siguiente:
> –En América existe un becerro de cinco cabezas. ¿Qué me dices a esto?
> –No digo nada –respondió el señor K.
> El falso discípulo sintió un inmenso placer y añadi
> o:
> –Si fueras más sabio sabrías deducir cosas de este hecho.
> El necio espera mucho. El pensador habla poco.

Lógica Estacionaria

La lógica estacionaria extiende a la lógica de primer orden al agregar un nuevo tipo de cuantificación $\mathfrak{aa}\, s$ donde s es una variable de segundo orden. La interpretación intuitiva de $\mathfrak{aa}$ es *casi todos* pero su interpretación formal es compleja y depende de la noción de filtro. Al estudiar filtros podemoss generar una noción de *grandeza*. Recordamos que un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X es un colección de subconjuntos de X que es cerrada respecto a supraconjuntos e intersecciones. Es decir, si $A \subseteq X$ es grande y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces B es grande y si tenemos dos conjuntos A, B grandes, entonces su intersección $A \cap B$ es grande. En general, un filtro no recoge la noción fiel de subconjunto grande puesto que $\{A \subseteq X : \{x\} \subseteq A\}$ es un filtro y es evidente que en la mayoría de los casos $\{x\}$ no es un conjunto grande. Existen ciertos filtros que sí respetan la idea de que sus elementos sean conjuntos grandes.

Definición 6.2.26. Sean κ un cardinal, X un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$ y $C \subseteq [X]^{<\kappa} = \{s \subseteq X : |s| < \kappa\}$.

1. Decimos que C es *cerrado* si para todo $\alpha < \kappa$ y cada sucesión creciente $\{s_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq C$, ocurre que $\bigcup_{\beta<\alpha} s_\beta \in C$.

2. Decimos que C es *no acotado* cuando para cualquier $s \in [X]^{<\kappa}$ existe $t \in C$ con $t \supseteq s$.

Si C es cerrado y no acotado lo llamaremos un *club*.

Definición 6.2.27. Sean κ un cardinal, X un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$ y $S \subseteq [X]^{<\kappa}$. El conjunto S es estacionario si para cada club $C \subseteq [X]^{<\kappa}$, se cumple que $S \cap C \neq \emptyset$.

Ejemplo 6.2.28. Sean κ un cardinal regular no numerable y X un conjunto tal que $|X| \geq \kappa$.

- Para cada $x \in X$, la familia $C_x = \{s \in [X]^{<\kappa} : x \in s\}$ es un club.
- Si μ es un cardinal y $\mu > \kappa$, entonces para cada cardinal regular $\nu < \mu$, la familia $\{s \in [\mu]^{<\kappa} : cf(\sup s) = \nu\}$ es un conjunto estacionario.

Sea κ un cardinal regular no numerable. Probablemente el lector haya advertido la similitud que existe entre las nociones de club en κ y club en $[\kappa]^{<\kappa}$. Recordemos que $C \subseteq \kappa$ es un club en κ si para todo $\alpha < \kappa$ existe $\beta \in C$ tal que $\beta > \alpha$ y, para todo ordinal límite $\alpha < \kappa$ y toda sucesión $\{\beta_\gamma : \gamma < \alpha\} \subseteq C$ ocurre que $\sup\{\beta_\gamma : \gamma < \alpha\} \in C$. Se corrobora que si $C \subseteq \kappa$ en κ, entonces $C \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ es un club. Ahora, si $C \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ es un club, entonces $C \cap \kappa \subseteq \kappa$ es un club en κ. De esta forma, podemos traducir las nociones club y estacionario de κ a $[\kappa]^{<\kappa}$ y viceversa. Algo que sabemos de la colección los clubes es lo siguiente.

Lema 6.2.29. *Si κ es un cardinal regular y $|M| \geq \kappa$ entonces*

$$\mathcal{F}_\kappa M = \{C \subset [M]^{<\kappa} : C \text{ contiene un club}\}$$

es un filtro κ-completo y normal y $\{N \subset [M]^{<\kappa} : N \text{ no es estacionario}\}$ es su ideal dual.

Precisamente, $\mathcal{F}_\kappa M$ es un filtro que sí corresponde a la noción intuitiva de grandeza que describimos. Con estos preliminares a la mano estamos listos para definir la interpretación del cuantificador $\mathfrak{aa}$.

$$\mathfrak{M} \models \mathfrak{aa} s \varphi(s) \Leftrightarrow \underbrace{\{s \in [\kappa]^{<\kappa} : \mathfrak{M} \models \varphi[s]\}}_{=\varphi([\mathfrak{M}]^{<\kappa})} \in \mathcal{F}_\kappa M.$$

En palabras, $\mathfrak{aa} s \varphi(s)$ es satisfecha siempre que la colección de testigos s contenga un club. Es decir, $\varphi(s)$ se satisface *en muchos casos* o *casi siempre*. Este cuantificador viene acompañado de su cuantificador dual $\mathfrak{stats}\varphi(s) \equiv \neg \mathfrak{aa} s \neg \varphi(s)$. La interpretación de $\mathfrak{stat}$ está dada por la regla

$$\mathfrak{M} \models \mathfrak{stats}\varphi(s) \Leftrightarrow \varphi([\mathfrak{M}]^{<\kappa}) \text{ es estacionario.}$$

REcuerde que s es una variable de segundo orden. En [BaKaMa78], se demuestra que cuando $\kappa = \omega_1$, la lógica estacionaria $L(\mathfrak{aa})$ es *numerablemente compacta*. Esto es, si T es numerable y cualquier subconjunto finito de T tiene un modelo, T debe poseer un modelo. Recientemente, extendimos el resultado de tal forma que si $\kappa^+ > \omega_1$ y $T \geq \kappa$ es finito satisfacible, entonces T es satisfacible ([Va]).

Ahora, fijemos el vocabulario de teoría de grupos. Sea κ un cardinal regular y G un grupo de cardinalidad κ. Una *κ-filtración* F de G es una familia $F = \{G_\xi : \xi < \kappa\}$ de tal suerte que

1. $|G_\xi| < \kappa$ para toda $\xi < \kappa$,
2. $G_\xi \leq G_{\xi+1} \leq G$ para toda ξ,
3. $G_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$ cuando $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y
4. $G = \bigcup_{\xi<\kappa} G_\xi$.

Cualquier κ-filtración F forma un club de $[G]^{<\kappa}$. Así que es un elemento de $\mathcal{F}_\kappa M$ y puesto que cualquier otro elemento de $\mathcal{F}_\kappa M$ intersecta a F, podemos fijar la filtración para interpretar el cuantificador $\mathfrak{aa}$ de tal suerte que solo se reconozcan elementos de la filtración. Este truco nos permite generar una teoría de modelos adecuada a nociones algebraicas. Además, por el trabajo de Kaufmann [BaKaMa78], se sabe que la lógica estacionaria y la lógica infinitaria no tienen una relación entre ellas. Es decir, $L(\mathfrak{aa})$ tiene enunciados que no se pueden expresar en $L_{\mu\nu}$ y $L_{\mu\nu}$ define nociones que $L(\mathfrak{aa})$ no puede reproducir. Con estos dos hechos se obtiene una teoría de modelos prolífica para estructuras algebraicas. Por ejemplo, el siguiente teorema describe una condición suficiente y necesaria para que dos grupos fuertemente κ-libres satisfagan los mismos enunciados de la versión infinitaria de la lógica estacionaria.

 **Teorema 6.2.30** (Eklof-Mekler [EkMe81]). *Sean G, H grupos de cardinalidad κ^+ y fuertemente κ^+-libres. Consideramos dos filtraciones F_G, F_H de G, H respectivamente. Las siguientes son equivlanetes.*

1. $G \equiv_{L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa^+}} H$.
2. *Para cualquier clase $\mathfrak{H}$ de grupos de cardinalidad $< \kappa^+$ que es cerrado respecto a isomorfismos y a la relación de equivalencia*

   $$H_0 \sim H_1 \text{ exactamente cuando existe un grupo libre } F \text{ con cardinalidad } < \kappa^+ \text{ de tal suerte que } H_0 \oplus F \cong H_1 \oplus F,$$

   se tiene que

   $$\{\xi < \kappa^+ : G_{\xi+1}/G_\xi \in \mathfrak{H}\} \text{ es estacionario } \Leftrightarrow \{\xi < \kappa^+ : H_{\xi+1}/H_\xi \in \mathfrak{H}\} \text{ es estacionario.}$$

Esta teoría de modelos tiene consecuencias en álgebra homológica.

Teorema 6.2.31. *Supongamos $V = L$. Si G es un grupo κ-libre de cardinalidad κ y H un grupo con cardinalidad $< \kappa$ con $\mathrm{Ext}(G,H) \neq 0$, entonces existen 2^κ grupos $\{B_i : i < 2^\kappa\}$ distintos y $h_i : H \longrightarrow B_i$, $k_i : B_i \longrightarrow G$ tales que*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{h_i} B_i \xrightarrow{k_i} G \longrightarrow 0$$

es exacta para cada $i < 2^\kappa$.

Una consecuencia interesante de este teorema es la siguiente.

Corolario 6.2.32. *Supongamos $V = L$. Sea G un grupo fuertemente κ-libre de cardinalidad κ. Si G no es libre entonces existen 2^κ grupos fuertemente κ-libres $\{B_i : i < 2^\kappa\}$ de cardinalidad κ con $B_i \equiv_{L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa}} G$.*

Más, si G es un grupo κ-libre de cardinalidad κ y H un grupo de cardinalidad $< \kappa$, entonces $\mathrm{Ext}(G,H) = 0$ o bien $|\mathrm{Ext}(G,H)| = 2^\kappa$.

Además, con la misma hipótesis $V = L$ Eklof [Ek77] demuestra que cuando κ es regular y T es un grupo de torsión de cardinalidad κ, entonces existe un enunciado $\psi^T \in L^{\mathfrak{aa}}_{\infty\kappa}$ tal que para cualquier grupo libre de torsión J con tamaño κ

$$\mathrm{Ext}(J,T) = 0 \Leftrightarrow J \models \psi^T.$$

Esta serie de resultados muestra la importancia de lógicas alternativas a primer orden en el contexto de álgebra. Desde nociones de módulos hasta homología, la lógica estacionaria y la lógica infinitaria generan resultados importantes para el álgebra.

> –He observado –dijo el señor K. –que muchas personas se horrorizan de nuestra doctrina porque a todo sabemos darle una respuesta. ¿No podríamos añadir a nuestra propaganda una lista con las cuestiones que consideramos irresueltas?

Cuantificadores Generalizados

Ya hemos tratado la noción de cuantificador generalizado utilizando varios ejemplos. También, abordamos la cuantificación infinitaria, la cuantificación de cardinalidad y la cuantificación de la lógica estacionaria $L(\mathfrak{aa})$. Esta última ilustra que los tipos de cuantificaciones que se pueden idear resultan ser complejos; algo que puede parecer más natural para ciertos problemas en matemáticas como la cuantificación de cardinalidad no requiere tanta complejidad. De hecho, la cuantificación generalizada puede ser tan abstracta como a uno se le ocurra. Aunque este sea el caso general, lo evitaremos y nos concentraremos en lógicas abstractas con cuantificadores generalizados que resultan naturales para investigar nociones matemáticas.

Vimos que la propiedad arquimediana no se puede definir en primer orden, una aplicación adecuada del teorema de compacidad. De hecho, si consideramos la lógica $\mathbb{L}(Q_0)$ que extiende al la lógica de primer orden al considerar un cuantificador Q_0 cuyo objetivo es verificar la existencia de una cantidad infinita de testigos, tampoco se puede expresar la propiedad arquimediana en esta lógica. En la lógica de segundo orden $\mathbb{L}^{II}$ sí se puede lograr y se sabe que $L_{\omega\omega} \leq \mathbb{L}(Q_0) \leq \mathbb{L}^{II}$. Pero la teoría de modelos de la lógica de segundo orden suele ser rígida, en el sentido que los modelos de los enunciados tienden a ser únicos. Por esta razón, $\mathbb{L}^{II}$ es demasiado fuerte para expresar la propiedad arquimediana. Así que es natural preguntarse por alguna lógica intermedia entre $\mathbb{L}(Q_0)$ y $\mathbb{L}^{II}$ que logre esto. Con esta meta en mente presentamos una clase de cuantificadores generalizados.

Definición 6.2.33 (Magidor-Malitz)**.** Sean $1 < n < \omega$ y α un ordinal; Q^n_α es el cuantificador que admite n variables libres y cuya interpretación está dada por la fórmula,

$$\mathfrak{M} \models Q^n_\alpha x_1 ... x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$$

si y solo si existe $X \subseteq M$ con $|X| \geq \omega_\alpha$ tal que para cada $a_1, ..., a_n \in X$ distintos, tenemos

$$\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, ..., a_n].$$

Esta clase de cuantificadores son llamados de Magidor-Malitz ([MaMa77]). También son llamados cuantificadores *Ramsey* porque su función es encontrar conjuntos *homogéneos* para fórmulas φ. Además, cuando $n = 1$, Q^n_α genera el cuantificador de cardinalidad Q_α que asegura la existencia de al menos ω_α testigos. Si $m < n$ entonces $L(Q^m_\alpha) \leq L(Q^n_\alpha)$ porque $Q^m_\alpha x_1 ... x_m \varphi(x_1, ..., x_m)$ se puede expresar como $Q^n_\alpha x_1 ... x_n (\varphi(x_1, ..., x_m) \wedge \bigwedge_{m<i\leq n} x_i = x_i)$. Esto muestra que $L(Q_0) \leq L(Q^2_0)$, de hecho $\leq$ es propia porque en $L(Q^2_0)$ ya podemos expresar que un campo real cerrado es arquimediano.

Lema 6.2.34 ([Co79])**.** *Cuando $\alpha = 0$, en el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1, <\}$, podemos expresar que $\mathcal{M} \models$ CRC sea un campo real cerrado arquimediano por medio del siguiente enunciado*

$$\neg\exists\, x Q^2_0 yz(0 < y \wedge y < x \wedge 0 < z \wedge z < x \wedge (y - z > 1 \vee z - y > 1)).$$

Aquí, CORC es la teoría de primer orden que expresa que una estructura es un campo ordenado y real cerrado, véase [ChKe12] o [Co79]. En la última referencia, se demuestra que la teoría de campos arquimedianos real cerrados es completa. Este hecho se conocía para la teoría CORC. Así que, aunque aumentamos la expresividad de la lógica por medio de un cuantificador $Q^2_0 xy$, se sigue preservando gran parte de la teoría de modelos de primer orden. Esto es más general, en [Co82] se estudia la noción de un campo ω_α-arquimediano real cerrado y se demuestra que esta noción se puede expresar en $L(Q^2_\alpha)$ y que la teoría resultante también es completa. Todavía más, la teoría CORC es modelo completa, una noción relacionada a la completud y que también se satisface en las extensiones $L(Q^2_\alpha)$.

Definición 6.2.35. Dada una lógica abstracta $\mathbb{L}$ y una $\mathbb{L}$-teoría T, decimos que la teoría es *modelo completa* si para cualesquiera $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ con $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ se tiene $\mathfrak{A} \prec_L \mathfrak{B}$.

Si la teoría tiene eliminación de cuantificadores entonces la teoría es tanto completa como modelo completa, donde T tiene eliminación de cuantificadores, cuando para cualquier fórmula $\varphi \in L$, existe una fórmula libre de cuantificadores ϑ con

$$T \models \varphi \leftrightarrow \vartheta.$$

Los métodos de [Co79] y [Co82] muestran que la teoría de campos ω_α-arquimedianos real cerrados tienen eliminación de cuantificadores. Esto corrobora que la teoría es modelo completa, no solamente completa, de donde se desprende que la lógica $L(Q^n_\alpha)$, para $n > 1$, es la lógica intermedia que buscábamos para expresar la propiedad arquimediana, y también es adecuada para el estudio de la teoría de modelos de campos real cerrados puesto que conserva muchas de las virtudes asociadas a la teoría de primer orden de campos real cerrados.

Hasta este punto hemos considerado diferentes tipos de cuantificadores. El cuantificador $\mathfrak{aa}$ es un cuantificador de segundo orden, hemos mostrado el uso de cuantificadores de cardinalidad y su variación a n dimensiones, es decir un solo cuantificador cuantifica n variables distintas. Otro tipo de cuantificación cardinal involucra no solo varias variables, también varias fórmulas. El *cuantificador de Härtig* H o de *equicardinalidad* cuantifica sobre dos variables y sobre dos fórmulas. Si $\psi(x), \varphi(y) \in \mathbb{L}(H)$ entonces $Hxy(\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{L}(H)$ y su interpretación está dada por la siguiente prescripción

$$\mathfrak{M} \models Hxy(\varphi(x), \psi(y)) \Leftrightarrow |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \varphi[a]\}| = |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \psi[a]\}|.$$

Siguiendo este modelo de cuantificación, podemos definir una variación obvia de H. La lógica $\mathbb{L}(J)$ se define de forma análoga a $\mathbb{L}(H)$ con la diferencia en la interpretación dada por la siguiente regla

$$\mathfrak{M} \models Jxy(\varphi(x), \psi(y)) \Leftrightarrow |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \varphi[a]\}| \leq |\{a \in M : \mathfrak{M} \models \psi[a]\}|.$$

Si consideramos el enunciado

$$Jxy(\varphi(x), \psi(y)) \wedge Jyx(\psi(y), \varphi(x))$$

vemos que el cuantificador de Härtig se puede definir en $\mathbb{L}(J)$, esta observación demuestra que $\mathbb{L}(H) \leq \mathbb{L}(J)$.

Teorema 6.2.36 ([Co81])**.** *La $\mathbb{L}(J)$-teoría de campos real cerrados tiene eliminación de cuantificadores. Por tanto es completa y modelo completa.*

Por tanto, la teoría de modelos de las lógicas $\mathbb{L}(H), \mathbb{L}(J)$ preservan las bondades de la teoría de modelos para campos real cerrados estudiada desde la lógica de primer orden.

Esta serie de ejemplos muestra una cantidad abundante de variantes para formar cuantificadores generalizados. En general, se pueden formar cuantificadores que admiten n fórmulas y m variables, incluso cuando n, m son cardinales infinitos. Este método permite una presentación de la lógica $\Delta(\mathbb{L})$ por medio de cuantificadores generalizados asociados a las clases Δ en $\mathbb{L}$. A cada clase K que es Δ en $\mathbb{L}$ le asociamos un cuantificador Q^K y hacemos $\Delta(\mathbb{L}) = \mathbb{L}(Q^K : K \in \Delta(\mathbb{L}))$. Puesto que la clase es Δ esto asegura que $\neg Q^K$ también define un cuantificador y $\Delta(\mathbb{L})$ resulta una lógica regular.

> El señor K., que era partidario de que en las relaciones humanas reinase siempre el orden, se vio complicado a lo largo de su vida en multitud de contiendas. En cierta ocasión se encontró involucrado en un lance desagradable que requería acudir aquella misma noche a varias citas convocadas en puntos muy distantes de la ciudad. Pero el señor K. estaba enfermo y tuvo que pedir a un amigo que le prestara un abrigo. Este se lo prometi'ó, a pesar de que ello le obligaba a aplazar un compromiso. Por la tarde, la situación del señor K. se agravó hasta el punto de que sus caminatas se hicieron superfluas, surgiendo en cambio tareas de muy distinta índole. No obstante, y pese al tiempo exiguo de que disponía, el señor K., manteniendo celosamente su palabra, acudió puntualmente para recoger aquel abrigo que entre tanto se había hecho innecesario.

Hemos visto numerosos ejemplos de lógicas abstractas que son realmente más expresivas que la LPO. En varias de ellas hemos constatado que se pierde compacidad o el teorema de LS. De hecho, ya hemos mencionado que este fenómeno no es fortuito, pues la LPO es la única lógica regular que satisface compacidad y LS. Ha llegado el momento de confirmar este resultado: el Teorema de Lindström.

Como anticipación a la prueba del Teorema de Lindström, presentamos una fórmulación «algebraica» de equivalencia elemental: la teoría de Fraïssé, para cuyo cabal entendimiento, al igual que el del Teroema de Lindström introducimos diversas nociones de la teoría de modelos.

6.3 Teoría de modelos

Es particularmente importante investigar que relación guardan dos estructuras o clases de estructuras mediante el análisis de funciones entre ellas y cómo transfieren estas aplicaciones la satisfacibilidad de fórmulas. Para lograrlo desarrollamos la noción de homomorfismo entre estructuras del mismo lenguaje. Un lenguaje formal se indicará como $\mathcal{L} = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}\}$ (símbolos no lógicos), donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de símbolos de constante de $\mathcal{L}$, mientras que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ son los correspondientes símbolos de función y relación, respectivamente.

Sean $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un lenguaje, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Supongamos que f cuenta con las siguientes características:

- ❋ Para cada $c \in \mathcal{C}$, $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$; es decir, la interpretación de c en $\mathfrak{A}$ se transforma en la interpretación de c en $\mathfrak{B}$, (recuerde que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras, por lo que interpretan los mismos símbolos).

- ❋ Si $R \in \mathcal{R}$ es un símbolo de n-relación y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \qquad (\heartsuit)$$

  (esto lo escribiremos en forma abreviada como $R^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \Rightarrow R^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a}))$); es decir, $\mathfrak{A} \models R[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models R[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

- ❋ Si $g \in \mathcal{F}$ es un símbolo de n-función y $\vec{a} \in A^n$,

$$f(g^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = g^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})).$$

Decimos entonces que f *es un homomorfismo* y escribimos $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. En pocas palabras, un homomorfismo entre dos $\mathcal{L}$-estructuras es una aplicación que «respeta» los símbolos del lenguaje en una dirección. En lo sucesivo abusaremo de la notación en el siguiente sentido. Si $f : A \longrightarrow B$, y $a_1, \ldots, a_l \in A$, escribimos $f(\vec{a})$ en lugar de $f(a_1), \ldots, f(a_l)$.

La aplicación f es un encaje si es un homomorfismo inyectivo. Suponga que f es un homomorfismo tal que para todo $R \in \mathcal{R}$ símbolo de n-relación y cualesquier $\vec{a} \in A^n$

$$R^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})), \qquad (\maltese)$$

esto es,

$$\mathfrak{A} \models R[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models R[f(\vec{a})]$$

A tal aplicación la llamamos *homomorfismo fuerte*. Note la importante diferencia entre ($\maltese$) y ($\heartsuit$): en la primera se pide si y sólo si.

Un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un homomorfismo fuerte biyectivo, y si existe tal isomorfismo f decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas, lo que se denota $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Si $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ es un homomorfismo, f se llama *endomorfismo* de $\mathfrak{A}$. Si $g : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ es un isomorfismo, se llama también *automorfismo* de $\mathfrak{A}$.

Antes de continuar con el estudio de morfismos entre estructuras, vale la pena detenerse en la noción de subestructura.

Definición 6.3.1. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras con $A \subseteq B$. Supongamos que la inclusión $i : A \longrightarrow B$ es un encaje. En este caso decimos que $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$ o que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$; en símbolos,

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}.$$

Observe que, puesto que i es un encaje, $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$, por definición de homomorfismo, para cada $c \in \mathcal{C}$. Además, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ y $g^{\mathfrak{A}} = g^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$ para cada $R \in \mathcal{R}$ y $g \in \mathcal{F}$. Por consiguiente, $\mathfrak{A}$ es subestructura de $\mathfrak{B}$ si A contiene la interpretación $c^{\mathfrak{B}}$ de cada $c \in \mathcal{C}$ (y $c^{\mathfrak{A}} = c^{B}$), $\mathfrak{A}$ interpreta cada $R \in \mathcal{R}$ como la intersección de $R^{\mathfrak{B}}$ con A^n, donde R es un símbolo de n-relación, y si $g \in \mathcal{F}$ es un símbolo de n-función, $\mathfrak{A}$ interpreta g como la restricción de $g^{\mathfrak{B}}$ a A^n. En consecuencia, un subconjunto $X \subseteq B$ arbitrario no necesariamente es el universo de una subestructura. En este orden de ideas, el siguiente criterio es de suma importancia, pues nos indica exactamente cuándo un subconjunto del universo es el universo de una subestructura. De paso, exhibe cómo construir una subestrutura que contenga a un subconjunto arbitrario dado, según se mostrará después .

Lema 6.3.2. *Sea $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $X \subseteq B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es el universo de alguna subestructura $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{B}$.*
2. *Para cada $c \in \mathcal{C}$, ocurre $c^{\mathfrak{B}} \in X$, para todo $n > 0$, para cualquier símbolo $g \in \mathcal{F}$ de n-función y toda n-ada $\vec{a} \in X^n$, $g^{\mathfrak{B}}(\vec{a}) \in X$.*

Si (1) y (2) se cumplen, $\mathfrak{A}$ es única.

Demostración. Primero supongamos que (1) se cumple. Apelamos a la definición de subestructura, que garantiza lo siguiente; para todo $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$, y como $c^{\mathfrak{A}} \in A = X$, $c^{\mathfrak{B}} \in X$. En forma similar, para cada símbolo de n-función $g \in \mathcal{F}$ y cualesquier $\vec{a} \in X^n$, $\vec{a} \in A^n$, $g^{\mathfrak{B}}(\vec{a}) = g^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \in A = X$, lo que demuestra (2).

Si se cumplen las condiciones en (2), podemos definir una subestructura $\mathfrak{A}$ haciendo $A = X$; en tal caso, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ para cada $c \in \mathcal{C}$, $g^{\mathfrak{A}} = g^{\mathfrak{B}} \restriction X^n$ si g es un símbolo de n-función de $\mathcal{L}$. Resta interpretar en $\mathfrak{A}$ los símbolos de relación: para cada símbolo de n-relación $R \in \mathcal{R}$, hacemos $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap X^n$.

Se sigue que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. De hecho, ésta es necesariamente la única definición de $\mathfrak{A}$ que da lugar a $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $A = X$; la misma definición obliga a que la estructura sea única, es decir, si suponemos que hay otra que satisface la definición, concluimos que las interpretaciones son las mismas (con el mismo dominio X), y lo único que distingue a dos $\mathcal{L}$-estructuras es el dominio o la interpretación de los símbolos no lógicos. ◻

Sea $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $Y \subseteq B$. Puesto que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, existe al menos una subestructura $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, cuyo dominio contiene a Y. No obstante, esta subestructura es la más grande posible respecto a $\subseteq$. La pregunta es si ésta es la única posibilidad de obtener una subestructura de $\mathfrak{B}$ que contenga a Y. En caulquier caso, dado que existe al menos una, podemos tomar la intersección de todas las subestructuras de $\mathfrak{B}$ que contienen a Y en su dominio. Llamamos a esta $\mathfrak{A}$ la subestructura de $\mathfrak{B}$ generada por Y o la cerradura de Y en $\mathfrak{B}$; en símbolos,

$$\mathfrak{A} = \langle Y \rangle_{\mathfrak{B}}.$$

$\mathfrak{A}$ es la menor subestructura de $\mathfrak{B}$ con $Y \subseteq A$, y el conjunto Y es una familia de generadores para $\mathfrak{A}$. Una estructura $\mathfrak{A}$ es finito generada si $\mathfrak{A} = \langle Y \rangle_{\mathfrak{A}}$ para Y finito. Si no hay

peligro de ambigüedad, podemos escribir $\langle Y\rangle$ prescindiendo del subíndice. El lema 6.3.2 nos da indicaciones de, dado el subconjunto $Y \subseteq B$, que debemos añadirle para que al crecer (en caso de ser necesario) se convierta en el universo de una suebstructura.

Es importante estimar la cardinalidad de $\langle Y\rangle_{\mathfrak{B}}$, lo que se logra a continuación. Recuerde que la cardinalidad del lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ es

$$|\boldsymbol{\mathcal{L}}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{F}| + |\mathcal{R}| + \aleph_0.$$

Esto es, por lo pronto consideraremos que la cardinalidad del lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es infinita, aunque sólo contenga una cantidad finita de símbolos no lógicos.

Vale la pena motivar este resultado con un ejemplo concreto, para lo que recurrimos a la teoría de módulos.

Ejemplo 6.3.3. Recuerde que un lenguaje apropiado para la teoría de módulo consiste en un símbolo de constante 0, un símbolo de 2-función $+$ y un conjunto $\{f_r : r \in R\}$ de símbolos de 1-función, uno para cada elemento del anillo R. Casi siempre trataremos con R-módulos con 1, por lo que distinguimos un símbolo de 1-función 1. Sean M un R-módulo izquierdo e infinito y $N_1, \ldots, N_n$ submódulos de M.

1. La suma de $N_1, \ldots, N_n$ es el conjunto de sumas finitas de elementos de los conjuntos N_i, esto es, el conjunto $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n : a_i \in N_i, i \leq n\}$. Denotamos esta suma como $N_1 + \cdots + N_n$.

2. Para cualquier subconjunto A de M, sea

$$RA = \{r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m : r_1, \ldots, r_m \in R, a_1, \ldots, a_m \in A, m \in \mathbb{Z}^+\},$$

   donde, por convención, $RA = \{0\}$ si $A = \varnothing$. Si A es el conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ escribimos $Ra_1 + \cdots + Ra_n$ para RA. Así, RA es el submódulo de M generado por A; es decir, $N = \langle A\rangle$. Si N es un submódulo de M (posiblemente $N = M$) y $N = RA$ para algún subconjunto A de M, entonces A se llama conjunto de generadores para N y decimos que N está generado por A. En consecuencia, $|N| = |R| \cdot |A| = |\boldsymbol{\mathcal{L}}| \cdot |A| = |\boldsymbol{\mathcal{L}}| + |A|$. Esta estimación es importante para el siguiente lema.

3. Un submódulo N de M (posiblemente $N = M$) es finito generado si existe un subconjunto finito $A \subseteq M$ tal que $N = RA$ esto es, si N está generado por algún subconjunto finito. Observe que en este caso, aunque A sea finito, el submódulo generado no necesariamente es finito.

4. Un submódulo N de M (posiblemente $N = M$) es cíclico si existe un elemento

$a \in M$ tal que $N = Ra$, esto es, si N está generado por un elemento

$$N = Ra = \langle a \rangle = \{ra : r \in R\}.$$

En todos los casos, es importante notar cuál es el tamaño del submódulo generado, y que la subestructura generada en este contexto es el submodódulo generado correspondiente.

Lema 6.3.4. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje infinito, $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $Y \subseteq B$. Entonces*

$$|\langle Y \rangle| \leq |Y| + |\mathcal{L}|.$$

Demostración. Lo mejor que podemos hacer es construir explícitamente $\langle Y \rangle$, con lo que de paso se demuestra su existencia. Definimos los conjuntos $Y_m \subseteq \mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{N}$ por recursión,

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y \cup \{c^{\mathfrak{B}} : c \in \mathcal{C}\} \\ Y_{m+1} &= Y_m \cup \{g^{\mathfrak{B}}(\vec{a}) : g \in \mathcal{F}, \vec{a} \in Y_m\} \\ X &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m, \end{aligned}$$

(aquí $\vec{a}$ denota una n-ada de longitud adecuada para aplicar $g \in \mathcal{F}$).

En la primera etapa hemos añadido la interpretación de los símbolos de constante en $\mathfrak{B}$ a Y. En las subsecuentes, «cerramos» los conjuntos que se van creando respecto a funciones en el lenguaje. Es claro que X satisface la condición (2) del lema 6.3.2, por lo que existe una única subestructura $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ con $X = A$.

Afirmación 1. $\mathfrak{A}$ es la mínima (respecto a la contención) subestructura de $\mathfrak{B}$ que contiene a Y.

Demostración de la afirmación 1. Si $\mathfrak{A}'$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ tal que $Y \subseteq A'$, por inducción en m probamos que $Y_m \subseteq A'$. En efecto, si $m = 0$, sabemos que $Y \subseteq A'$ por hipótesis y como $\mathfrak{A}'$ es subestructura de $\mathfrak{B}$ contiene a las interpretaciones de los símbolos de constante de $\mathcal{L}$, de donde se desprende que $Y_0 \subseteq A'$. Ahora suponga que $Y_m \subseteq A'$ y confirmemos que $Y_{m+1} \subseteq A'$. Sea $z \in Y_{m+1}$; si $z \in Y_m$, por hipótesis de inducción $z \in A'$. En cambio, si $z = g^{\mathfrak{B}}(\vec{a})$ para algún símbolo de l-función $g \in \mathcal{L}$ y una l-ada $\vec{a}$ de elementos en $Y_m \subseteq A'$, entonces $z \in A'$ porque $\mathfrak{A}'$ es subestructura de $\mathfrak{B}$, es cerrada respecto a aplicación de funciones de $\mathcal{L}$ a elementos suyos. (1)

Por lo tanto, $\mathfrak{A}$ es la menor subestructura de $\mathfrak{B}$ cuyo universo contiene a Y,

$$\mathfrak{A} = \langle Y \rangle$$

Resta estimar la cardinalidad de $\mathfrak{A}$. Sea $\kappa = |Y| + |\mathcal{L}|$. Es claro que $|Y_0| \leq \kappa$.

Hagamos una observación que nos ayude a estimar las cardinalidades. Para cada n fijo, si $Z \subseteq B$ y $|Z| \leq \kappa$, $H = \{g^B(\vec{a}) : g \in \mathcal{F}, \vec{a} \in Z^n\}$ tiene cardinalidad a lo sumo

$\kappa \cdot \kappa^n = \kappa$, porque κ es infinito. En efecto, en H aparecen imágens de funciones del lenguaje aplicadas a elementos de Z. La tarea es calcular cuántas de estas imágenes tenemos a lo sumo. Primero, requerimos saber cuántas n-adas tenemos, esto para cada $n < \omega$. Esto es tanto como estimar cuántos subconjuntos finitos de Z existen, que es precisamente $|\,[Z]^{<\omega}\,|$ que como sabemos es igual a $|Z|$ para Z infinito. Lo siguiente es establecer cuántos símbolos de función podemos aplicar, lo que está acotado por la cardinalidad del lenguaje, es decir $|\mathcal{F}| \leq |\boldsymbol{\mathcal{L}}|$. Así,

$$|H| \leq |\,[Z]^{<\omega}\,| \cdot |\boldsymbol{\mathcal{L}}| = |\,[Z]^{<\omega}\,| + |\boldsymbol{\mathcal{L}}| \leq \kappa + \kappa = \kappa.$$

Como $|Y_m| \leq \kappa$, se sigue que $|Y_{m+1}| \leq \kappa + \kappa = \kappa$, tomando Z como Y_m en la observación previa. Por inducción en m, cada $|Y_m| \leq \kappa$, así que $|X| \leq \omega \cdot \kappa = \kappa$, ya que tenemos ω etapas. Puesto que por definición $|\langle Y \rangle| = |X|$, esto demuestra el lema. ❐

Lema 6.3.5. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.*

1. *Si f es un homomorfismo, entonces para todo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-término $t(\vec{x})$ y cualesquier $\vec{a} \in A^n$ se cumple $f(t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = t^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a}))$.*

2. *f es un homomorfismo si y sólo si para toda fórmula atómica $\varphi(\vec{x})$ y cada $\vec{a} \in A^n$,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})]. \tag{✣}$$

3. *f es un encaje fuerte (es decir, homorfismo fuerte inyectivo) si y sólo si para toda fórmula sin cuantificadores $\varphi(\vec{x})$ y cualesquier $\vec{a} \in A^n$,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})]. \tag{✦}$$

Si en 2 pedimos que f es un homomorfismo fuerte, entonces en (✣) se cumple también la implicación $\Leftarrow$.

Demostración. 1. Se prueba por inducción en la construcción de t. Primero suponga que $t = x_i$ es una variable. Se sigue que $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l) = a_i$ para alguna $i \leq l$, por lo que $f(t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = f(a_i)$. Por otro lado, $t^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})) = (f(a_1), \ldots, f(a_l)) = f(a_i)$, lo que comprueba la afirmación en este caso.

Si $t = c \in \mathcal{C}$, obtenemos $t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = c^{\mathfrak{A}}$, así que $f(t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = c^{\mathfrak{B}}$ porque f es un homomorfismo; además, $t^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})) = c^{\mathfrak{B}}$.

Finalmente sea $t = h(t_1, \ldots, t_n)$, donde $h \in \mathcal{F}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos. Suponemos

cierta la afirmación para los t_i ($i \leq n$). Observe que

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) =& h^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \\ \Rightarrow f(t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) =& f(h^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \\ =& h^{\mathfrak{B}}(f(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \ldots, f(t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \quad \text{porque } f \text{ es un homomorfismo} \\ =& h^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})), \ldots, t_n^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a}))) \quad \text{por hipótesis de inducción} \\ =& t^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})). \end{aligned}$$

2. Primero suponga que f es un homomorfismo. Sea $\varphi(\vec{x}) \equiv R(\vec{x})$ atómica. Por definición de homomorfismo y (1),

$$\mathfrak{A} \models R[t(\vec{a})] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models R[f(t(\vec{a}))].$$

Para la recíproca, supongamos que (✣) se cumple para toda fórmula atómica $\varphi(\vec{x})$ y cualesquier $\vec{a} \in A^n$. Debemos cerciorarnos de que f sea un homomorfismo, para lo que debemos elegir juiciosamente una $\mathcal{L}$-fórmula atómica φ a quien aplicar (✣). Sea $c \in \mathcal{C}$ y tome $\varphi(x) \equiv x = c$. Entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[c^{\mathfrak{A}}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[f(c^{\mathfrak{A}})],$$

es decir, $\mathfrak{B} \models f(c^{\mathfrak{A}}) = c$, por lo que $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Sean $g \in \mathcal{F}$ un símbolo de n-función y $\varphi(x, \vec{y}) \equiv x = g(\vec{y})$. Si $b \in A, \vec{a} \in A^n$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[b, \vec{a}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[f(b), f(\vec{a})];$$

es decir, si $b = g(\vec{a})$ en $\mathfrak{A}$ (tal b siempre existe), $f(b) = f(g^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = g^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a}))$, en $\mathfrak{B}$, lo que queríamos demostrar.

Si $R \in \mathcal{R}$ es un símbolo de n-relación y $\vec{a} \in A^n$,

$$\mathfrak{A} \models R[\vec{a}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models R[f(\vec{a})],$$

esto es, $\vec{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ implica $f(\vec{a}) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Por lo tanto, f es un homomorfismo. Si f es fuerte y $\mathfrak{B} \models R[f(\vec{a})]$, $\mathfrak{A} \models R[\vec{a}]$, por definición de homomorfismo fuerte.

3. Supongamos que f es un encaje fuerte y probemos (✯) por inducción en la construcción de φ.

Si φ es atómico, obtenemos el resultado de (2) (para el caso en que f es un homomorfismo fuerte).

Suponga cierta la afirmación para ψ (ψ sin cuantificadores) y suponga también que

$\varphi(\vec{x}) \equiv \neg\psi(\vec{x})$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[f(\vec{a})]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi[f(\vec{a})]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})]\end{aligned}$$

El caso $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ es más sencillo.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \wedge \varphi_2[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1[f(\vec{a})] \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} \models \varphi_2[f(\vec{a})]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1[f(\vec{a})] \wedge \varphi_2[f(\vec{a})]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].\end{aligned}$$

Ahora suponga que se cumple (✦). Por (2), f es un homomorfismo fuerte. Resta confirmar que f es inyectiva. Sean $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$; esta vez escogemos la $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x,y) \equiv x = y$. Entonces $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[a_1, a_2]$, por lo que $\mathfrak{B} \not\models \varphi[f(a_1), f(a_2)]$, es decir, $f(a_1) \neq f(a_2)$.

□

Ejemplo 6.3.6. Sean $\mathfrak{B} = \langle(0,\infty), <, \times, 1\rangle$, $\mathfrak{A} = \langle\mathbb{R}, <, +, 0\rangle$ y $f : A \longrightarrow B$ dada por $f(r) = 2^r$. Entonces f es un isomorfismo ya que

$$\begin{aligned}r < s \quad &\Leftrightarrow \quad f(r) < f(s)\\ f(r+s) &= f(r) \cdot f(s)\\ f(0) &= 1.\end{aligned}$$

Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras y que $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ es un encaje. Lo que le falta a f para ser un isomorfismo es ser sobre. No podemos «modificar» f para convertirla en sobre pues podríamos perder su condición de ser función, a menos que «agrandemos» el dominio de f. En efecto, esto es posible como lo corrobora nuestro siguiente resultado.

Lema 6.3.7. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$. Entonces existen una $\mathcal{L}$-estructura $\overline{\mathfrak{A}}$ y un isomorfismo $\overline{f} : \overline{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tales que $\overline{f}$ extiende a f y $\mathfrak{A} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}$.*

Demostración. No perdemos nada si suponemos que $A \cap B = \varnothing$. Sea $\overline{A} = A \cup (B - f[A])$;

debemos convertir $\overline{\mathfrak{A}}$ en una $\mathcal{L}$-estructura. Con los símbolos de constante no tenemos problema pues si $c \in \mathcal{C}$, $c^{\overline{\mathfrak{A}}} = c^{\mathfrak{A}}$.

Si $g \in \mathcal{F}$ es un símbolo de n-función y $\vec{a} = a_1, \ldots, a_n \in \overline{A}$, necesitamos especificar $g^{\overline{\mathfrak{A}}}(\vec{a})$. Definamos la siguiente sucesión:

$$b_i = \begin{cases} f(a_i), & \text{si } a_i \in A \\ a_i, & \text{si } a_i \in \overline{A} - A_i, \end{cases}$$

que denotamos como $\vec{b}$. Entonces

$$g^{\overline{\mathfrak{A}}}(\vec{a}) = \begin{cases} g^{\mathfrak{B}}(\vec{b}), & \text{si } g^{\mathfrak{B}}(\vec{b}) \notin f[A] \\ f^{-1}(g^{\mathfrak{B}}(\vec{b})), & \text{si } g^{\mathfrak{B}}(\vec{b}) \in f[A]. \end{cases}$$

Si R es un símbolo de n-relación, imponemos

$$R^{\overline{\mathfrak{A}}}(\vec{a}) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\vec{b}).$$

Se comprueba que $\overline{f} = f \cup id_{\overline{A}-A}$ es un isomorfismo de $\overline{\mathfrak{A}}$ sobre $\mathfrak{B}$ y que $\mathfrak{A} \subseteq \overline{A}$. ❐

La noción de equivalencia elemental es central en la teoría de modelos y pasará a formar parte de nuestro acervo de conceptos imprescindibles.

Definición 6.3.8. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Decimos que $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$, en símbolos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si para cualquier $\mathcal{L}$-enunciado φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Así, dos estructuras elementalmente equivalentes reconocen la validez de enunciados exactamente en la misma forma, entre ellas los enunciados son indistinguibles. Nuestra primera tarea será mostrar que estructuras isomorfas son elementalmente equivalentes.

Definición 6.3.9. Para cualesquier $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, y toda función $f : A \longrightarrow B$ definimos las siguientes nociones.

1. f respeta un término t si para cualesquier $\vec{a} \in A$

$$f(t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) = t^{\mathfrak{B}}[f(\vec{a})].$$

2. f respeta una fórmula φ si para cualesquier $\vec{a} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].$$

Ejemplo 6.3.10. Con la notación del ejemplo 6.3.6, si t es el $\mathcal{L}$-término $x * (y * c)$ y a, b son cualesquiera elementos en A,

$$\begin{aligned} f(t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) =& f(t^{\mathfrak{A}}[x] + (t^{\mathfrak{A}}[y] + 0)) \\ =& f(a) \times (f(b) \times f(0)) \\ =& t^{\mathfrak{B}}[f(a), f(b)], \end{aligned}$$

por lo que f respeta el término t.

Si $\varphi \equiv \exists z(x * z = y)$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[a,b] \Leftrightarrow & \text{ para algún } r \in \mathbb{R} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[a,b,r] \\ \Leftrightarrow & \text{ para algún } r \in \mathbb{R} \quad a + r = b \\ \Leftrightarrow & \text{ para algún } r \in \mathbb{R} \quad f(a) \times f(r) \times s = f(b) \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{B} \models \varphi[f(a), f(b)], \end{aligned}$$

así que f respeta la fórmula φ.

Es claro que este ejemplo es un caso particular del siguiente lema.

Lema 6.3.11. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras y $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un isomorfismo, lo que se acostumbra denotar como $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Entonces f respeta $\mathcal{L}$-términos y $\mathcal{L}$-fórmulas.*

Demostración. Procedemos por inducción en la construcción de términos y fórmulas. Comenzamos con términos. Propiamente esto es una repetición de las pruebas del lema 6.3.5, pero bueno.

☆ Si $t = x$ y $a \in A$, entonces

$$f(t^{\mathfrak{A}}[x]) = f(a) = t^{\mathfrak{B}}[x].$$

☆ Si $t = c$,

$$f(t^{\mathfrak{A}}[c]) = f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}[c].$$

☆ Si $t = h(t_1, \ldots, t_n)$,

$$\begin{aligned} f(t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) =& f(h^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \\ =& h^{\mathfrak{B}}(f(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]), \ldots, f(t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{a}])) \quad (f \text{ es un isomorfismo}) \\ =& h^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[f(\vec{a})], \ldots, t_n^{\mathfrak{B}}[f(\vec{a})]) \quad (\text{hipótesis de inducción}) \\ =& t^{\mathfrak{B}}[f(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Volteamos hacia las fórmulas:

✪ Si $\varphi \equiv R(\vec{t})$ (R puede ser $=$),

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(\vec{t}^{\mathfrak{A}}[\vec{a}]) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(f(\vec{t}^{\mathfrak{A}}[\vec{a}])) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\vec{t}^{\mathfrak{B}}[f(\vec{a})]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].\end{aligned}$$

✪ Si $\varphi \equiv \neg\psi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[f(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].\end{aligned}$$

✪ Si $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1[f(\vec{a})] \text{ y } \mathfrak{B} \models \varphi_2[f(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].\end{aligned}$$

✪ Si $\varphi \equiv \exists x\psi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A, \mathfrak{A} \models \psi[a, \vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A, \mathfrak{B} \models \psi[f(a), f(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \text{para alguna } b \in B, \mathfrak{B} \models \psi[b, f(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})].\end{aligned}$$

La tercera equivalencia es una consecuencia de que f sea sobre.

□

Teorema 6.3.12. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$; por el lema 6.3.11, si φ es un $\mathcal{L}$-enunciado,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi &\Leftrightarrow \text{para cualesquier} \vec{a}, \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \text{para cualesquier } \vec{a}, \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.\end{aligned}$$

□

Si la conversa se cumple, las estructuras son finitas.

La pregunta inmediata y natural es si el recíproco del teorema 6.3.12 se cumple. La respuesta es, en general, no. Antes de que otra cosa pase, notemos que para que dos estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sean isomorfas se requiere una biyección entre ellas.

Lema 6.3.13. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras isomorfas. Entonces*

$$|A| = |B|.$$

□

Después veremos que en cualquier lenguaje $\mathcal{L}$ existen estructuras infinitas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementalmente equivalentes de distinta cardinalidad, por lo que no pueden ser isomorfas.

Ejemplo 6.3.14. Si $\mathfrak{H} = \langle H, *, ^{-1}, e\rangle$ es un grupo con el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, *, ^{-1}\}$, entonces $\mathfrak{G}$ es subestructura de $\mathfrak{H}$ si y sólo si $\mathfrak{G}$ es subgrupo de $\mathfrak{H}$ en el sentido algebraico usual, ya que contiene la identidad y es cerrado respecto a la operación de grupo y la de inversos. Aquí es donde aparece la diferencia entre trabajar con el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, *, ^{-1}\}$ y con $\mathcal{L}' = \{e, *\}$. Una $\mathcal{L}'$-subestructura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{H}$ no es necesariamente un subgrupo, pues no podemos asegurar la existencia de inversos en $\mathfrak{B}$. La existencia de inversos se expresa en $\mathcal{L}'$ como

$$\forall x \exists y [x * y = e = y * x].$$

Por ejemplo, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, +, 0\rangle \subseteq \mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ en $\mathcal{L}'$, pero es claro que $\mathfrak{B}$ no es subgrupo de $\mathfrak{Z}$.

Ejemplo 6.3.15. El subconjunto $\{30, 42\} \subseteq \mathbb{Z}$ genera la subestructura $\langle \{6n : n \in \mathbb{Z}\}, +, -, 0\}$ de $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0\rangle$.

Definición 6.3.16. Sea ψ una $\mathcal{L}$- fórmula y suponga que la podemos representar como

$$Q_1 y_1 \cdots Q_n y_n \theta,$$

donde θ no tiene cuantificadores y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, es decir, ψ está en forma normal prenexa (FNP). Decimos que ψ es universal si $Q_i = \forall$ para todo $i \leq n$. La fórmula ψ es existencial si $Q_i = \exists$ para todo $i \leq n$.

Una fórmula φ es lógicamente universal (existencial) si para alguna fórmula universal (existencial) ψ se cumple

$$\models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Definición 6.3.17. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Decimos que φ se preserva hacia arriba si para cualesquier $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y cualesquier $\vec{a} \in A$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].$$

Decimos que φ se preserva hacia abajo si con las mismas hipótesis,

$$\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}].$$

Proposición 6.3.18. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y φ una $\mathcal{L}$-fórmula.*

1. *Si φ es lógicamente existencial, entonces φ se preserva hacia arriba.*
2. *Si φ es lógicamente universal, entonces φ se preserva hacia abajo.*

Demostración. 1. Suponga que φ es lógicamente existencial, digamos

$$\models \varphi \leftrightarrow \exists \vec{x}\theta,$$

donde θ no tiene cuantificadores; fijamos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\vec{b} \in A$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \exists \vec{x}\theta \\
\Leftrightarrow & \text{ existen } \vec{a} \in A^n, \mathfrak{A} \models \theta[\vec{b}, \vec{a}] \\
\Leftrightarrow & \text{ existen } \vec{a} \in A^n, \mathfrak{B} \models \theta[\vec{b}, \vec{a}] \\
& \text{(porque } \theta \text{ no tiene cuantificadores y } \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}) \\
\Rightarrow & \text{ existe } \vec{a} \in B^n, \mathfrak{B} \models \theta[\vec{b}, \vec{a}] \\
\Leftrightarrow & \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}].
\end{aligned}$$

Se desprende que φ se preserva hacia arriba.

2. Supongamos que φ es lógicamente universal, digamos

$$\models \varphi \leftrightarrow \forall \vec{x}\mu.$$

Fijemos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\vec{b} \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \Leftrightarrow & \mathfrak{B} \models \forall \vec{x}\mu[\vec{b}, \vec{a}] \\
\Leftrightarrow & \text{ para cualesquier } \vec{a} \in B^n, \mathfrak{B} \models \mu[\vec{b}, \vec{a}] \\
\Rightarrow & \text{ para cualesquier } \vec{a} \in A^n, \mathfrak{B} \models \mu[\alpha^{\vec{x}/\vec{a}}] \\
\Leftrightarrow & \text{ para cualesquier } \vec{a} \in A^n, \mathfrak{A} \models \mu[\vec{b}, \vec{a}] \\
\Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \forall \vec{x}\mu[\vec{b}] \\
\Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}].
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.19. Observemos atentamente los axiomas de la teoría de grupos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, *, ^{-1}\}$, que son

$$\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z)$$
$$\forall x (x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e)$$
$$\forall x (x * e = x \wedge e * x = x).$$

Todos ellos son universales, por lo que se preservan hacia abajo; esto significa, como ya lo habíamos anticipado, que una subestructura en este lenguaje es un subgrupo.

Si $f : A \longrightarrow B$, donde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que f respeta fórmulas sin cuantificadores si

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})]$$

para toda $\mathcal{L}$-fórmula sin cuantificadores.

Proposición 6.3.20. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras y $f : A \longrightarrow B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es un encaje fuerte.*
2. *f respeta fórmulas sin cuantificadores.*
3. *Para alguna única subestructura $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}$, $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.*

Demostración. (2)⇒(1) Lema 6.3.5(3).

(3)⇒(2) Se sigue de las siguientes equivalencias para fórmulas sin cuantificadores φ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[f(\vec{a})]$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})],$$

que se obtienen de la proposición 6.3.18 (podemos suponer que φ es existencial/universal pues no tiene cuantificadores) y de la noción de subestructura.

(1)⇒(3) Sea $A' = f[A]$. Dado que para cada símbolo h de k-función se cumple

$$h^{\mathfrak{B}}(f(\vec{a})) = f(h^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in A',$$

$\mathfrak{A}'$ es cerrada respecto a $h^{\mathfrak{B}}$ y $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \in A'$ ya que f es un encaje, por lo que es el universo de una única subestructura $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{B}$. Es fácil comprobar que $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.

Hemos visto la noción de subestructura, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, y el hecho de que si $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un homomorfismo fuerte, f preserva las fórmulas sin cuantificadores. Considere los siguientes ejemplos. Primero tomamos el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$, respecto a él ocurre que

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Respecto a $\mathcal{L}' = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ se cumple que

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Por tanto, respecto a $\mathcal{L}$ y considerando la identidad, se preservan las fórmulas sin cuantificadores entre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, cuando los parámetros están en el menor, digamos en $\mathbb{Q}$, o en $\mathbb{R}$ cuando la transferencia se piensa entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Algo correspondiente sucede respecto a $\mathcal{L}'$ entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

En cambio,

$$\mathbb{C} \models \exists z(z^2 + 1 = 0)$$

lo que no se cumple en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$. La fórmula a la derecha sí tiene cuantificadores. Por ejemplo,

$$\mathbb{C} \models \exists z(z \cdot z = 2)$$

lo que también ocurre en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$. Esta fórmula también tiene cuantificadores y ambas carecen de parámetros. Por tanto, ser subestructura no es suficientemente fuerte para transferir todas las fórmulas. Requerimos una noción más fuerte que la de subestructura para lograrlo. Ésta y otras figuras dan lugar al concepto de subestructura elemental.

Definición 6.3.21. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ o que $\mathfrak{B}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$, en símbolos,

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$$

si

1. $A \subseteq B$.
2. Para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula φ y cualesquier elementos $\vec{a} \in A$ ocurre que,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].$$

En lo sucesivo, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ significa $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

Proposición 6.3.22. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras con $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la definición 6.3.21 y de la de equivalencia elemental. ∎

Ejemplo 6.3.23. Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, \leq \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Es claro que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y, de hecho, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, así que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Sin embargo, $\mathfrak{A}$ no es subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ pues

$$\mathfrak{A} \models \forall y(x \leq y)[1],$$

pero

$$\mathfrak{B} \not\models \forall y(x \leq y)[1]$$

pues 1 tiene la propiedad de ser el menor en $\mathfrak{A}$ pero no en $\mathfrak{B}$.

Después veremos ejemplos importantes de subestructuras elementales.

Definición 6.3.24. Dada una extensión de campos L/K, decimos que K es cerrado algebraicamente relativo a L si cada $x \in L$ que satisface un polinomio mónico $f(x)$, es decir $f(x) = 0$, con $f \in K[X]$, pertenece a K.

Proposición 6.3.25. *Si K es subcampo de L y L es una extensión elemental de K, K es cerrado algebraicamente relativo a L.*

Demostración. Si $x \in L$ es algebraico sobre K, sea

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + x^n \in K[X]$$

un polinomio mónico de x en $K[X]$.

Si $L \models \exists x(f(x) = 0)$, como $K \prec L$, $K \models \exists z(f(z) = 0)$.

Si $z \neq x$, f se puede reducir, lo que contradice el que el polinomio sea mínimo. Así que $z = x$. □

El siguiente es el criterio más socorrido para dilucidar si $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$.

Teorema 6.3.26 (Criterio de Tarski-Vaught)**.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras con $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Si para toda fórmula ψ y cualesquier $\vec{a} \in A$,*

$$\mathfrak{B} \models \exists x \psi[\vec{a}] \quad \Leftrightarrow \quad \text{para alguna } a \in A, \mathfrak{B} \models \psi[a, \vec{a}], \tag{$*$}$$

entonces $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Demostración. Probaremos, usando (∗), que para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ,

$$\text{para cualesquier } \vec{a} \in A \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].$$

Procedemos por inducción en la construcción de φ.

✱ Para φ atómica se sigue de que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

✱ Si $\varphi \equiv \neg\varphi_1$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi_1[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \varphi_1[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi_1[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].\end{aligned}$$

✱ Si $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_1[\vec{a}] \wedge \varphi_2[\vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].\end{aligned}$$

✱ Si $\varphi \equiv \exists x\psi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A, \mathfrak{A} \models \psi[a, \vec{a}]\\ &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A, \mathfrak{B} \models \psi[a, \vec{a}] \text{ (por hipótesis de inducción)}\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}] \text{ (por (}\divideontimes\text{)).}\end{aligned}$$

□

Con este criterio podemos avocarnos a una variante de los teoremas de Löwenheim-Skolem.

Teorema 6.3.27. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $X \subseteq B$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq A$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $|\mathfrak{A}| \leq |X| + |\mathcal{L}|$.*

Demostración. Ya vimos cómo obtener una subestructura de $\mathfrak{B}$ que contenga a X, la subestructura generada por X en $\mathfrak{B}$: $\langle X\rangle_{\mathfrak{B}}$, aunque ésta no es necesariamente elemental. Usaremos el criterio de Tarski-Vaught para expandir $\langle X\rangle_{\mathfrak{B}}$ y convertirla en subestructura elemental $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{B}$; requerimos que atrape todas los testigos de fórmulas de la forma $\exists x\psi(x, \vec{y})$, donde $\vec{y}$ son elementos de $\mathfrak{A}$.

A cada fórmula ψ y cada variable y asociamos una función (llamada función de Skolem) $F_{\psi,\vec{x}}$ como a continuación se detalla. Sean $x_1, \ldots, x_n$ las variables libres de $\exists y\psi$. Entonces $F_{\psi,\vec{x}} : B^n \longrightarrow B$ es tal que para cualesquier $b_1, \ldots, b_k \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \exists y\psi[\vec{b}] \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}, F_{\psi,\vec{x}}(\vec{b})]. \tag{$\ast$}$$

Si $\exists y\psi$ no tiene variables libres, $F_{\psi,\vec{x}}$ es una constante, un elemento de B. Para la definición de $F_{\psi,\vec{x}}$ requerimos un criterio para elegir algún testigo y, por ejemplo el

axioma de elección; suponga que B está bien ordenado por un nuevo símbolo de 2-relación $<$ y prescribimos que $F_{\psi,\vec{x}}(\vec{b})$ es el $<$-menor elemento de B, si es que existe (o un elemento arbitrario de B, en caso de no existir) tal que $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}, y]$.

Sean

$$\begin{aligned} A_0 =& \langle X \rangle_{\mathfrak{B}} \\ A_{n+1} =& A_n \cup \{F_{\psi,\vec{x}}(\vec{a}) : \psi \in Fml(\mathcal{L}), \vec{x} \in Var, \vec{a} \in A_n^k\} \\ A =& \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Se comprueba por inducción en i que cada A_i tiene cardinalidad $\leq |X| + |\mathcal{L}|$, de donde se sigue que $|A| \leq |X| + |\mathcal{L}|$.

Afirmación 1. A es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$.

Primero nos ocupamos de mostrar que $\mathfrak{A}$ es subestructura de $\mathfrak{B}$. Para empezar la interpretación de los símbolos de constante están en A, pues $\langle X \rangle_{\mathfrak{B}} \subseteq A_0 \subseteq A$. Si bien $\langle X \rangle_{\mathfrak{B}}$ es cerrado respecto a símbolos de función, no queda claro que A también lo sea; sean f un símbolo de función con valencia n y $a_1, \ldots, a_n$ elementos de A. Debemos corroborar que $f(\vec{a}) \in A$. Con este fin, miramos a la fórmula $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists y(y = f(\vec{x}))$. Tenemos entonces una función de Skolem $F_{\psi,\vec{x}}$ y los elementos $a_1, \ldots, a_m$ debieron aparecer en alguna etapa de la construcción de A, digamos que ya están en A_m. Se sigue que $F_{\psi,\vec{x}}(\vec{a}) \in A_{m+1} \subseteq A$. Por consiguiente, A es cerrado respecto a funciones en $\mathcal{L}$.

Ahora verificamos que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, para lo que recurrimos al criterio de Tarski-Vaught. Corroboramos (✻) del teorema 6.3.26. Sea $\psi(y, \vec{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula y $\vec{a}$ elementos en A. Si $\mathfrak{B} \models \exists\, \psi(y, \vec{a})$, entonces, $\mathfrak{B} \models \psi[F_{\psi,\vec{x}}(\vec{a}), \vec{a}]$ y $F_{\psi,\vec{x}}(\vec{a}) \in A$ por construcción. La otra dirección es evidente. (1)

Se desprende que A es el universo de una subestructura elemental $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{B}$.

Corolario 6.3.28. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable y Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Si Γ tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo numerable.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ un modelo de Γ. Por el teorema 6.3.27, $\mathfrak{B}$ tiene una subestructura elemental $\mathfrak{A}$ numerable. Como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ.

Ahora podemos probar el teorema de Löwenheim-Skolem creciente.

Teorema 6.3.29 (Teorema de Löwenheim-Skolem)**.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad infinito κ (o finito y escogemos $\kappa = \aleph_0$) y Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados que tienen un modelo infinito. Entonces, Φ tiene modelos de cualquier cardinalidad $\mu \geq \kappa$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de Φ de cardinalidad infinita λ. Si $\lambda \geq \kappa$, por el teorema 6.3.27 podemos obtener una subestructura elemental $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$ de cardinalidad μ para cualquier $\kappa \leq \mu \leq \lambda$, considerando cualquier subconjunto $X \subseteq A$ con $|X| = \mu$; como

$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$, se deduce que $\mathfrak{C}$ es modelo de Γ. Esto es lo que se conoce como el teorema de Löwenheim-Skolem decreciente.

Ahora sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal infinito. Por lo recién dicho, podemos suponer que $\mu > \lambda$. Procedemos expaniendo el lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ a $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ mediante μ símbolos de constante nuevos $\{c_\alpha : \alpha < \mu\}$ y formando

$$\boldsymbol{T} = \Phi \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta < \mu\}.$$

Obtenemos un modelo $\mathfrak{B}$ de $\boldsymbol{T}$ que tiene tamaño $\geq \mu$. Si $|\mathfrak{B}| = \mu$, terminamos; en otro caso consideramos el nuevo lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$, tomamos un subconjunto $X \subseteq B$ de tamaño exactamente μ. Después, apelamos al teorema 6.3.27 para obtener una subestructura $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$ de tamaño a lo sumo μ que es modelo de $\boldsymbol{T}$, en particular de Φ. En tal caso, $\mathfrak{C}$ no puede tener cardinalidad $< \mu$, porque los enunciados de $\boldsymbol{T}$ se cumplen también en $\mathfrak{C}$. ❐

También existe otro criterio para discriminar cuando una subestructura de otra es elemental.

Lema 6.3.30. *Sea $\mathfrak{B}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-subestructua de $\mathfrak{A}$. Si para todo conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq B$ y cada $a \in A$ existe un automorfismo τ de $\mathfrak{A}$ con $\tau(a_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, m$ y $\tau(a) \in B$, entones $\mathfrak{B}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Debemos comprobar que para cualesquier $\vec{b} \in B$ y cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-fórmula $\varphi(\vec{v})$ se cumple

$$\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]. \tag{✿}$$

Para verificar esto, procedemos por inducción en la construcción de φ.

- Si $\varphi(\vec{v}) \equiv R(\vec{v})$ es atómica, ocurre que,

  $$\mathfrak{B} \models R[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models R[\vec{b}]$$

  por definición de subestructura.

- Los casos $\varphi(\vec{v}) \equiv \neg\psi(\vec{v})$ y $\varphi(\vec{v}) \equiv \psi_1(\vec{v}) \wedge \psi_2(\vec{v})$ se verifican faćilmente usado la hipótesis de inducción y el hecho e que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

- Consideremos el caso con cuantificadores, es decir, $\varphi(\vec{v}) \equiv \forall x \psi(x, \vec{v})$. Separamos la prueba de (✿) en dos casos.

  Caso 1. $\mathfrak{A} \models \forall x \psi[x, \vec{b}]$. Entonces, para cualquier $a \in A$ se cumple $\mathfrak{A} \models \psi[a, \vec{b}]$. Debemos cerciorarnos de que $\mathfrak{B} \models \forall x \psi[x, \vec{b}]$, para lo que tomamos una $b \in B \subseteq A$ arbitraria, entonces $\mathfrak{A} \models \psi[b, \vec{b}]$ y por hipótesis de inducción, $\mathfrak{B} \models \psi[b, \vec{b}]$, ya que todos los parámetros $b, \vec{b}$ viven en B.

  Ahora suponga que $\mathfrak{B} \models \forall x \psi(x, \vec{b}]$ y cerciorémonos de que $\mathfrak{A} \models \forall x \psi[x, \vec{b}]$. Supongamos que no es así, que existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \psi[a, \vec{b}]$, esto es, $\mathfrak{A} \models \neg\psi[a, \vec{b}]$.

Acudimos a nuestra hipótesis del lema, tenemos un automorfismo $\tau : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que $\tau(\vec{b}) = \vec{b}$ y $\tau(a) = b \in B$. Dado que τ es un automorfismo, ocurre que $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\tau(a), \vec{b}]$, es decir, $\mathfrak{A} \models \neg\psi[b, \vec{b}]$. Por hipótesis de inducción, dado que $b, \vec{b}$ viven en B, concluimos $\mathfrak{B} \models \neg\psi[b, \vec{b}]$, una contradicción.

Hemos probado (✿). □

Ejemplo 6.3.31. Sea $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, <, +, \times, 0, 1\rangle$ el campo ordenado de los reales. Entonces existe un submodelo elemental numerable $\mathfrak{A} = \langle A, <, +, \times, 0, 1\rangle$ (usamos $\Gamma = Teo(\mathfrak{R})$ en el corolario 6.3.28).

Es claro que $0, 1, 2, \ldots \in \mathfrak{A}$ y como $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y(x + y = 0)$, también $-1, -2, -3, \ldots$ pertenecen a A. Además, $\mathfrak{A}$ es cerrada respecto a cocientes, raíces n-ésimas, soluciones de ecuaciones algebraicas, así que A incluye a los números algebraicos.

El axioma del supremo para $\mathbb{R}$ asegura que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado tiene menor cota superior. Sabemos que cualquier orden lineal sin extremos que contenga a $\mathbb{Q}$ y satisfaga el axioma del supremo debe ser no numerable (pues es isomorfo a $\mathbb{R}$), así que $\mathfrak{A}$ no satisface el axioma del supremo. Por lo tanto, hemos demostrado que no existe un enunciado en el lenguaje $\mathcal{L} = \{<, +, \times, 0, 1\}$ que exprese el axioma del supremo.

Si $f : A \longrightarrow B$, donde $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras y ocurre que para cualesquier $\vec{a} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[f(\vec{a})]$$

para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\vec{x})$, decimos que f respeta fórmulas.

Proposición 6.3.32. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras y $f : A \longrightarrow B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

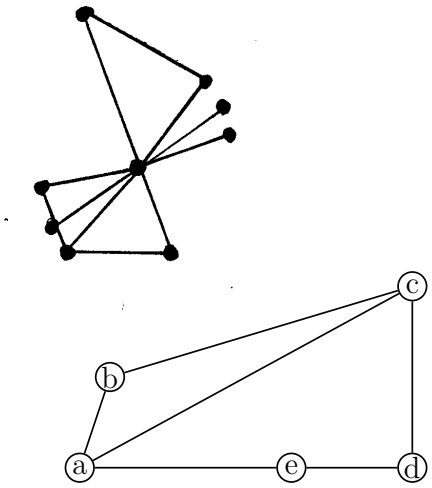
1. *f respeta fórmulas.*
2. *Existe una única subestructura elemental $\mathfrak{A}' \preceq \mathfrak{B}$ tal que $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.*

Demostración. Enteramente análoga a la demostración de la proposición 6.3.20, usando el teorema 6.3.26. La idea de la prueba es mostrar que $f[A]$ es el universo de una subestructura de $\mathfrak{B}$ y luego probar que esta subestructura es elemental, usando que f respeta fórmulas. Para volver $f[A]$ una $\mathcal{L}$-estructura, se interpretan los símbolos de $\mathcal{L}$ en $f[A]$ transfiriendo la interpretación de dichos símbolos en $\mathfrak{A}$ mediante f y las fórmulas apropiadas. Así, $A' = f[A]$ es l universo de una subestrucura elemental $\mathfrak{A}' \preceq \mathfrak{B}$, pero es claro qu f es un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$. □

Definición 6.3.33. Una función f que satisfaga las condiciones de la proposición 6.3.32 es un encaje elemental; en símbolos, $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$. Si existe tal encaje elemental; decimos que $\mathfrak{A}$ se encaja elementalmente en $\mathfrak{B}$; en símbolos,

$$\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}.$$

Ejemplo 6.3.34. Considere las siguientes gráficas:



Si $f : A \longrightarrow B$, definida por $f(a) = 2, f(b) = 5, f(c) = 6, f(d) = 3$ y $g : A \longrightarrow B$, definida por $g(a) = 1$, $g(b) = 2$, $g(c) = 3$, $g(d) = 4$, entonces f es un encaje pero g no lo es, pues $\mathfrak{A} \models \neg R[a, c]$ pero $\mathfrak{B} \models R[g(a), g(c)]$.

Ejemplo 6.3.35. Sean $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ e $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la identidad. Ésta es un encaje. Como

$$\mathfrak{N} \models \neg \exists\, x(x < 0)$$

y

$$\mathfrak{Z} \models \exists\, x(x < 0),$$

la identidad no preserva la fórmula $\neg \exists\, x(x < 0)$, por lo que no es elemental.

La identidad $id : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{Q}$ es un encaje que no es elemental pues no preserva la fórmula $\neg \exists\, x(3 < x \wedge x < 4)$. Después veremos que $id : \mathfrak{Q} \longrightarrow \mathfrak{R}$ sí es elemental.

Ejemplo 6.3.36. Sea $\mathfrak{G}$ la gráfica:

- Vértices: a, b, c, d, e
- Bordes: $ab, ac, ad, ae, bc, cd, de$

Si escogemos un subconjunto de estos vértices y cualquier subconjunto de bordes incluyendo sólo aquellos vértices elegidos, obtenemos una gráfica conocida como subgráfica.

Sea $\mathfrak{H}$ la subgráfica de $\mathfrak{G}$:

- Vértices: a, b, c, d
- Bordes: ab, ad, bc, cd

Aunque $\mathfrak{H}$ es una subgráfica de $\mathfrak{G}$, no es una subestructura de $\mathfrak{G}$ ya que

$$\mathfrak{G} \models R(a, c),$$

mientras que

$$\mathfrak{H} \models \neg R(a, c).$$

Aquí la noción de subestructura corresponde a la de gráfica inducida.

Ejemplo 6.3.37. Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$, donde $S^{\mathfrak{N}}$ es la 2-relación sucesor. Esto es, para cualesquier $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N} \models S(a, b)$ si y sólo si $b = a + 1$. Puesto que el lenguaje no contiene constantes o funciones, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es el universo de una subestructura de $\mathfrak{N}$. Se sigue que existe una cantidad innumerable de subestructuras de $\mathbb{N}$.

Ejemplo 6.3.38. Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, s \rangle$, donde s es una 1-función que se interpreta como la función sucesor: $s(n) = n + 1$.

Sólo aquellos subconjuntos de $\mathbb{N}$ cerrados respecto a s sirven como el universo de una subestructura. Estos subconjuntos son de la forma $\{n : n \geq d\}$ para alguna $d \in \mathbb{N}$. Se infiere que tenemos una cantidad numerable de subestructuras de $\mathfrak{N}$. Es claro que todas éstas son isomorfas, así que sólo hay una subestructura de $\mathfrak{N}$, módulo-isomorfismos.

Ejemplo 6.3.39. Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, s, 1 \rangle$, donde s es una 1-función que se interpreta como la función sucesor, y 1 es un símbolo de constante que se interpreta como el 1 de $\mathbb{N}$. Si $D \subseteq \mathbb{N}$ es el universo de una subestructura de $\mathbb{N}$ ($D \neq \mathbb{N}$), D debe contener al 1 y ser cerrada respecto a s. Por lo tanto, $D = \mathbb{N} - \{0\}$.

Ejemplo 6.3.40. Sean $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, s \rangle$ como antes, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$ con universo $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, y $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{B}$ definida por $f(n) = n + 1$. Entonces f es un isomorfismo: tenemos $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{N}$. Sin embargo, $\mathfrak{B}$ no es subestructura elemental de $\mathfrak{N}$ pero sí existe un encaje elemental de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{N}$ que no es la identidad. En efecto, sea $\varphi(x) \equiv \neg\exists\, y(s(y) = x)$ que afirma que x no tiene predecesor. Entonces $\mathfrak{B} \models \varphi[1]$, pero $\mathfrak{N} \models \neg\varphi[1]$.

6.4 Teoría de Fraïssé

En esta sección tratamos un método para caracterizar equivalencia elemental en la lógica de primer orden y que será clave para probar el Teorema de Lindström. Lo que aquí estudiemos será enteramente en lógica de primer orden. Sean $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, y $\mathcal{L}$ lenguajes de primer orden, $Tm(\mathcal{L})$ el conjunto de $\mathcal{L}$-términos, $Fml(\mathcal{L})$ el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y $Fml_n(\mathcal{L})$ el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas con n variables libre $v_1, \ldots, v_n$, esto es,

$$Fml_n(\mathcal{L}) = \{\varphi \in Fml(\mathcal{L}) : lib(\varphi) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}\}.$$

Diremos que un lenguaje $\mathcal{L}$ es relacional, cuando no es vacío pero carece de símbolos de función y constante. Una función inyectiva p es un isomorfismo parcial de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$, si el dominio de p está contenido en A, el rango de p es un subconjunto de B y para cada $\varphi \in Fml_n(\mathcal{L})$, si $a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$, ocurre que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[p(\vec{a})].$$

No es difícil constatar que p es un isomorfismo parcial entre las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones.

- $dom(p) \subseteq A$, $ran(p) \subseteq B$.
- p es inyectiva.

❋ Si P es un símbolo de n-relación en $\mathcal{L}$, y $a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$,

$$\mathfrak{A} \models P[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P[p(a_1), \ldots, p(a_n)].$$

❋ Si f es un símbolo de n-función en $\mathcal{L}$, $a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$, se cumple que

$$\mathfrak{A} \models f(a_1, \ldots, a_n) = a \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = p(a).$$

❋ Si c es un símbolo de constante en $\mathcal{L}$ y $a \in dom(p)$, ocurre que

$$c^{\mathfrak{A}} = a \Leftrightarrow c^{\mathfrak{B}} = p(a).$$

En realidad, un isomorfismo entre las $\mathcal{L}$-estrutcura A y $\mathfrak{B}$ es un isomorfismo parcial cuyo dominio es A y rango es B

Ejemplo 6.4.1. (a) La aplicación vacía es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

(b) La aplicación p con dominio $\{2, 3\}$ y $p(2) = 2$, $p(3) = 6$ es un isomorfismo parcial del grupo aditivo $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$ en $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$. La aplicación q con dominio $\{2, 3\}$, $q(2) = 1$, $q(3) = 2$ no es un isomorfismo parcial de $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$ en $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, pues $2 + 2 \neq 3$, en cambio $q(2) + q(2) = q(3)$.

(c) Si $\mathcal{L}$ es relacional (consiste exclusivamente en símbolos relación), las siguientes aseveraciones son equivalentes, para $a_1, \ldots, a_r \in A$ y $b_1, \ldots, b_r \in B$.

(i) Mediante $p(a_i) = b_i$, $i \leq r$ se obtiene un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

(ii) Para cada fórmula atómica $\psi \in Fml_r(\mathcal{L})$, se cumple que

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_r] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[b_1, \ldots, b_r].$$

Demostración. Notemos que, para cualesquier $0 < i, j \leq r$,

$$\begin{aligned} a_i = a_j &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models v_i = v_j[a_1, \ldots, a_r] \\ b_i = b_j &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models v_i = v_j[b_1, \ldots, v_r], \end{aligned} \tag{✻}$$

y que para un símbolo de n-predicado $P \in \mathcal{L}$, y $0 < i_1, \ldots, i_r \leq r$,

$$\begin{aligned} P^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models P(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})[a_1, \ldots, a_r] \\ P^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})[b_1, \ldots, b_r]. \end{aligned} \tag{❄}$$

Si se cumple (ii), dado que

$$\mathfrak{A} \models v_i = v_j[a_1, \ldots, a_r] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models v_i = v_j[b_1, \ldots, b_r]$$

y (⊛), la aplicación p está bien definida y es inyectiva. En virtud de que,

$$\mathfrak{A} \models P(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})[a_1, \ldots, a_r] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(v_{i_1}, \ldots, i_{i_n})[a_1, \ldots, b_r]$$

y (❄), p es un homomorfismo. En forma similar derivamos que (i) implica (ii) usando (⊛) y (❄). ❐

(d) La equivalencia en (c) no se cumple en general, cuando $\mathcal{L}$ no es relacional. Por ejemplo, para el isomorfismo parcial de (b), no se cumple

$$\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle \models v_0 + (v_0 + v_0) = v_1[2, 3],$$

en cambio, sí se cumple

$$\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle \models v_0 + (v_0 + v_0) = v_1[p(2), p(3)].$$

(e) Incluso para lenguajes relacionales $\mathcal{L}$ un isomorfismo parcial puede no respetar la validez de fórmulas, cuando éstas contienen cuantificadores. Sean $\mathcal{L} = \{<\}$ y q_0 el isomorfismo parcial de $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ con dominio $\{2, 3\}$ y $q_0(2) = 3$, $q_0(3) = 4$. Se cumple que

$$\langle \mathbb{R}, <\rangle \models \exists\, v_2(v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)[2, 3]$$

pero no ocurre que

$$\langle \mathbb{Z}, <\rangle \models \exists\, v_2(v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)[q_0(2), q_0(3)].$$

Si p es un isomorfismo parcial de $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ con dominio $\{a, b\}$, $a < b$, siempre es válido

$$\langle \mathbb{R}, <\rangle \models \exists\, v_2(v_0 < v_1 \wedge v_2 < v_1)[a, b],$$

pues, digamos

$$\langle \mathbb{R}, <\rangle \models (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)\left[a, b, \frac{a+b}{2}\right]$$

Por otro lado, la validez de

$$\langle \mathbb{R}, <\rangle \models (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)[p(a), p(b)] \qquad (★)$$

es equivalente a la existencia de un isomorfismo parcial $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ que extienda a p y tenga a $\frac{a+b}{2}$ en su dominio, porque si existe tal q, se cumple (★), ya que

$$\langle \mathbb{Z}, <\rangle \models \exists\, v_2(v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)\left[q(a), q(b), q\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

En cambio, si se cumple (✯) y

$$\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)[p(a), p(b), d],$$

entonces extendemos p a q mediante $dom(q) = \{a, b, \frac{a+b}{2}\}$ y $q\left(\frac{a+b}{2}\right) = d$.

> Un conocido al que el señor K. no había visto desde hacía tiempo le saludó con estas palabras:
> –¡Caramba, señor Keuner, no ha cambiado usted nada! –¡Oh! —exclamó éste palideciendo.

Definición 6.4.2. Escribimos $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son parcialmente isomorfos via I, si $I \neq \varnothing$ es un conjunto cuyos elementos dan lugar a la propiedad de ida y vuelta, es decir, se cumple lo siguiente.

- ❉ Propiedad de ida. Para todo $p \in I$ y cada $a \in A$, existe $q \in I$ con $p \subseteq q$ y $a \in dom(q)$.
- ❉ Propiedad de vuelta. Para toda $p \in I$ y cada $b \in B$ existe $q \in I$ con $p \subseteq q$ y $b \in ran(q)$.

Escribimos $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ cuando existe I tal que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Teorema 6.4.3.

(i) Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

(ii) Si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y A, B son numerables, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demostración. (i) Tenemos un isomorfismo $p : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Considere $I = \{p\}$ y cerciórese de que I funciona como sistema de ida y vuelta.

(ii) Sea $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, donde $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$; dado $p_0 \in I$, sea p_{2n+1} una extensión p de p_{2n} en I con $a_n \in dom(p)$, p_{2n+2} una extensión p de p_{2n+1} en I con $b_n \in ran(p)$. Se deduce que,

$$q = \bigcup_{n \in \omega} p_n$$

tiene dominio A y rango B, de suerte que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. □

En virtud de este teorema podemos pensar que $\cong_p$ es una aproximación numerable a la relación de isomorfía.

Definición 6.4.4. Escribimos

$$(I_\eta : \eta < \xi) : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$$

y decimos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son ξ-parcialmente isomorfas vía $(I_\eta : \eta < \xi)$ si ocurre lo siguiente.

(i) $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_\eta \supset \cdots$, donde para cada $\eta < \xi$, I_η es un conjunto no vacío de isomorfismos parciales.

(ii) (Ida y vuelta) Para cada $\eta + 1 < \xi$, todo $p \in I_{\eta+1}$ y cualquier $a \in A$ (respectivamente $b \in B$), existe $q \in I_\eta$ con $p \subseteq q$ y $a \in dom(q)$ (respectivamente $b \in ran(q)$).

Escribimos $\mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$, si existe $(I_\eta : \eta < \xi)$ tal que $(I_\eta : \eta < \xi) : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$.

Teorema 6.4.5.

(i) Si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, entonces para todo ξ, $\mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$.

(ii) Si $\mathfrak{A} \cong_{n+2} \mathfrak{B}$ y A tiene n elementos, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

La condición (ii) asegura que para $n \in \omega$, $\cong_n$ se puede ver como una aproximación finita de la relación de isomorfía.

Demostración. Tenemos $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y sea ξ arbitrario. Construimos los I_ξ por recursión. Hacemos $I_0 = I$; en I_1 ponemos los $p_0 \in I_0$ que se pueden extender una vez. Dada I_α, en $I_{\alpha+1}$ están los que se pueden extender $\alpha + 1$-veces. Es claro que $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$. Sean $\eta + 1 < \xi$, $p \in I_{\eta+1}$ y $a \in A$ ($b \in B$); $p \in I_\eta$ implica que $p \in I$, de modo que existe q que tiene a a en su dominio y extiende a p. Si tomamos $b \in B$, procedemos en forma similar.

(ii) Supongamos que $\mathfrak{A} \cong_{n+2} \mathfrak{B}$ y que A tiene n elementos. Si B tuviese más o menos elementos que A, no se cumpliría $\cong_{n+2}$, de suerte que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ tienen los mismos elementos n, y construimos el isomorfismo como antes. ∎

Definición 6.4.6. Las estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se dicen finito isomorfas, $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$, cuando existe una sucesión $(I_n : n \in \mathbb{N})$ con las siguientes propiedades.

(a) Los I_n son conjuntos no vacíos de isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

(b) (Ida) Si $p \in I_{n+1}$ y $a \in A$, existe un $q \in I_n$ con $q \supseteq p$ y $a \in dom(q)$.

(c) (Vuelta) Si $p \in I_{n+1}$ y $b \in B$, existe $q \in I_n$ con $q \supseteq p$ y $b \in ran(q)$.

Las condiciones (b) y (c) se pueden expresar $n + 1$ veces. Con ello se consiguen extensiones que están en $I_n, I_{n-1}, \ldots$ Si $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, la sucesión constante $(I : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

Lema 6.4.7.

(a) Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

(b) Si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, *entonces* $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

(c) Si $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ *y* A *es finito, entonces* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(d) Si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ *y* A, B *son a lo sumo numerables, entonces* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demostración. (a) Si $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ se cumple, $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ para $I = \{\pi\}$.

(b) Si $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, ocurre que $(I : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

(c) Tenemos $(I_n : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ y supongamos que A tiene r elementos, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Escogemos $p \in I_{r+1}$ y apelamos a la propiedad de ida r veces, obtenemos q en I_1 con $a_1, \ldots, a_r \in dom(q)$, es decir $dom(q) = A$. De ocurrir que $ran(q) \neq B$, y $b \in B - ran(q)$, por la propiedad de vuelta en I_0, existe una extensión q' de q con $b \in ran(q')$. Dado que $dom(q) = A$, esto no es posible. Por consiguiente, $ran(q) = B$ y tenemos $q : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(d) Sea $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, digamos que $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ y $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$. Partimos de un $p_0 \in I$, y repetidamente usamos ida y vuelta para conseguir extensiones $p_1, p_2, \ldots$ en I con $a_0 \in dom(p_1)$, $b_0 \in ran(p_2)$, $a_1 \in dom(p_3)$, $b_1 \in ran(p_4)$, es decir, una sucesión $(p_n : n \in \mathbb{N})$ de isomorfismos parciales en I con las siguientes propiedades.

1. $p_n \subset p_{n+1}$.
2. Si n es impar, $n = 2r + 1$, entonces $a_r \in dom(p_n)$.
3. Si n es par, $n = 2r + 2$, $b_r \in ran(p_n)$.

Hacemos

$$p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n$$

Por (1), p es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$; se cumple $dom(p) = A$ por (2) y $ran(p) = B$ por (3), de modo que $p : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. ❐

Ejemplo 6.4.8. Sea $\mathcal{L} = \{\sigma, 0\}$ un lenguaje, Φ_σ consiste en los axiomas del sucesor

- $\forall x (\neq x = 0 \leftrightarrow \exists y (\sigma(y) = x))$.
- $\forall x, y (\sigma(x) = \sigma(y) \leftrightarrow x = y)$.
- $\{\forall x \neg \underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{n\text{-veces}}(x) = x : m \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.

Considere la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{N}_\sigma = \langle \mathbb{N}, \sigma, 0 \rangle$, con $\sigma(n) = n + 1$, que es modelo de Φ_σ.

Afirmación 1. Cualesquier dos modelos de Φ_σ son finito isomorfos.

Demostración de la afirmación 1. Para un modelo $\mathfrak{A}$ de Φ_σ y cada $a \in A$ ponemos

$$a^{(m)} = \sigma^{\mathfrak{A}} \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n \text{ veces}} \sigma^{\mathfrak{A}}(a)$$

Si $n \in \mathbb{N}$, establecemos una función distancia d_n en $A \times A$ mediante la prescripción,

$$d_n(a, a') = \begin{cases} m, & \text{si } a^{(m)} = a' \wedge m < 2^{n+1} \\ -m, & \text{si } a'^{(m)} = a \wedge m < 2^{n+1} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Escribimos $Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ para la familia de isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos de Φ_σ, y confirmemos que si $I_n = \{p \in Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) : dom(p)$ es finito, $0^{\mathfrak{A}} \in dom(p)$, para cualesquier $a, a' \in dom(p)$, se cumple que $d_n(a, a') = d_n(p(a), p(a'))\}$ da lugar a

$$(I_n : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}.$$

Así, un isomorfismo en I_n preserva la d_n-distancia; ocurre que $I_n \neq \varnothing$ pues $(0^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{B}}) \in I_n$ y cumple la propiedad de ida y vuelta; corroboremos ida (vuelta se efectúa en forma análoga). Sea $p \in I_{n+1}$ y $a \in A$, y distinguimos si a satisface la condición

(❋) Existe $a' \in dom(p)$ con $|d_n(a', a)| < 2^{n+1}$,

o no. Si se cumple (❋) y $a' \in dom(p)$ con $|d_n(a', a)| < 2^{n+1}$, escogemos $b \in B$ con $d_n(p(a'), b) = d_n(a', a)$; como $p \in I_{n+1}$ se verifica que $q = p \cup \{(a, b)\}$ es un isomorfismo parcial que preserva las distancias, de suerte que $q \in I_n$.

De no cumplirse (❋), elegimos b con $d_n(p(a'), b) = \infty$ para cada $a' \in dom(p)$ (tal b existe porque cada modelo de Φ_σ es infinito). Se verifica que $q = p \cup \{(a, b)\} \in I_n$. ❧ (1)

–Es imposible sostener una conversación entre nosotros dos –le dijo el señor Keuner a cierta persona.
–¿Y por qué? –le preguntó ésta con sorpresa.
–En su presencia no se me ocurre nada razonable –contestó el señor K.
–Pero si no me importa en absoluto –dijo consoladoramente su interlocutor.
–Lo creo –respondió el señor K. molesto – pero a mí sí me importa.

Pronto establecemos una conexión entre el concepto puramente algebraico de isomorfía y la noción modelo teórica de equivalencia elemental. Probaremos que si $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen las mismas fórmulas de rango cuantificador $< n$. Primero definimos el rango cuantificador de una fórmula φ, $qr(\varphi)$, por inducción como se describe a continuación.

Definición 6.4.9. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje formal y φ una $\mathcal{L}$-fórmula. El rango cuantificador de φ se define por inducción en la construcción de φ.

$$qr(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \varphi \text{ es atómica} \\ qr(\psi), & \text{si } \varphi \equiv \neg\psi \\ \max\{qr(\theta), qr(\psi)\}, & \text{si } \varphi \equiv \theta \vee \psi \\ qr(\theta) + 1, & \text{si } \varphi \equiv \exists\, x\theta. \end{cases}$$

Lema 6.4.10. *Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de símbolos de predicado de un lenguaje relacional $\mathcal{L}$, y suponga que $(I_m : m < n) : \mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$. Si $p \in I_m$, $\vec{a} \in dom(p)$ y $\varphi \in Fml_r(\mathcal{L})$ tiene rango cuantificador $\leq m$, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[p(\vec{a})].$$

Demostración. Procedemos por inducción en m. Si $m = 0$, no hay cuantificadores, se trata de combinación booleana de fórmulas atómicas. Caso atómico. Sean $\vec{a} \in A$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_l)$ y $p \in I_{n+1}$. Existe $p' \in I_j$, $j < n+1$ que incorpora sucesivamente a los elementos en $\vec{a}$, de modo que tenemos el isomorfismo parcial p que tiene a los $\vec{a}$ en su dominio y

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[p(\vec{a})].$$

El caso $\varphi \equiv \neg\psi$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \text{ no es el caso que } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \\ &\Leftrightarrow \text{no es el caso que } \mathfrak{B} \models \psi[p(\vec{a})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[p(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\varphi \equiv \psi_0 \vee \psi_1$, en cuyo caso procedemos en forma similar. Ahora, suponemos cierto para l y probamos para $l+1$, y sea $\varphi \equiv \exists\, x\psi$, $qr(\psi) \leq l$. Si $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_r]$, existe $a \in A$ con $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_r]$; existe $q \in I_{m-1}$ con $q \supseteq p$, $a \in dom(q)$ y como $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_r]$, deducimos $\mathfrak{B} \models \psi[p(a_1), \ldots, p(a_r), q(a)]$, así que existen $b \in B$ y $q \in I_{m-1}$ con $q \supseteq p$, $b \in ran(q)$ y $\mathfrak{B} \models \psi[p(a_1), \ldots, p(a_r), b]$. En consecuencia, $\mathfrak{B} \models \varphi[p(a_1), \ldots, p(a_r)]$. El regreso se trata en forma análoga. ☐

En el lema permitimos sólo lenguajes relacionales. No obstante, pronto veremos como «tranformar» un lenguaje cualquiera en una relacional, o bien, es fácil modificar la demostración del lema 6.4.10 para permitir lenguajes arbitrarios. Queda como ejercicio para el lector efectúar esto último.

Corolario 6.4.11. *Si $\mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}$ (o para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$), entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

☐

Nos interesa probar la recíproca de 6.4.11, para lo cual consideramos lenguajes finitos, en cuyo caso podemos expresar en la LPO que $\mathfrak{A}$ contiene un conjunto finito de un

tipo de isomorfía dado. Por consiguiente, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes, $\mathfrak{B}$ también contiene tal conjunto; ponemos el isomorfismo parcial correspondiente en I_0. En forma similar, dado un conjunto T de tipos de isomorfía de $n+1$-elementos, expresamos en LPO que $\mathfrak{A}$ contiene aun subconjunto de n elementos que se puede extender añadiendo un elemento, de los tipos en T. Por tanto, si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B}$ también contiene a ese subconjunto. Ponemos el isomorfismo parcial correspondiente en I_1, y seguimos de esta forma para obtener una sucesión $(I_n : n \in \omega)$ tal que

$$(I_n : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}.$$

Pero antes retomamos el teorema 6.4.10 y su prueba. Dos estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ se dicen m-isomorfas ($\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), si existe una sucesión $I_0, \ldots, I_m$ de conjuntos no vacíos de isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ con la propiedad de ida y vuelta: si $n+1 \leq m$, $p \in I_{n+1}$ y $a \in A$ (respectivamente, $b \in B$), existe $q \in I_n$ con $q \supseteq p$ y $a \in dom(q)$ (respectivamente, $b \in ran(q)$). En tal caso escribimos $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Si se cumple $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, la prueba de 6.4.10 muestra que cada $p \in I_n$ (con $n \leq m$) verifica la validez de fórmulas de rango cuantificador $\leq n$. Escribimos $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ satisfacen los mismos enunciados de rango cuantificador $\leq m$, de suerte que logramos la siguiente afirmación.

Corolario 6.4.12. *Si* $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$, *entonces* $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

□

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$, una sucesión $(b_1, \ldots, b_r)$ de elementos de B, escribimos $\overset{r}{b}$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos fórmulas $\varphi^n_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \in Fml_r(\mathcal{L})$, por recursión como sigue. Primero, $\varphi^0_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \in Fml_r(\mathcal{L})$ describe el tipo de isomorfía de la subestructura $\langle\{b_1, \ldots, b_r\}\rangle_{\mathfrak{B}}$, esto es, las fórmulas que se satisfacen en esta subestructura generada. Para $n > 0$, dada $\varphi^n_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \in Fml_r(\mathcal{L})$, ocurre que $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}[\overset{r}{b}]$, y si $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}[\overset{r}{a}]$, para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, y elementos $\overset{r}{a}$ en A, entonces la correspondencia $a_i \mapsto b_i$ $(i \leq r)$ es un isomorfismo parcial, que se puede extender n-veces por ida y vuelta. Para $n > 0$ se admite también el caso $r = 0$, es decir, de la sucesión vacía $\varnothing$ de elementos de $\mathfrak{B}$ y escribimos $\varphi^n_{\mathfrak{B}}$ en lugar de $\varphi^n_{\mathfrak{B},\varnothing}$. Cuando $n = 0$, siempre se tiene $r > 0$. Pero formalicemos esta idea. Para abreviar escribimos

$$\Phi_r = \{\varphi \in Fml_r(\mathcal{L}) : \text{ atómica o negación de atómica}\}.$$

En vista de que $\mathcal{L}$ es relacional, Φ_r es finito y Φ_0 es vacío. Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ definimos por recursión en n, para todos los r y cada $\overset{r}{b}$ admisibles, el enunciado $\varphi^n_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}$

como sigue (después veremos que estamos en $L_{\omega\omega}$).

$$\varphi^{0}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \equiv \bigwedge\{\varphi \in \Phi_r : \mathfrak{B} \models \varphi[\overset{r}{b}]\}$$
$$\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \equiv \forall v_r \bigvee\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb}} : b \in B\} \wedge \bigwedge\{\exists v_r \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb}} : b \in B\},$$

aquí usamos $\overset{r}{bb}$ como abreviación de $(b_1, \ldots, b_r, b)$. En virtud de que Φ_r es finita para cada r, se corrobora fácilmente por inducción en n lo siguiente.

Hecho 6.4.13. *El conjunto* $\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} : \mathfrak{B}$ *es una* $\mathcal{L}$*-estructura y* $\overset{r}{b} \in B\}$ *es finito.*

□

Por tanto, las conjunciones y disyunciones que aparecen en la definición previa son finitas, así que estamos en primer orden.

Hecho 6.4.14.

(a) $\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \in Fml_r(\mathcal{L})$ *y* $qr\left(\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}\right) = n.$

(b) $\mathfrak{B} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}\left[\overset{r}{b}\right].$

Demostración. Procedemos por inducción en n. Por ejemplo (b). Si $n = 0$ (y $r > 0$), la afirmación se obtiene de la definición de $\varphi^{0}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}}$; suponemos cierto para n y probamos para $n+1$. Por hipótesis de inducción se cumple que para cada $b' \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb'}}\left[\overset{r}{b}, b'\right],$$

y para toda $b' \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \bigvee\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb}} : b \in B\}\left[\overset{r}{b}, b'\right],$$

y

$$\mathfrak{B} \models \exists v_r \varphi_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb'}}\left[\overset{r}{b}\right],$$

por lo que

$$\mathfrak{B} \models \forall v_r \bigvee\{\varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb}} : b \in B\}\left[\overset{r}{b}\right],$$

y

$$\mathfrak{B} \models \bigwedge\{\exists v_r \varphi^{n}_{\mathfrak{B},\overset{r}{bb'}} : b' \in B\}\left[\overset{r}{b}\right]$$

de donde se desprende que

$$\mathfrak{B} \models \varphi^{n+1}_{\substack{r\\ \mathfrak{B}b}} \left[\overset{r}{b}\right].$$

□

Sean $\overset{r}{b} \in B$. Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y $\overset{r}{a} \in A$, de 6.4.1(c) derivamos lo siguiente.

Hecho 6.4.15. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $\mathfrak{A} \models \varphi^{0}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},b}} \left[\overset{r}{a}\right]$.

(ii) Si hacemos $p(a_i) = b_i$, $i \leq r$, *definimos un isomorfismo parcial de* $\mathfrak{A}$ *a* $\mathfrak{B}$, *así,* $\overset{r}{a} \mapsto \overset{r}{b} \in Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

□

Hecho 6.4.16. *Si* $\mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},b}} \left[\overset{r}{a}\right]$, *entonces* $\overset{r}{a} \mapsto \overset{r}{b} \in Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Demostración. Procedemos por inducción en n. Para $n = 0$ acudimos a 6.4.15. Suponga-mos cierto para n y verifiquemos para $n+1$. Supongamos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi^{n+1}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},b}} \left[\overset{r}{a}\right]$$

y tomemos $a \in A$ arbitrario. Ya que $\mathfrak{A} \models \forall v_r \bigvee \{\varphi^{n}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},bb}} : b \in B\}[\overset{r}{a}]$, existe $b \in B$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \beta^{n}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},bb}} \left[\overset{r}{a}, a\right]$$

Por hipótesis de inducción, $\overset{r}{a}a \mapsto \overset{r}{b}b \in Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, de suerte que $\overset{r}{a} \mapsto \overset{r}{b} \in Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. □

> –¿Qué hace usted, le preguntaron al señor K., cuando ama a una persona?
> –Le hago un dibujo –respondió el señor K. — y procuro que se le parezca.
> –¿Quién, el dibujo?
> –No–dijo el señor K.–, la persona.

En lo sucesivo, sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Para $n \in \mathbb{N}$ hacemos

$$J_n = \left\{\overset{r}{a} \mapsto \overset{r}{b} : r \in \mathbb{N}, \overset{r}{a} \in A, \overset{r}{b} \in B, \mathfrak{A} \models \varphi^{n}_{\substack{r\\ \mathfrak{B},b}} \left[\overset{r}{a}\right]\right\}.$$

Hecho 6.4.17.

(a) $J_n \subseteq Par(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(b) $(J_n : n \in \mathbb{N})$ *tiene la propiedad de ida y vuelta.*

(c) Si $n > 0$ *y* $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}} (\equiv \varphi^n_{\mathfrak{B},\varnothing})$.

Demostración. (a) Se obtiene de 6.4.16.

(c) Por definición de J_n.

(b) Primero probamos «ida». Con este fin suponemos $p = \overset{r}{a} \mapsto \overset{r}{b} \in J_{n+1}$ y $a \in A$. En consecuencia, se cumple

$$\mathfrak{A} \models \varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} \left[\overset{r}{a}\right],$$

en particular,

$$\mathfrak{A} \models \forall v_r \bigvee \{\varphi^n{}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}\overset{r}{b}} : b \in B\} \left[\overset{r}{a}\right]$$

Por consiguiente, existe $b \in B$ con

$$\mathfrak{A} \models \varphi^n{}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}\overset{r}{b}} \left[\overset{r}{a}, a\right],$$

de suerte que $\overset{r}{a}a \mapsto \overset{r}{b}b$ es un isomorfismo parcial en J_n, que extiende p y $a \in dom(p)$. Puesto que también ocurre que

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge \{\exists v_r \varphi^n{}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}} : b \in B\} \left[\overset{r}{a}\right]$$

para cada $b \in B$, existe $a \in A$ con

$$\mathfrak{A} \models \varphi^n{}_{\mathfrak{B},\overset{r}{b}\overset{r}{b}} \left[\overset{r}{a}, a\right],$$

así que $\overset{r}{a}a \mapsto \overset{r}{b}b \in J_n$, esto es, es un isomorfismo parcial en J_n que extiende a p y tiene a b en su rango. Por tanto, también hemos constatado la «vuelta». ∎

Ahora, es fácil deducir una dirección del teorema de Fraïssé, a saber, si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$. Ciertamente, si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, para $n \geq 1$ y $\mathfrak{B} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}}$, por 6.4.14(b) se cumple $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}}$, y de acuerdo con 6.4.17(c), $J_n \neq \varnothing$ para toda n, de suerte que $(J_n : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$ (6.4.17(a),(b)).

Por lo previo, podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 6.4.18. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje relacional finito, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}}$ *para* $n \geq 1$.

(c) $(J_n : n \in \mathbb{N}) : \mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

(d) $\mathfrak{A} \cong_e \mathfrak{B}$.

En virtud de que $qr(\varphi^m_{\mathfrak{B}}) = m$ para $m \geq 1$, deducimos el siguiente teorema.

Teorema 6.4.19. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje relacional finito, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Para $m \geq 1$ las siguientes aseveraciones son equivalentes.*

(a) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{B}}$.

(c) $(J_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

(d) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Teorema 6.4.20. *Sea $\mathcal{L} = \{R\}$ un lenguaje con R un símbolo de 2-relación. No existe un $\mathcal{L}$-enunciado cuyos modelos finitos sean las gráficas conexas finitas. Por tanto, la clase de las gráficas conexas no es elemental.*

Demostración. Para $k \geq 0$ sea $\mathcal{G}_k$ la gráfica conexa con vértices de 0 a k,

$$\mathfrak{G}_k = \left\langle \{0, \ldots, k\}, R^{\mathcal{G}_k} \right\rangle,$$

con

$$R^{\mathfrak{G}_k} = \{(i, i+1) : i < k\} \cup \{(i, i-1) : 1 \leq i \leq k\} \cup \{(k, 0), (0, k)\}$$

y $\mathfrak{H}_k$ consiste en dos copias ajenas de $\mathcal{G}_k$, esto es

$$\mathfrak{H}_k = \left\langle \{0, \ldots, k\} \times \{0, 1\}, R^{\mathfrak{H}_k} \right\rangle$$

con

$$R^{\mathfrak{H}_k} = \{((i, 0), (j, 0)) : (i, j) \in R^{\mathfrak{G}_k}\} \cup \{((i, 1), (j, 1)) : (i, j) \in R^{\mathfrak{G}_k}\}.$$

Afirmación 1. Para $k \geq 2^m$ se cumple que $\mathfrak{G}_k \cong_m \mathfrak{H}_k$.

Si esta afirmación es cierta, terminamos. Ciertamente, suponga que φ es un $\mathcal{L}$-enunciado y $m = qr(\varphi)$. Por la afirmación 1, $\mathfrak{G}_{2^m} \cong \mathfrak{H}_{2^m}$. Dado que $\mathfrak{G}_{2^m}$ es conexa, pero $\mathfrak{H}_{2^m}$ no, la clase de los modelos finitos de φ no coincide con la clase de las gráficas conexas finitas.

Demostración de la afirmación 1. Para $k \geq 2^m$ fija y $n \geq 0$ definimos funciones distancia d_n en $Gr_k \times Gr_k$, y d'_n en $Hm_k \times Hm_k$ como sigue.

$$d_n(a,b) = \begin{cases} lm_{ab}, & \text{si } lm_{ab} < 2^{n+1} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde lm_{ab} es la trayectoría mínima en $\mathfrak{G}_k$ entre a y b.

$$d'_n((a,i),(b,j)) = \begin{cases} d_n(a,b), & \text{si } i = j \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $n \leq m$ proponemos

$$I_n = \{p \in Par(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{H}_k) : |dom(p)| \leq m - n, \forall\, a, b \in dom(p)(d_n(a,b) = d'_n(p(a), p(b)))\}$$

Se corrobora que $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{G}_k \cong_m \mathfrak{H}_k$. (1) □

Hemos tratado lenguajes relacionales, pero el lector puede extender fácilmente los resultados a lenguajes finitos generales. Con este fin se define un rango cuantificador modificado mrg para términos y enunciados como a continuación.

$$\begin{aligned} mrg(x) &= 0 \\ mrg(c) &= 1 \\ mrg(f(t_1,\ldots,t_n)) &= 1 + mrg(t_1) + \cdots + mrg(t_n) \\ mrg(R(t_1,\ldots,t_n)) &= mrg(t_1) + \cdots + mrg(t_n) \\ mrg(t_1 = t_2) &= \text{máx}\{0, mrg(t_1), mrg(t_2) - 1\} \\ mrg(\neg\varphi) &= mrg(\varphi) \\ mrg(\varphi \vee \psi) &= \text{máx}\{mrg(\varphi), mrg(\psi)\} \\ mrg(\exists\, x\varphi) &= 1 + mrg(\varphi). \end{aligned}$$

Además, para $r \geq 0$, hacemos

$$\begin{aligned} \Phi'_r = \{\varphi \in Fml_r(\mathcal{L}) : \varphi \text{ es atómica o negaciones de atómicas} \\ \text{y } mrg(\varphi) = 0\} \end{aligned}$$

Podemos resumir todo lo anterior en el teorema de Fraïssé.

Teorema 6.4.21 (Fraïssé). *Supongamos que $\mathcal{L}$ es finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(ii) *Para cada* $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B}}$.

(iii) *Existe* $(I_n : n < \omega)$ *consistente en isomorfismos parciales tl que* $(I_n : n < \omega) : \mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}$.

(iv) $\mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}$.

En una ocasión, estaba invitado el señor K. con otras personas hasta cierto punto desconocidas, cuando reparó que sus anfitriones ya habían dispuesto los cubiertos para el desayuno en una mesita arrimada a la pared del dormitorio y próxima a la cama. Mientras seguía con la mente distraída en este singular suceso, agradecía para sus adentros a sus anfitriones la prisa con que lo despedían. Luego pensó si él mismo no hubiera podido preparar los cubiertos del desayuno por la noche, antes de acostarse. Tras algunas reflexiones llegó a la conclusión de que en determinados casos era mejor así. Y asimismo consideró correcto que otras personas se detuvieran ocasionalmente a reflexionar sobre esta cuestión durante cierto tiempo.

6.5 El teorema de Lindström

No es aventurado afirmar que el Teorema de Lindström es una caracterización en términos de teoría de modelos de la lógica de primer orden. El teorema asegura que cualquier lógica que sobrepase a la de primer orden debe ser capaz de distinguir entre ciertos cardinales infinitos, en el sentido de que algún enunciado tiene un modelo de alguna cardinalidad infinita, pero no en cualquier cardinalidad infinita. Digamos que el Teorema de Lindström nos indica que cualquier extensión propia de LPO debe descubrir algo no trivial en el universo de la teoría de conjuntos. Otra forma de decirlo, que es de hecho su formulación original, asegura que la LPO es una lógica máxima que satisface el teorema de Löwenheim-Skolem (LS) decreciente y la propiedad de compacidad numerable, que a continuación formulamos en la LPO.

Teorema 6.5.1 (Compacidad numerable). *Sean $\mathcal{L}$ y Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados. Entonces, Σ es satisfacible si y solamente si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.*

Teorema 6.5.2 (Löwenheim-Skolem decreciente)**.** *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Para cada $X \subseteq B$ existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq A$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ y $|\mathfrak{A}| \leq |X| + |\mathcal{L}|$.*

Particularmente, siempre que contemos con un lenguaje a lo más numerable, obtenemos una subestructura elemental con cardinalidad numerable. Como se ilustra a continuación.

Teorema 6.5.3. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados y $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Si $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $|\mathfrak{B}| \geq \aleph_0$, entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $|\mathfrak{A}| = \aleph_0$.*

El teorema de Löwenheim-Skolem tiene dos versiones. Ya presentamos la versión descendente, pero podemos obtener una versión creciente.

Teorema 6.5.4 (Löwenheim-Skolem creciente)**.** *Si Σ es un conjunto de enunciados de primer orden con un modelo infinito, entonces Σ tiene modelos de cardinalidad arbitrariamente grande.*

Recuerde, estos resultados han sido descritos en el contexto de la LPO.

La fortaleza de los teoremas de Löwenheim-Skolem abren paso, inadvertidamente, a una debilidad expresiva: la lógica de primer orden es incapaz de distinguir entre infinitos. Específicamente, en la lógica de primer no podemos encontrar un enunciado que exprese cardinalidades concretas. Sin duda, si $\mathfrak{A} \models \varphi$ es un modelo infinito, entonces existe un modelo $\mathfrak{B} \models \varphi$ de cardinalidad más grande, en ocasiones uno de cardinalidad más pequeña. Así que, ningún enunciado φ permite decidir si un modelo u otro es más grande.

Al singularizar la LPO debemos fijar el dominio de caracterización, y con este fin apelamos a las lógicas abstractas. Fijemos notación para el resto de este apartado. Como hemos visto, una lógica abstracta es una pareja $\mathbb{L} = (S, \models)$, donde S es un conjunto y $\models$ una relación binaria entre estructuras y elementos del conjunto S; S es el conjunto de enunciados de una lógica abstracta y $\models$ el predicado de veracidad. Si $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es un lenguaje,

- $Str(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ es la clase de las $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras.
- Si $\varphi \in S$,
$$Mod^S_{\mathbb{L}}(\varphi) = \{\mathfrak{M} \in Str(\boldsymbol{\mathcal{L}}) : \mathfrak{M} \models \varphi\}.$$

Si el contexto es bien conocido, escribimos simplemente $Mod_{\mathbb{L}}(\varphi)$. En cierto sentido, $Mod^S_{\mathbb{L}}(\varphi)$ es una formalización abstracta del significado de φ, y con esta idea podemos precisar cuando una lógica $\mathbb{L}'$ tiene mayor esxpresibidad que otra lógica $\mathbb{L}$. A saber, cuando para cada $\mathbb{L}$-enunciado φ existe un $\mathbb{L}'$-enunciado ψ con el mismo significado.

Definición 6.5.5. Sean $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ lógicas.

- Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ y $\psi \in \mathbb{L}'(\mathcal{L})$. Decimos que φ, ψ lógicamente equivalentes cuando
$$Mod^{\mathcal{L}}_{\mathbb{L}}(\varphi) = Mod^{\mathcal{L}}_{\mathbb{L}'}(\psi).$$
- $\mathbb{L}'$ es más expresiva que $\mathbb{L}$, en símbolos $\mathbb{L} \leq \mathbb{L}'$ cuando para cada lenguaje $\mathcal{L}$ y toda $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ existe $\psi \in \mathbb{L}'(\mathcal{L})$ tales que φ y ψ son lógicamente equivalentes. .
- $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ son igualmente expresivas, en símbolos $\mathbb{L} \sim \mathbb{L}'$, cuando $\mathbb{L} \leq \mathbb{L}'$ y $\mathbb{L}' \leq \mathbb{L}$.

Las lógicas ejemplificadas antes nos permiten establecer lo siguiente,

$$\mathbb{L}_I \leq \mathbb{L}^w_{II} \leq \mathbb{L}_{II}.$$

$$\mathbb{L}_{II} \nleq \mathbb{L}^w_{II}$$

y

$$\mathbb{L}^w_{II} \leq L_{\omega_1\omega} \leq L_{\kappa\lambda}.$$

Para cerciorarnos de la primera desigualdad sea φ un $\mathbb{L}^w_{II}(\mathcal{L})$-enunciado; encontremos un $L_{\omega_1\omega}(\mathcal{L})$-enunciado ψ que sea lógicamente equivalente a φ. La idea es generar una fórmula φ' a partir de φ pero que funcione como ψ. Procedemos por inducción en la construcción de φ. La parte del primer orden no requiere ninguna atención. Para el caso de cuantificador de segundo orden, por ejemplo para un símbolo de 2-predicado X,

$$(\exists X\varphi)' = \Big(\varphi_1 \vee \bigvee\{\exists v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+2n-2}, v_{k+2n-1}\varphi'_{2,n} : n \geq 1\}\Big)$$

en donde φ_1 se genera a partir de φ remplazando cada subfórmula atómica de la forma $X(s,t)$ por $\neg s = s$, y $\varphi'_{2,n}$ se origina de φ, cuando las fórmulas atómicas de la forma $X(s,t)$ se remplazan por

$$\bigvee\{(s = v_{k+2i} \wedge t = v_{k+2i+1}) : i < n\};$$

suponemos que $v_k, v_{k+1}, \ldots$ no aparecen en φ. El primer disyunto de $(\exists X\varphi)'$ puede ser $X = \varnothing$, el segundo $X \neq \varnothing$. Note que por esta desigulada, deducimos que se cumple el teorema de LS decreciente, pues éste se cumple para $L_{\omega_1\omega}$ (véase [FeVi17]). A continuación formulamos las propiedades de lógicas abstractas que nos permitirán formular con exactitud el teorema de Lindström. Pero antes requerimos un procedimiento que será de utildad: cómo y cuándo remplazar símbolos de función y constante por símbolos de predicado para obtener fómulas equivalentes.

La idea radica en considerar gráficas en lugar de funciones. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para cada símbolo de n-función $f \in \mathcal{L}$ añadimos un nuevo símbolo de $(n+1)$-relación y para todo símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$, introducimos un símbolo nuevo de 1-predicado C, generando de esta manera un nuevo lenguaje a partir de $\mathcal{L}$ denotado $\mathcal{L}^r$; los símbolos de predicado en $\mathcal{L}$ permanecen en $\mathcal{L}^r$, por lo que este último es relacional. Para cada $\mathfrak{A} \in Str(\mathcal{L})$ generamos una $\mathfrak{A}^r \in Str(\mathcal{L}^r)$ si la interpretación de cada símbolo de función y constante se remplazan por sus gráficas. A saber,

① $A^r = A$.

② Si $P \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado,

$$P^{\mathfrak{A}^r} = P^{\mathfrak{A}}.$$

③ Si $f \in \mathcal{L}$ es un símbolo de n-función,

$$F^{\mathfrak{A}^r} = \text{ la gráfica de } f^{\mathfrak{A}},$$

es decir,

$$F^{\mathfrak{A}^r}(a_1, \ldots, a_n, a) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a.$$

④ Para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$,

$$C^{\mathfrak{A}^r} = \{c^{\mathfrak{A}}\}.$$

La razón fundamental por la que los intereses tienen que ser satisfechos reside en que existen muchísimas ideas que no pueden pensarse en la medida en que se oponen a los intereses de los pensadores. Cuando los intereses no pueden satisfacerse es necesario destacarlos y señalar sus diferencias, pues sólo así puede el pensador pensar ideas útiles para los intereses de los demás, ya que más fácil que pensar sin intereses, es pensar para intereses ajenos.

Teorema 6.5.6.

(a) *Para cada $\mathcal{L}$-fórmula ψ existe una $\mathcal{L}^r$-fórmula ψ^r tal que para cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación β, ocurre que*

$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \models \psi^r[\beta].$$

- *Para cada $\psi \in Fml(\mathcal{L}^r)$ existe $\psi^{-r} \in Fml(\mathcal{L})$ tal que para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y cualquier $\mathfrak{A}$-asignación β, se cumple que*

$$\mathfrak{A} \models \psi^{-r}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \models \psi[\beta].$$

Demostración. (a) Dada ψ generamos ψ^r por recursión usando la construcción de ψ,

$$\begin{aligned}
[R(\vec{y})]^r &\equiv R(\vec{y}) \\
(x = y)^r &\equiv x = y \\
[c = x]^r &\equiv C(x) \\
[f(\vec{y}) = x]^r &\equiv F(\vec{y}, x) \\
[\neg\psi]^r &\equiv \neg\psi^r \\
(\psi_1 \wedge \psi_2)^r &\equiv \psi_1^r \wedge \psi_2^r \\
[\exists\, x\psi]^r &\equiv \exists\, x\psi^r
\end{aligned}$$

Con esta prescripcón se corrobora la afirmación.

(b) Se procede en forma similar; en particular,

$$\begin{aligned}
[F(t_1, \ldots, t_n, t)]^r &\equiv f(t_1, \ldots, t_n) = t \\
[C(t)]^r &\equiv c = t.
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, para cualesquier $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, se verifica que

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{B}^r.$$

Para una lógica $\mathbb{L}$ y un lenguaje $\mathcal{L}$ escribimos,

❄ $\boldsymbol{Boole}(\mathbb{L})$ $\mathbb{L}$ admite conectivos booleanos.

1. Si φ es un $\mathbb{L}(\mathcal{L})$-enunciado, existe $\chi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$, tal que para cada $\mathfrak{A} \in Str(\mathcal{L})$, ocurre que
$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \chi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models_{\mathbb{L}} \varphi.$$
2. Si $\varphi, \psi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$, existe $\chi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in Str(\mathcal{L})$, se cumple que,
$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \chi \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi \text{ o } \mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi).$$

En estos casos, escribimos $\neg\varphi$, respectivamente $(\varphi \vee \psi)$ en lugar de χ. Algo similar para $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, etc.

❄ $\boldsymbol{Rel}(\mathbb{L})$ $\mathbb{L}$ admite relativización. Para cada $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ y todo símbolo de 1-predicado $U \notin \mathcal{L}$ existe $\psi \in \mathbb{L}(\mathcal{L} \cup \{U\})$ tal que

$$(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}) \models_{\mathbb{L}} \psi \Leftrightarrow \langle U^{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \varphi.$$

Para cualquier $\mathfrak{A} \in Str(\mathcal{L})$ y todo subconjunto $U^{\mathfrak{A}}$ cerrado[2] respecto a símbolos de lenguaje $\mathcal{L}$, cuando ocurre $\boldsymbol{Rel}(\mathbb{L})$, φ^U denota a la ψ recién descrita.

❄ $\boldsymbol{Ers}(\mathbb{L})$ $\mathbb{L}$ admite remplazo de símbolos de función y constante por símbolos de predicado. Si $\mathcal{L}^r$ es el lenguaje que se obtiene de la sustitución de símbolos de función y constante por predicados, se cumple que para $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ existe $\psi \in \mathbb{L}(\mathcal{L}^r)$, tal que para cualquier $\mathfrak{A} \in Str(\mathcal{L})$,

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \models_{\mathbb{L}} \psi.$$

Si se tiene $\boldsymbol{Ers}(\mathbb{L})$, φ^r denota a la ψ recién descrita.

Ahora ya hemos aislado la noción indispensable para el teorema de Lindström: lógica regular.

Definición 6.5.7. Una lógica $\mathbb{L}$ con $\boldsymbol{Boole}(\mathbb{L})$, $\boldsymbol{Rel}(\mathbb{L})$ y $\boldsymbol{Ers}(\mathbb{L})$ se llama regular.

Dos nociones más para nuestras lógicas abstractas.
Para una lógica $\mathbb{L}$ y un lenguaje $\mathcal{L}$ escribimos,

❄ $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$ $\mathbb{L}$ cumple con el teorema de Löwenheim-Skolem. Si $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$ es satisfacible, existe un modelo de φ con universo a lo sumo numerable.

❄ $End(\mathbb{L})$ $\mathbb{L}$ satisface compacidad. Si $\Phi \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{L})$ y es finito satisfacible, entonces Φ es satisfacible.

Lema 6.5.8. *Sea $\mathbb{L}$ una lógica regular. Si para todo lenguaje relacional $\mathcal{L}$, cada $\mathbb{L}(\mathcal{L})$-enunciado es lógicamente equivalente a un LPO-enunciado, entonces*

$$\mathbb{L} \leq \mathbb{L}_I.$$

Demostración. Logramos constatar la aseveración mediante $\boldsymbol{Ers}(\mathbb{L})$. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje arbitrario y $\psi \in \mathbb{L}(\mathcal{L})$. Por $\boldsymbol{Ers}(\mathbb{L})$, escogemos el $\mathbb{L}(\mathcal{L}^r)$-enunciado ψ^r. Ya que $\mathcal{L}^r$ es relacional, por hipótesis existe un $\varphi \in \mathbb{L}(\mathcal{L}^r)$ que es lógicamente equivalente a ψ^r. Para φ elegimos el $\mathbb{L}_I(\mathcal{L})$-enunciado φ^{-r}. Por tanto, para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \models_{\mathbb{L}} \psi^r \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^r \models \varphi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi^{-r} \end{aligned}$$

por lo que ψ y φ^{-r} son lógicamente equivalentes. ☐

[2] Esto es, U contiene a las interpretaciones de los símbolos de constante, y es cerrado respecto a funciones en el lenguaje.

En lo sucesivo, $\mathbb{L}$ es una lógica abstracta con $\mathbb{L}_I \leq \mathbb{L}$. Si φ es un $LPO(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado, φ^* denotará un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado lógicamente equivalente a φ. Para un conjunto de primer orden,

$$\Phi^* = \{\varphi^* : \varphi \in \Phi\}.$$

Lema 6.5.9. *Suponga que se cumple* $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$. *Si* $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ *y es cierto* $\Phi \models_{\mathbb{L}} \varphi$, *entonces existe un subconjunto finito* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *con*

$$\Phi_0 \models_{\mathbb{L}} \varphi.$$

Demostración. Según $\boldsymbol{Boole}(\mathbb{L})$ escogemos $\neg\varphi$. En consecuencia, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, y en virtud de $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$, existe un subconjunto finito $\Phi_0 \subseteq \Phi$ tal que $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, esto es,

$$\Phi_0 \models_{\mathbb{L}} \varphi.$$

□

Así, en presencia de $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$, el significado de un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado depende exclusivamente de una cantidad finita de símbolos en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.

Lema 6.5.10. *Supongamos que* $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$ *y sea* $\psi \in \mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$. *Entonces, existe un subconjunto finito* $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ *tal que para cualesquier* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in Str(\boldsymbol{\mathcal{L}})$, *si* $\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$, *se cumple que*

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi.$$

Demostración. Nos restringimos al caso en que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es relacional, en vista del lema 6.5.8. Agregamos a $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ nuevos símbolos U, V, f de 1-predicados para configurar $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$. El conjunto Φ consiste en los $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$-enunciados de primer orden que afirma que f es un isomorfismo entre las subestructuras inducidas en U y en V,

- $\exists\, x U(x)$,
- $\exists\, x V(x)$,
- $\forall\, x(U(x) \to V(f(x)))$,
- $\forall\, y(V(y) \to \exists\, x(U(x) \wedge f(x) = y))$,
- $\forall\, x, y((U(x) \wedge U(y) \wedge f(x) = f(y)) \to x = y)$,
- Para cada $R \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$, símbolo de n-relación,

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n((\bigwedge_{i=1}^{n} U(x_i)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Afirmación 1. $\Phi^* \models_{\mathbb{L}} \psi^U \leftrightarrow \psi^V$.

Demostración de la afirmación 1. Recuerde que $\mathbb{L}_I \leq \mathbb{L}$. Si $\mathfrak{A}$ es una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura y

$$\langle \mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}} \rangle \models_{\mathbb{L}} \Phi^*$$

es decir

$$\langle \mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}} \rangle \models \Phi,$$

ocurre que $U^{\mathfrak{A}}$ y $V^{\mathfrak{A}}$ no son vacíos, y $f^{\mathfrak{A}} \restriction U^{\mathfrak{A}}$ es un isomorfismo de $\langle U^{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A}}$ sobre $\langle V^{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A}}$. Por la condición de isomorfía se cumple que

$$\langle U^{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi \Leftrightarrow \langle V^{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A}} \models_{\mathbb{L}} \psi,$$

esto es, por $\boldsymbol{Rel}(\mathbb{L})$,

$$(\mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}) \models_{\mathbb{L}} \psi^U \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, V^{\mathfrak{A}}) \models_{\mathbb{L}} \psi^V$$

y la condición de coincidencia junto con $\boldsymbol{Boole}(\mathbb{L})$ propician que

$$\langle \mathfrak{A}, U^{\mathfrak{A}}, V^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}} \rangle \models \psi^U \leftrightarrow \psi^V, \tag{✧}$$

lo que confirma la afirmación. (1)

Por $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$ conseguimos un subconjunto finito $\Phi_0 \subseteq \Phi$ tal que

$$\Phi_0^* \models_{\mathbb{L}} \psi^U \leftrightarrow \psi^V. \tag{✲}$$

Puesto que Φ_0 consiste en enunciados de primer orden, escogemos $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ finito de tal naturaleza que Φ_0 consista en $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$-enunciados.

Afirmación 2. $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ satisface el lema.

Demostración de la afirmación 2. Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras, $\pi : \mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$, donde suponemos $A \cap B = \varnothing$ (de lo contrario pasamos a una copia isomorfa de $\mathfrak{B}$ y usamos la condición de isomorfía). En $C = A \cup B$ definimos una $\boldsymbol{\mathcal{L}} \cup \{U, V, f\}$-estructura $\mathfrak{C} = \langle C, U, V, f \rangle$ (el lenguaje es relacional),

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{C}} &= R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}} \qquad \text{para } R \in \boldsymbol{\mathcal{L}} \\ U^{\mathfrak{C}} &= A \\ V^{\mathfrak{C}} &= B \\ f^{\mathfrak{C}} &\text{ tal que } f^{\mathfrak{C}} \restriction U^{\mathfrak{C}} = \pi. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{C}$ es modelo de Φ_0, y además

$$\mathfrak{C} \models_{\mathbb{L}} \Phi_0^*.$$

Por (✲), dado que

$$\mathfrak{C} \models \psi^U \leftrightarrow \psi^V$$

y como $\langle U^{\mathfrak{C}}\rangle_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{A}$, $\langle V^{\mathfrak{C}}\rangle_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$, deducimos que

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi.$$

□

En lo sucesivo sea $\mathbb{L}$ una lógica regular con $\mathbb{L}_I \leq \mathbb{L}$; además $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es relacional y ψ es un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado que no es equivalente a ningún LPO-enunciado. Para preparar la demostración del Teorema de Lindström, mostramos primero que existen estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ con

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi.$$

Si φ es un $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciado de primer orden, φ^* denota, como antes, un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado equivalente a φ.

Lema 6.5.11. *Con la notación recién referida, para cada $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ finito y toda $m \in \mathbb{N}$ existen $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ con*

$$\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong_m \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0, \quad \mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \text{ y } \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi. \tag{✻}$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ finito y, sin perder generalidad alguna, $m \geq 1$. Ponemos

$$\varphi \equiv \bigvee \{\varphi^m_{\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0} : \mathfrak{A} \in Str(\boldsymbol{\mathcal{L}}), \mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi\}$$

Por 6.4.13 la diyunción es finita, así que φ es de primer orden. Es claro que $\psi \to \varphi^*$ es universalmente válida; ya que ψ no es lógicamente equivalente a φ por hipótesis, por lo que no lo es a φ^*, existe una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \varphi^*$ y $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi$. En virtud de que $\mathfrak{B} \models \varphi$, existe una $\mathfrak{A} \in Str(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}$, de suerte que

$$\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong_m \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$$

(véase 6.4.19). □

En la prueba del teorema de Lindström usaremos el hecho de que el teorema 6.5.11 se puede formular en $\mathbb{L}$. Para $m \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ escogemos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ y $(I_n : n \leq m)$ con $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong_m \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$,

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi, \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi.$$

En caso de necesidad, apelamos a una copia isomorfa de $\mathfrak{B}$ para garantizar $A \cap B = \varnothing$. El lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}^+$ se origina de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ al agregar los siguientes símbolos: una constante c, un símbolo de 1-función f, símbolos de 1-relación P, U, V, W, símbolos de 2-relación $<, I$ y un símbolo de 3-relación G. Sea $\mathfrak{C}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}^+$-estructura que abarca a $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, a la isomorfía $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong_m \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ y que permite describir la m-isomorfía $(I_n : n \leq m) : \mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong_m \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ hasta tal punto que contiene a los universos y los isomorfismos parciales en los I_n como elementos. Formalmente,

(a) $C = A \cup B \cup \{0, \ldots, m\} \cup \bigcup_{n \leq m} I_n$.

(b) $U^{\mathfrak{C}} = A$ y $\langle U^{\mathfrak{C}} \rangle_{\mathfrak{C} \restriction \mathcal{L}} = \mathfrak{A}$.

(c) $V^{\mathfrak{C}} = B$ y $\langle V^{\mathfrak{C}} \rangle_{\mathfrak{C} \restriction \mathcal{L}} = \mathfrak{B}$.

(d) $W^{\mathfrak{C}} = \{0, \ldots, m\}$, $<^{\mathfrak{C}}$ es la relación de orden en $\{0, \ldots, m\}$, $c^{\mathfrak{C}} = m$ y $f^{\mathfrak{C}} \restriction W^{\mathcal{C}}$ es la función predecesor en $W^{\mathfrak{C}}$, esto es, $f^{\mathfrak{C}}(n+1) = n$ para $n < m$ y $f^{\mathfrak{C}}(0) = 0$.

(e) $P^{\mathfrak{C}} = \bigcup_{n \leq m} I_n$.

(f) $I^{\mathfrak{C}}(n, p)$ si $n \leq m$ y $p \in I_n$.

(g) $G^{\mathfrak{C}}(p, a, b)$ si $P^{\mathfrak{C}}(p) \wedge a \in dom(p) \wedge p(a) = b$.

Entonces, $\mathfrak{C}$ es un modelo de la conjunción χ de los siguientes $\mathbb{L}(\mathcal{L}^+)$-enunciados (en cantidad finita), que propicia la formulación de (❋) que buscamos. Observe que χ no depende de m; empleamos una notación de LPO que también nos servira después.

(i) $\forall\, p(P(p) \to \forall\, x, y(G(p, x, y) \to (U(x) \wedge V(y)))$.

(ii) $\forall\, p(P(p) \to \forall\, x, x', y, y'((G(p, x, y) \wedge G(p, x', y')) \to (x = x' \leftrightarrow y = y')$.

(iii) Para cada $R \in \mathcal{L}_0$ símbolo de n-relación,

$$\forall\, p(P(p) \to \forall\, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n((G(p, x_1, y_1) \wedge \cdots \wedge G(p, x_n, y_n)) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

Los incisos (i)-(iii) establecen que para $p \in P$, $G(p, ...)$ describe la gráfica de un isomorfismo parcial de la $\mathcal{L}_0$-subestructura inducida en U a la $\mathcal{L}_0$-subestructura inducida en V.

(iv) Los axiomas de Φ_{cpo} (conjunto parcialmente ordenado),

- ❀ $\exists\, x, y(x < y)$.
- ❀ $\forall\, x \neg(x < x)$.
- ❀ $\forall\, x, y, z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$.
- ❀ $\forall\, x, y((\exists\, u(x < u \vee u < x) \wedge \exists\, v(y < v \vee v < y)) \to (x < y \vee x = y \vee y < x))$,

y los enunciados $\forall\, x(W(x) \leftrightarrow (x = c \vee \exists\, y(y < x \vee x < y)) \wedge \forall\, x(W(x) \to (x < c \vee x = c))$ es decir, $<$ es la relación vacía y $W = \{c\}$ o W es el campo de $<$ y c es el mayor elemento; en ambos casos W es el campo de $<$, esto es, f la función predecesor.

(v) $\forall\, x(W(x) \to \exists\, p(P(p) \wedge I(x, p))$, es decir, si x está en el campo de $<$, entonces

$$I_x = \{p : P(p) \wedge I(x, p)\}$$

no es vacío.

(vi) $\forall x,p,u((f(x)<x\wedge I(x,p)\wedge V(u))\to\exists q,v(I(f(x),q))\wedge G(q,u,v)\wedge\forall x',y'(G(p,x',y')\to G(q,x',y')))$ (la propiedad de ida y vuelta).

(vii) Enunciado similar para la propiedad de vuelta.

(viii) $\exists xU(x)\wedge\exists yV(y)\wedge\psi^U\wedge(\neg\psi)^V$ (note que $U^{\mathfrak{C}}=A$, $V^{\mathfrak{C}}=B$, $\mathfrak{A}\models_{\mathbb{L}}\psi$, $\mathfrak{B}\models_{\mathbb{L}}\neg\psi$).

De lo previo obtenemos el siguiente resultado.

Hecho 6.5.12. *Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe un modelo $\mathfrak{C}$ de χ en el que el campo $W^{\mathfrak{C}}$ de $<^{\mathfrak{C}}$ consta exactamente de $m+1$ elementos.*

□

Hecho 6.5.13. *Supongamos $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$. Entonces se cumplen (a) o (b), donde*

(a) Existen $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A}\models_{\mathbb{L}}\psi$, $\mathfrak{B}\models_{\mathbb{L}}\neg\psi$ y

$$\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\cong\mathfrak{B}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0.$$

(b) En cada modelo $\mathfrak{D}$ de χ el campo $W^{\mathfrak{D}}$ de $<^{\mathfrak{D}}$ es finito.

Demostración. Afirmación 1. Si la $\boldsymbol{\mathcal{L}}^+$-estructura $\mathfrak{D}$ es modelo de χ en la que el campo $W^{\mathfrak{D}}$ de $<^D$ es infinito, entonces la U-parte y la V-parte de $\mathfrak{D}$ son universos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-subestructuras $\mathfrak{A}=\langle U^{\mathfrak{D}}\rangle_{\mathfrak{D}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ y $\mathfrak{B}=\langle V^{\mathfrak{D}}\rangle_{\mathfrak{D}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}}$ con $\mathfrak{A}\models_{\mathbb{L}}\psi$, $\mathfrak{B}\models_{\mathbb{L}}\neg\psi$ y $\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\cong_p\mathfrak{B}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$.

De hecho, dado que $\mathfrak{D}$ satisface (viii), ocurre $U^{\mathfrak{D}}\neq\varnothing$, $V^{\mathfrak{D}}\neq\varnothing$, y como $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es realcional, $U^{\mathfrak{D}}$ y $V^{\mathfrak{D}}$ son universos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-subestructuras. Por (viii) se cumple, además, que $\mathfrak{D}\models_{\mathbb{L}}\psi^V$ y $\mathfrak{D}\models_{\mathbb{L}}(\neg\psi)^V$, por lo que $\mathfrak{A}\models_{\mathbb{L}}$ y $\mathfrak{B}\models_{\mathbb{L}}\neg\psi$. De los enunciados (i)-(iii) se deriva que a cada $p\in P^{\mathfrak{D}}$ se le asocia, mediante $G^{\mathfrak{D}}$, un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ a $\mathfrak{B}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$, que denotamos p; de $P^{\mathfrak{D}}$ extraemos un subconjunto de I como sigue. Sean $f^0(c),f^1(c),f^2(c),\ldots$ abreviaciones para aplicaciones repetidas de f: c, $f(c)$, $ff(c)$,... Ya que $W^{\mathfrak{D}}$ es infinito y $c^{\mathfrak{D}}$ es el último elemento de $<^{\mathfrak{D}}$, $<^{\mathfrak{D}}$ tiene una cadena infinita de predecesores (f es la función predecesor (véase (iv)),

$$\cdots<^{\mathfrak{D}}(f^2(c))^{\mathfrak{D}}<^{\mathfrak{D}}(f(c))^{\mathfrak{D}}<c^{\mathfrak{D}}. \qquad (\dagger)$$

Hacemos

$$I=\{p:\exists n(I^{\mathfrak{D}}((f^n(c))^{\mathfrak{D}},p))\}$$

y mostramos que

$$I:\mathfrak{A}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\cong_p\mathfrak{B}\restriction\boldsymbol{\mathcal{L}}_0.$$

A saber, de (v) deducimos $I\neq\varnothing$; por (vi) y (vii), I tiene la propiedad de ida y vuelta. Por ejemplo, para la ida, si $p\in I$, digamos $(I^{\mathfrak{D}}((f^n(c))^{\mathfrak{D}},p)$ y $a\in A=U^{\mathfrak{D}}$, existe por (vi), una q con $I^{\mathfrak{D}}((f^{n+1}(c))^{\mathfrak{D}},q)$ (esto es, $q\in I$) tal que $q\supseteq p$ y $a\in dom(q)$. (1)

Supongamos que (b) no se cumple, de modo que existe un modelo de χ en el que el campo W de $<$ es infinito. Mediante $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$ conseguimos que el universo de este modelo sea numerable. De acuerdo con la afirmación (1), la U-parte $\mathfrak{A}$ y la V-parte $\mathfrak{B}$ cumplen con $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$, $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi$ y $\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$, porque como estructuras a lo sumo numerable parcialmente isomorfas $\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ y $\mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ son isomorfas (6.4.7(d)), con lo que se satisface (a).

Sea $\mathfrak{D}$ un modelo de χ con campo $W^{\mathfrak{D}}$ de $<^{\mathfrak{D}}$ infinito. Para lograr un modelo numerable de χ a partir de $\mathfrak{D}$ con campo infinito, usamos $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$, pero como éste concierne enunciados y no conjuntos infinitos de enunciados, debemos asegurarnos de expresar que el campo de $<$ es infinito, en un sólo enunciado. Esto se consigue enseguida. En vista de que $W^{\mathfrak{D}}$ es infinito, $<^{\mathfrak{D}}$ tiene una cadena infinita de predecesores (véase (✢),

$$\cdots < \mathfrak{D}(f^2(c))^{\mathfrak{D}} <^{\mathfrak{D}} (f(c))^{\mathfrak{D}} <^{\mathfrak{D}} c^{\mathfrak{D}}.$$

Sean Q un nuevo símbolo de 1-relación y θ es el $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}}^+ \cup \{Q\})$-enunciado

$$\theta \equiv Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \to (f(x) < x \wedge Q(f(x)))),$$

que expresa Q contiene a c y cada elemento de Q tiene un $<$-predecesor inmediato que pertenece a Q.

Ponemos

$$Q^{\mathfrak{D}} = \{(f^n(c))^{\mathfrak{D}} : n \in \mathbb{N}\}$$

así que

$$(\mathfrak{D}, Q^{\mathfrak{D}}) \models_{\mathbb{L}} \chi \wedge \theta.$$

En virtud de que $\chi \wedge \theta$ es satisfacible, por $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$ existe un modelo a lo sumo numerable $(\mathfrak{E}, Q^{\mathfrak{E}})$ de $\chi \wedge \theta$. Por tanto, $\mathfrak{E}$ es un modelo a lo sumo numerable de χ, y el campo $W^{\mathfrak{E}}$ de $<^{\mathfrak{E}}$ es infinito. ❐

Como resumen de 6.5.12 y 6.5.13 formulamos el próximo teorema.

Teorema 6.5.14. *Sean $\mathbb{L}$ una lógica regular con $\mathbb{L}_1 \leq \mathbb{L}$ y $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ un lenguaje relacional y ψ un $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$-enunciado que no es equivalente a ningún enunciado de primer orden. Entonces, se cumple alguna de las siguientes aseveraciones.*

(a) Para todo lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ finito existen $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi$, $\mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \neg\psi$ y $\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \cong \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$.

(b) Para un símbolo de 1-relación W y un lenguaje adecuado $\boldsymbol{\mathcal{L}}^+ \supseteq \boldsymbol{\mathcal{L}} \cup \{W\}$ y $\boldsymbol{\mathcal{L}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{L}}$ finito, existe un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}}^+)$-enunciado χ que cumple lo siguiente.

(i) En cada modelo $\mathfrak{C}$ de χ, $W^{\mathfrak{C}}$ es finito no vacío.

(ii) Para cada $m > 1$ existe un modelo $\mathfrak{C}$ de χ en el que $W^{\mathfrak{C}}$ tiene exactamente m elementos.

Finalmente, el Teorema de Lindström.

Teorema 6.5.15 (Teorema de Lindström). *Si* $\mathbb{L}$ *es una lógica regular con* $\mathbb{L}_I \leq \mathbb{L}$, *y* $\boldsymbol{LoSk}(\mathbb{L})$ *y* $End(\mathbb{L})$, *entonces* $\mathbb{L} \sim \mathbb{L}_I$.

Demostración. Para llegar a una contradicción, supongamos que ψ es un $\mathbb{L}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado que no es equivalente a ningún $\mathbb{L}_I(\boldsymbol{\mathcal{L}})$-enunciado. Por 6.5.8 suponemos que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es relacional, y en virtud de $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$, por 6.5.10, ψ depende de una cantidad finita de símbolos, por lo que tomamos un subconjunto finito $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}$ tal que cualesquier $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \equiv \mathfrak{B} \restriction \boldsymbol{\mathcal{L}}_0$, entonces

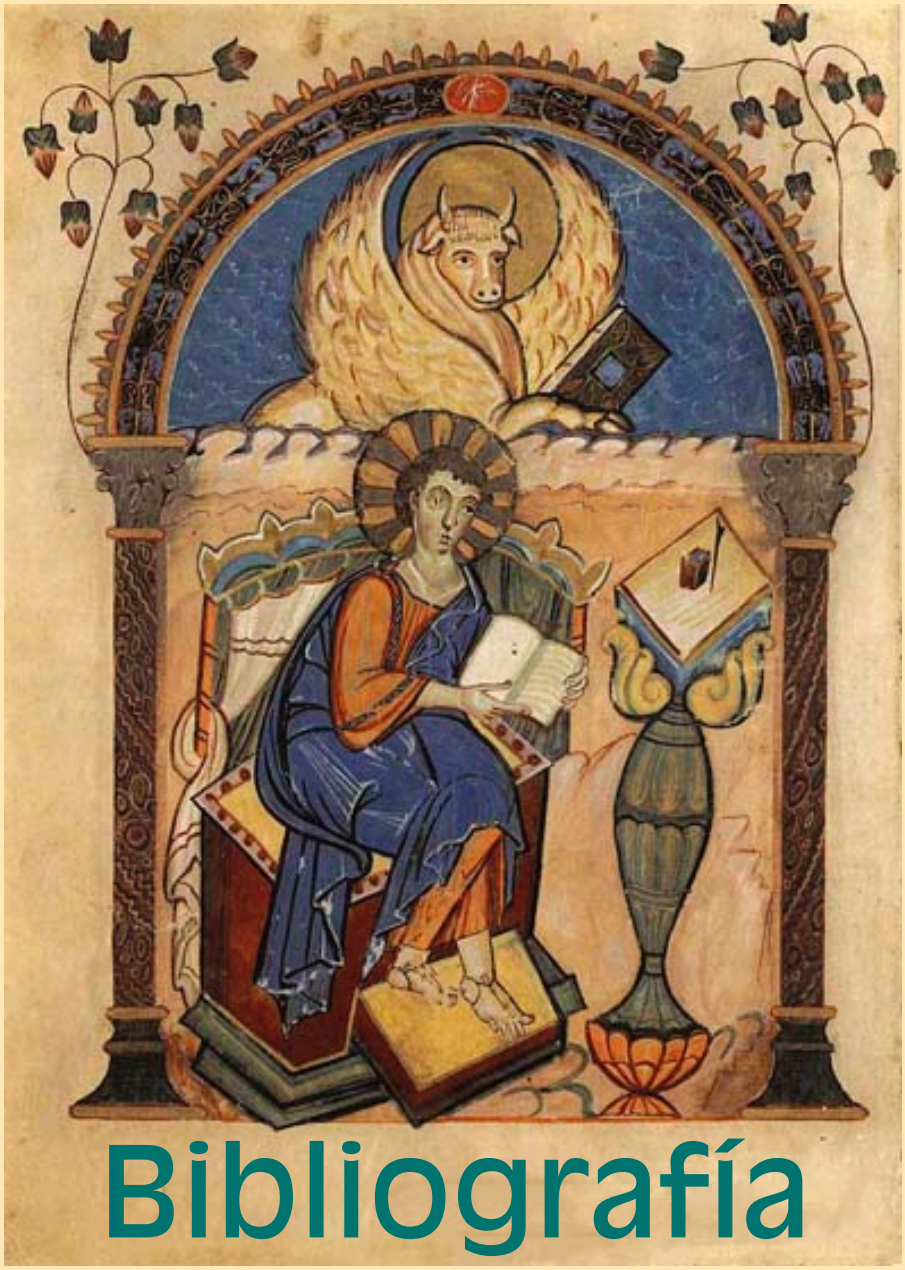
$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{L}} \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_{\mathbb{L}} \psi.$$

Por tanto, en 6.5.14 no se satisface (a), se debe cumplir (b), de modo que existe un $\mathbb{L}$-enunciado χ que satisface 6.5.14(b)(i), (ii), lo que se opone a $\boldsymbol{Endl}(\mathbb{L})$. En efecto, por (i), el conjunto de enunciados

$$\{\chi\} \cup \{W \text{ contiene al menos } n \text{ elementos} : n \in \mathbb{N}\}$$

no es satisfacible, por (ii) todo subconjunto finito tiene modelo.

En cierto lugar el señor Keuner vio una silla espléndidamente labrada y la adquirió. –Espero –decía– que mis cavilaciones sobre la manera como debería organizarse una vida en la que una silla como ésta no despertara la atención o en la que el disfrute que proporciona no tuviera nada de deshonroso ni de distinguido, espero, que estas reflexiones me lleven a buen puerto.
«Algunos filósofos –contaba el señor Keuner – se han preguntado cómo sería una vida en la que toda situación apurada se decidiera por una circunstancia cualquiera. Si disfrutáramos de una buena vida no necesitaríamos de hecho ni grandes móviles, ni consejos demasiado sabios, y toda esta complicada elección que precede a los momentos decisivos desaparecería por completo» dijo el señor Keuner lleno de entusiasmo por su descubrimiento.



Bibliografía

Bibliografía

[An21] R. Antonsen, *Logical Methods, The Art of Thinking Abstractly and Mathematically*, Springer-Verlag, Switzerland, 2021.

[BaSie94] F. Baader, J. Siekmann, *Unification theory*. En *Handbook of Logic in artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 2, D. Gabbay, C. Hogger and J. Robinson Eds., 40–125, Oxford University Press, 1994.

[Be12] M. Ben-Ari, *Mathematical Logic for Computer Science*, Third Ed., Springer-Verlag, UK, 2012.

[vBen10] J. van Benthem, *Modal Logic for Open Minds*, CSLI Publications, 2010.

[Ba75] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Ba73] J. Barwise, *Back and Forth through infinitary logic*, en Studies in Model Theory S. Morley y J. Barwise Eds., MAA, EUA, 1973.

[BaKaMa78] J. Barwise, M. Kaufmann y M. Makkai, *Stationary Logic*, Ann. Math. Logic **13**(1978), 271-324.

[BaFe85] J. Barwis, S. Feferman, *Model-theoretic logics.* (Eds.) Perspect. Math. Logic Springer-Verlag, New York, 1985.

[Bl01] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[BoGe93] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1993.

[Bo97] E. Boerger, E. Graedel, Y. Gurevich, *The Classical Decision Problem*, Springer-Verlag, 1997.

[Bo02] G. Boolos, J. Burguess, R. Jeffery, *Computability and Logic*, Fourth Ed., Cambridge Univ. Press, 2002.

[Br78] J. Bridge, *Beginning Model theory*, Clarendon Press, Oxford, U. K., 1978.

[Ca58] L.Carroll, *Mathematical Recreations of Lewis Carroll, Symbolic Logic, The Game of Logic*, Dover, 1958.

[ChKe12] C. Chang y H. J. Keisler, *Model Theory*, 3rd Ed., Dover, 2012.

[Che95] B. F. Chellas, *Modal Logic, An Introduction*, Cambridge University Press, 1995.

[Co08] N. Cocchiarella, M. Freund, *Modal Logic*, Oxford University Press, 2008.

[CoLa00] R. Cori, D. Lascar *Mathematical Logic. A Course with Excercises, I*, Oxford University Press, 2000.

[Co79] J. Cowles, *The theory of Archimedean real closed fields*. Fund. Math. **103**(1979), 29-146.

[Co81] J. Cowles, *The Henkin Quantifier and Real Closed Fields*, Zetischr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.**25**(1981), 549-555.

[Co82] J. Cowles, *Generalized Archimedean fields and logics with Malitz quantifiers.* Fund. Math. **112**(1982), 45-59.

[Cu16] D. Cunningham, *Set Theory*, Cambridge University Press, 2016.

[Cu12] D. Cunningham, *A Logical Introduction to Proof*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[Da04] D. Van Dalen, *Logic and Structure*, 4th. Ed., Springer-Verlag, 2004.

[De88] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg, 1888.

[De93] K. Devlin, *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.

[Di75] M. A. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1975.

[Di08] C. Di Prisco, *Teoría de Conjuntos*, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2008, República Bolivariana de Venezuela.

[EbFlTh18] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer Spektrum, Deutschland, 2018.

[EbFlTh21] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Third Ed., Springer-Verlag, Switzerland, 2021.

[Ek77] P. Eklof, *Applications of Logic to the problem of splitting abelian groups*, Log. Collq'76, North-Holland, Amsterdam, 1977, 287-299

[Ek79] P. C. Eklof, *Infinitary equivalence of abelian groups*, Fund. Math. **81**(1974)305-314.

[EkMe81] P. C. Eklof, A. H. Mekler, *Infinitary Stationary Logic and Abelian Groups*, Fund. Math. **112**(1981)1-15.

[EkMe02] P. Eklof, A. Mekler, *Almost free modules*, Revised Ed., North-Holland, Amsterdam, 2002

[Eps06] R. Epstein, *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundation of Logic*, Princeton Univ. Press, 2006.

[FeVi09] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica matemática I: Lógica proposicional, Intuicionista y Modal*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2009.

[FeVi11] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica Matemática II Lógica clásica, Intuicionista y Modal*, UAMI, 2011.

[FeVi13] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines I, Universidad Autónoma Metropolitana, 2013.

[FeVi17] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines II, Universidad Autónoma Metropolitana, 2017.

[Fi07] M. Fitting, *Incompletness in the land of sets*, College Pub, USA, 2007.

[Fl75] J. Flum, *First-order logic and its extensions*, ISILC Logic Conference (Proc. Internat. Summer Inst. and Logic Colloq., Kiel, 1974), Lecture Notes in Math., Vol. **499** Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975, págs. 248–310

[Fl85] J. Flum, *Characterizing logics*, En [BaFe85], 77-120.

[Fr70] G. Frege, *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*, en van Heijennort, 1970.

[Fr79] G. Frege, *Begriffschrift*, Halle, Nebert, 1879.

[Fr17] S. Friedman, *Higher Recursion Theory*, Cambidge University Press, UK, 2017.

[GaVaVi24] J. A. Gallardo Quiroz, E. A. Valenzuela Nuncio, L. M. Villegas Silva, *Aplicaciones al álgebra de lógicas abstractas y teoría de conjuntos*, Memorias Soc. Mat. Mexicana **8**(2024), 17-52.

[Gi00] R. Girle, *Modal Logic and Philosophy*, McGill-Queen's University Press, 2000.

[GoJu95] M. Goldstern, H. Judah, *The incompletness Phenomenon: A new course in mathematical Logic*, A. K. Peters, 1995.

[Gr75] J. Green, *Consistency properties for finite quantifier languages*, In Infinitary Logic: In Memoriam Carol Karp, Ed. G. Kueker, Lecture Notes in Mathematics # 492, Springer-Verlag, Berlin, 73-123, 1975.

[He04] S. Hedman, *A First Course in Logic*, Oxford Univ. Press, 2004.

[He70] J. Heijenoort (ed.) *Frege and Gódel, Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard University Press, 1970.

[Hi05] P. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2005.

[Ho97] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[HuCr96] G. Hughes, E. Cresswell, *M.J. A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, 1996.

[HrJe99] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to Set Theory*, M. Dekker Inc., 3rd Ed., 1999

[Ke71] H. J. Keisler, *Model theory for infinitary logic*, North-Holland, 1971.

[Ko18] R. Kossak, *Mathematical Logic. On Numbers, Sets, Structures and Symmetry*, Springer-Verlag, Switzerland, 2018.

[La19] M. Lawson, *A First Course in Logic*, Taylor & Francis Group, USA, 2019.

[Le02] A. Levy, *Basic Set Theory*, Dover, 2002.

[Lu77] J. Lukasiewicz, *La Silogística de Aristóteles*, Tecnos, 1977

[MaMa77] M. Magidor, J. Malitz, *Compact extensions of $L(Q)$*, Ann. Math. Logic (1977), 217-261.

[MaShSt76] J. A. Makowsky, S. Shelah y J. Stavi, *Δ-Logics and Generalized Quantifiers*, Annals of Mathematical Logic **10**(1976)155-192.

[Ma79] J. Malitz, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, USA, 1978.

[Ma02] D. Marker, *An Introduction to Model Theory*, Springer-Verlag, 2002.

[Me76] A. H. Mekler, *Applications of Logic to Group Theory*, tesis doctoral, Universidad de Stanford, 1976.

[Me04] E. Mendelson, *An Introduction to Mathematical Logic*, Sixt Ed., Taylor & Francis Group, USA, 2015.

[MeNe96] G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*, North-Holland, 1996.

[Mi00] G. Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic-Plenum Publishers, 2000.

[NiSaVi22] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *Teoría de conjuntos, álgebra y grandes cardinales*, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, CDMX, 2022, México.

[NiSaVi26] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *Álgebra, categorías y grandes cardinales*, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, CDMX, 2026, México.

[NiSaVi20] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *Compactness Phenomena around the class of Locally Projective Modules.* Houston Journal of Mathematics **46**(2020)859-881.

[NiSaVi] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza y L. M. Villegas Silva, *"Free" Modules and some Large Cardinals*, propuesto para publicación

[NeSh94] A. Nerode, R. Shore, *Logic for Applications*, Springer-Verlag, 1994.

[PrDe11] A. Prestel, C. Delzell, *Mathematical Logic and Model Theory*, Springer-Verlag, UK, 2011.

[Pr92] A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg, 1992.

[Pr01] G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[Qu82] W. V. O. Quine, *Methods of Logic*, Harvard University Press, 1982.

[Ra06] W. Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 2006.

[Ru90] J. E. Rubin, *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Saunders Co. Pub., 1990.

[Ru05] B. Russell, *On Denoting*, Mind, 1905.

[Sc09] R. Schindler, *Logische Grundlagen der Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[Sh01] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2001.

[Sm95] R. Smullyan, *First Order Logic*, Dover, 1995.

[Va85] J. Väänänen, *Set-Theoretic Definability of Logics* en J. Barwise y S. Feferman (editores), *Model-Theoretic Logics*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1985, págs. 597-644.

[Va] E. A. Valenzuela Nuncio, *Compactness, Ineffability and Combinatorics around Abstract Logics I*, propuesto para publicación.

[ViRoMi00] L. M. Villegas Silva, F. E. Miranda Perea, et. al. *Conjuntos y modelos: un curso avanzado*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2000.

[Wa18] A. Wasilewska, *Logics for Computer Science*, Classical and Non-Classical, Springer-Verlag, Switzerland, 2019.

[Ze09] M. Zeman, *More fine structural global square sequences.* Arch. Math. Logic **48**(2009), 825-835.

Índices

Índice de símbolos

Índice alfabético

El centro y los cuatro rumbos del mundo
Códice Fejérváry-Mayer

Así lo vinieron a decir,
así lo asentaron en su relato,
y para nosotros lo vinierón a dibujar en sus papeles
los ancianos, las ancianas.
Eran nuestros abuelos, nuestras abuelas,
nuestros bisabuelos, nuestras bisabuelas,
nuestros tatarabuelos, nuestros antepasados.
Se repitió como un discurso su relato,
nos lo dejaron,
y vinieron a legarlo
a quienes ahora vivimos,
a quienes salimos de ellos.
Nunca se perderá, nunca se olvidará,
lo que vinieron a hacer,
lo que vinieron a asentar en las pinturas:
su nombre, su historia, su recuerdo.
Así en el porvenir
jamás perecerá; jamás se olvidará,
siempre lo guardaremos
nosotros, hijos de ellos, los nietos,
hermanos, bisnietos, tataranietos, descendientes.
Quienes tenmos su sangre y color.
Lo vamos a decir, lo vamos a comunicar
a quienes todavía vivirán, habrán de nacer,
los hijos de los mexicas, los hijos de los tenochas.
Y esta relación la guardó Tenochtitlan
cuando vinieron a reinar todos los grandes,
estimables ancianos, los señores y reyes tenochcas.
Esta antigua relación oral,
esta antigua relación pintada en los códices,
nos la dejaron en México,
para ser aquí guardada...
Aquí, tenochcas, aprenderéis cómo empezó
la renombrada, la gran ciudad,
México-Tenochtitlan,
en medio del agua, en el titular,
en el cañaveral, donde vivimos,
donde nacimos,
nosotros los tenochcas.

Crónica mexicáyotl

Historias del Señor Keuner,
B. Brecht

Una persona preguntó al señor K. si Dios existía. Este dijo: –Te aconsejo que primero reflexiones si tu proceder se modificaría según fuera la respuesta a esta pregunta. Pues si no tuviera que cambiar para nada, más valdría olvidarnos de la pregunta. Y si cambiara, en este caso al menos podría ofrecerte alguna ayuda diciéndote que ya te habrías decidido de antemano: necesitarías un Dios.

El señor K. ayudó a una persona que se hallaba en un trance difícil. Una vez resuelto, ésta no dio muestras del menor agradecimiento. Pero el señor K. llenó de asombro a sus amigos cuando se lamentó vivamente de la ingratitud de aquel sujeto. Consideraban que el proceder del señor K. era poco delicado e incluso llegaron a decirle:
–¿Y no sabes que no debe hacerse un favor por el puro placer de recibir gratitud? El hombre es un ser demasiado débil para ser agradecido.
–¿Y yo? –preguntó el señor K.– ¿es que acaso no soy también humano? ¿Por qué no podría ser yo lo suficientemente débil como para esperar el agradecimiento? La gente cree reconocer su necedad por confesar que ha sido víctima de una infamia. ¿Y por qué?

El señor Keuner se estaba refiriendo a la mala costumbre de tragarse calladamente la injusticia recibida y relató la siguiente historia:
«Un transeúnte se encontró en una ocasión con un muchacho que gemía en silencio y le preguntó por el motivo de su pesar.
–Había ahorrado dos pesos para ir al cine –le respondió el muchacho –pero se me ha

acercado un chico y me ha arrancado uno de la mano –y diciendo esto señaló a otro muchacho que se divisaba en un punto algo alejado.
–¿Y no has gritado auxilio? –le preguntó el caballero.
–¡Claro! –dijo el muchacho gimoteando con más fuerza. –¿Y nadie te ha oído? –le preguntó de nuevo cariñosamente.
–No –sollozó el muchacho.
–¿Pero es que no puedes gritar más fuerte? –le preguntó por fin el caballero.
–No – repuso el muchacho con una nueva esperanza en sus ojos. El caballero se sonrió.
–Pues dame el que te queda –le dijo por toda respuesta –y arrebatándole el peso que le quedaba siguió despreocupadamente su camino».

Un profesor de filosofía acudió a la casa del señor K. para mostrarle su saber. Pasado un rato, el señor K. le dijo: –Estás sentado de una manera incómoda, hablas incómodamente, piensas incómodamente. Encrespado, el profesor de filosofía respondió: –No se refería a mí lo que yo quería saber, sino al contenido de lo que estaba diciendo. No tiene ningún sentido –dijo el señor Keuner. –Andas con torpeza y no he visto que tus pasos te condujeran a ninguna parte. Hablas de manera obscura y tu conversación no ha arrojado ninguna luz. Basta ver tu actitud para perder las ganas de conocer tu objetivo.

El señor K. hizo las siguientes preguntas: «Cada mañana, mi vecino pone música en su gramófono. ¿Por qué pondrá música? Ya lo oigo, porque hace gimnasia. ¿Y por qué hace gimnasia? Porque necesita fortalecerse, es lo que me dicen. ¿Pero, por qué querrá fortalecerse? Porque tiene que vencer a sus enemigos de la ciudad, responde él. ¿Y por qué tiene que vencer a sus enemigos? Porque quiere comer, oigo decir».
Cuando el señor K. supo que su vecino ponía música para hacer gimnasia, hacía gimnasia para fortalecerse, quería fortalecerse para sacudir mejor a sus enemigos, y sacudía a sus enemigos para comer, siguió preguntando: –¿Y por qué come?

Lob des Kommunismus

Er ist vernünftig, jeder versteht ihn. Er ist leicht.
Du bist doch kein Ausbeuter, du kannst ihn begreifen.
Er ist gut fŸr dich, erkundige dich nach ihm.
Die Dummköpfe nennen ihn dumm, und die Schmutzigen nennen ihn schmutzig.
Er ist gegen den Schmutz und gegen die Dummheit.
Die Ausbeuter nennen ihn ein Verbrechen.
Aber wir wissen:
Er ist das Ende der Verbrechen.
Er ist keine Tollheit, sondern
Das Ende der Tollheit.
Er ist nicht das Chaos
Sondern die Ordnung.
Er ist das Einfache
Das schwer zu machen ist.


BERLIN
ENSEMB