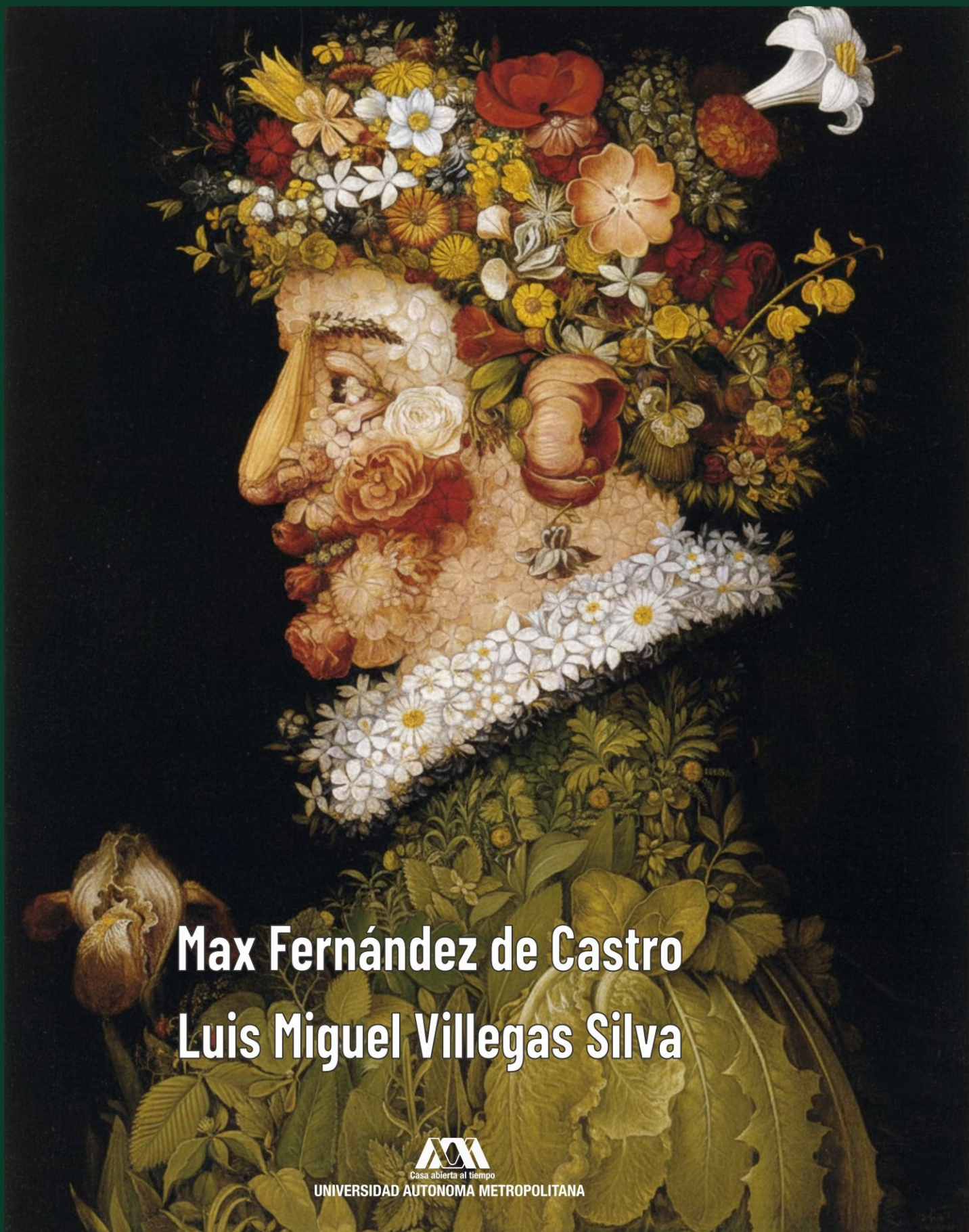
Lógica Matemática de Primer Orden Clásica y no Clásica

Volumen I



Max Fernández de Castro
Luis Miguel Villegas Silva

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Lógica matemática de primer orden clásica y no clásica

Volumen I

Biblioteca de signos
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

Lógica matemática de primer orden clásica y no clásica

Volumen I

Max Fernández de Castro
Luis Miguel Villegas Silva

Casa abierta al tiempo

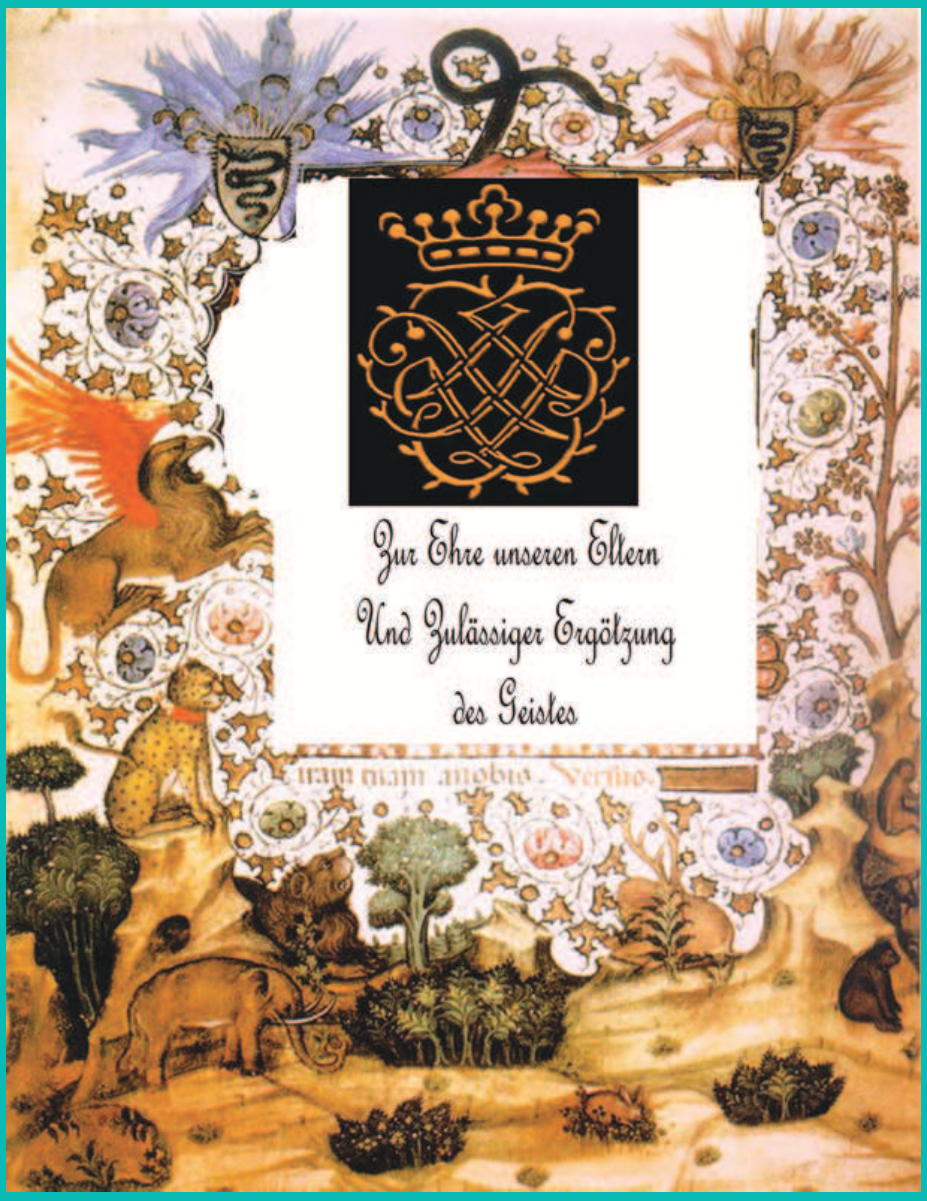
Imagen de portada: Pintura que representa la Primavera del artista Giuseppe Arcimboldo
Formación: Salvador E. Vazquez Moctezuma

Unidad Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, 09340, México D.F.
Teléfono; 5804-4600 ext. 2030
libros.filosofiauami@gmail.com

Primera edición, 2026

ISBN de la colección: 978-607-28-3673-0
ISBN de la obra (Vol. I): 978-607-28-3674-7

Este libro ha sido evaluado mediante dictamen anónimo por al menos dos especialistas en la materia.


Zur Ehre unseren Eltern
Und Zulässiger Ergötzung
des Geistes

A Vera y a María

A Jesús, Bertha, Sergio, Víctor,
Emilio, Nicolás y Enriqueta

Prefacio

Antes de describir la naturaleza de esta obra, en dos volúmenes, consideramos pertinente aclarar algunos puntos. El trabajo que el lector tiene en sus manos tiene como antecedente el libro [FeVi11], donde se describe nuestra intención y objetivos al escribirlo. Conociendo la falta de demanda que tienen generalmente los textos de matemáticas y filosofía, para gran sorpresa nuestra, el libro tuvo éxito y se agotó, por lo que pensamos producir una nueva edición. Por supuesto, habríamos de considerar las sugerencias y experiencia que obtuvimos desde la elaboración y publicación del libro, pero las observaciones fueron tantas y tan diversas, provenientes no sólo de

alumnos de la UAM, sino de otras universidades y centros de enseñanza en México y del extranjero, que paulatinamente empezamos a considerar la escritura de una obra nueva. En vista de que el trabajo original fue bien recibido, es natural conservar muchas de sus figuras principales, pero la transformación ha sido total. Así, este nuevo libro conserva una parte de los temas tratados en la obra original, pero renovados radicalmente, incorporando las indicaciones recibidas y la experiencia acumulada durante estos años. Pronto entraremos en los detalles de los volumenes presentes, pero vale la pena mencionar que el planteamiento es distinto. En lugar de sólo describir los fundamentos de la lógica matemática, métodos de prueba y sus semánticas, hemos integrado diversas figuras que representan más cercanamente la amplia variedad de temas que conforman la lógica de primer orden clásica y no clásica, siempre con el ánimo de que el lector tome contacto, conozca estos temas y sea capaz de profundizar en ellos por sí mismo o auxiliándose de otros textos. Se presentan en detalle varias aplicaciones concretas que ilustran desde la elección del lenguaje apropiado, hasta las demostraciones características en la situación dada. Quizá el cambio más importante en nuestra concepción del libro es que pasamos de presentar el material con sus posibles aplicaciones a otras áreas de las matemáticas, a darle a la lógica el reconocimiento que se merece por sí misma. Además, hemos hecho particular énfasis en que lejos de ser una diciplina acabada y auxiliar, tiene una asombrosa vitalidad, desarrolla sus propias metas y objetivos, resuelve desafios recientes, y transforma otras áreas de las matemáticas. Las incorporaciones, modificaciones y adecuaciones que hemos hecho son de tal extensión, que tuvimos que separar la obra en dos volúmenes.

Tanto a la matemática como a la filosofía se les ha considerado paradigmas de conocimientos a priori, caracterizados por el uso de un vocabulario preciso y por el rigor de sus métodos de argumentación. En un terreno común a ambas disciplinas, surgió la lógica matemática como resultado de la reflexión, es decir, de la investigación de la mente sobre su propia manera de proceder y, en particular, como un intento de codificar toda forma de razonamiento correcto y de construir un lenguaje perfecto, adaptado a las necesidades de toda ciencia posible. Leibiniz imaginó un instrumento de la razón que tuviera dos facetas: una *lingua characterica* y un *calculus ratiocinator*, es decir, un lenguaje que cumpliera dos objetivos formidables: uno es que fuese capaz de expresar todos los conceptos e ideas científicas sin ambigüedad alguna. Cualquier científico entrenado para leerlo podría usarlo para comunicar sus ideas con precisión aún a colegas de otras disciplinas. Por otro lado, debiera ser suceptible de encontrar soluciones a través de meras manipulaciones simbólicas. El lector recordará aquellos problemas que se pedía traducir cierta información a una ecuación de segundo grado. Una vez obtenida ésta no era necesario recurrir al ingenio o a la creatividad, sino que bastaba seguir reglas que transformaban unas expresiones en otras (sin atender a su significado) para hallar la solución. Leibniz quería que lo mismo pudiese hacerse con todo problema científico escrito en su lenguaje, así que cuando Frege, en 1879 ([Fr70]), presentó por vez primera la lógica matemática moderna, creyó que había dado el primer paso hacia la consecución de ese programa. Aunque es un objetivo gigantesco puede decirse que en cierta medida se consiguió, y los métodos que se desarrollaron

desde esa fecha hasta la década de los treinta mostraron las virtudes, pero también las limitaciones de ese intrumento, lo que obligó a los filósofos a renunciar a la idea de un lenguaje universal en que pudiese decidirse la validez de cualquier argumentación. Esta capitulación del universalismo dio pie a una floreciente multiplicación de lógicas y disciplinas afines, desarrolladas para subsanar las limitaciones mencionadas, que fueron paulatinamente ganando la aceptación y el interés de los investigadores. En la actualidad este proceso sigue en plena expansión, y sistemas lógicos de los más diversos tipos han probado su fertilidad en muchos otros campos del conocimiento. Este es el objetivo de lo que actualmente se conoce como lógicas abastractas, mismas que tratan de extender las virudes de la lógica de primer orden, pero incorporando figuras que las hagan más expresivas; en buena medida, el objeto de esta obra es preparar al lector para abordar esta nueva disciplina. El ingenio y la creatividad que subyacen a este proceso invitan a esperar resultados insólitos. Con una visión profética, Carnap escribió (en 1934) a este respecto que se abría ante nosotros un océano ilimitado de posibilidades. A nosotros nos gustaría describir este devenir usando una frase de Alicia de Lewis Carroll (un lógico formidable): *Después de lo que me ha ocurrido este día, ya casi nada me parece imposible*.

No obstante, la mayoría de los estudiantes permanecen indiferentes a estos desarrollos. Aun los que han tenido la suerte de elegir como profesión la matemática o la filosofía, carecen de una buena formación en lógica. En muchas instituciones de educación superior de nuestro país, donde cabría esperar un interés creciente por esta disciplina, reflejado en los programas de las carreras afines a las mencionadas, encontramos uno que otro curso de nuestra materia casi siempre con información meramente introductoria que deja al alumno, en el mejor de los casos con una idea muy pobre de los temas tratados, o bien genera en los estudiantes una aversión a la materia. La lógica se enseña como algo acabado, con muy poca relación con problemas contemporáneos. El estudiante no sólo adolece de la falta de conocimientos básicos, sino que tampoco desarrolla habilidades para el pesamiento crítico. Algo indispensable como es qué significa o cómo se conduce una demostración, cómo se constituye un argumento, cuáles argumentos son válidos, etc. queda en la más tétrica oscuridad. La disculpa siempre es la misma: son conocimientos que se adquieren sobre la marcha; la consecuencia es la falta de habilidad de los alumnos o egresados para describir simbólicamente una situación, la incapacidad para elaborar razonamientos lógicos y deducir conclusiones correctas de una situación dada, la inseguridad al efectuar una demostración o la imposibilidad de moverse entre el pensamiento de diversas personas, o sistemas axiomáticos distintos; ya ni mencionar su posible incorporación al trabajo profesional en estas áreas.

Los autores se han encontrado una y otra vez con este escenario, por lo que consideran necesario contribuir en algo para remediarlo. La lógica matemática crece inexorablemente, da lugar a nuevas disciplinas, interactúa con las ciencias de la computación en muy diversos contextos y extiende sus aplicaciones a la lingüística, la filosofía de la ciencia, la teoría del conocimiento, la inteligencia artificial, los sistemas expertos, etc., sin mencionar la maravillosa interacción que se desarrolla entre la lógica mate-

mática y la teoría de conjuntos. La educación tradicional no permite incursionar en estas nuevas disciplinas pues carece de la formación en lógica matemática necesaria para tener éxito en estos ámbitos. *Poner la ciencia en lengua diaria: he ahí un gran bien que pocos hacen* (*José Martí*).

Es importante en este punto destacar que nosotros consideramos diversas ramas de la lógica, como la lógica clásica, la lógica modal, la lógica intuicionista, y algunas extensiones de la lógica de primer orden, hasta llegar a introducir las lógicas abstractas. Las lógicas no clásicas han dejado de ser vistas como una excentricidad de un grupo de pensadores alejados de la realidad, y se han incorporado a la labor cotidiana en diversas disciplinas, mayormente en las ciencias de la computación, la teoría de juegos, la teoría de decisión y muchas otras. Encontramos una seria carencia de libros sobre lógica en español, pero aún en otros idiomas, los textos disponibles no incorporan en forma unificada los temas que se han vuelto indispensables en el presente.

Tales son las razones para escribir esta obra. Aquí se presentan con toda formalidad las diversas nociones de la lógica acompañadas de numerosos ejemplos y ejercicios. Tratamos de explicar con la mayor claridad posible cada una de las construcciones planteadas, pero sin llegar a extremos innecesarios. Sabemos que un extremo es tan nocivo como el otro y que un autor que se excede en sus explicaciones condena al lector a momentos de fastidio o lo limita en su crecimiento intelectual. Escribimos pensando en un estudiante universitario promedio, pero también en un lector autodidacta. Pero sí hemos sido especialmente pródigos en la parte introductoria tanto del capítulo I como del II, porque la experiencia y las indicaciones recibidas revelan que el inicio en el estudio de la lógica es especialmente difícil.

Nuestro punto de partida fueron los cursos de lógica que se imparten en la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa (licenciaturas y posgrados), pero obviamente el contenido se adecúa a los cursos que se imparten en numerosas instituciones de México y el extranjero.

El libro está diseñado de forma tal que pueda leerse de muy diversas maneras. Por un lado hay tres niveles de profundidad para lectores con diferentes intereses, o para un mismo lector que desee realizar una primera lectura esquemática para sucesivamente profundizar en los temas tratados. Otra posibilidad es que el lector no desee leer los dos volumenes, sino que se interese por cubrir únicamente un determinado tema. En efecto, el libro está elaborado de tal suerte que algunos capítulos puedan leerse con cierta independencia del resto. No obstante, este tratamiento conlleva el hecho de que, en ocasiones, hemos debido repetir nociones, definiciones y técnicas, para no presuponer que el lector ya leyo tal o cual capítulo.

El capítulo introductorio presenta de manera informal algunas de las nociones centrales de la lógica. Se trata de dar al lector, en una primera aproximación, una idea del problema central que la lógica intenta resolver y de algunos de los métodos empleados para tal propósito. De paso se hacen algunas breves incursiones en la historia de la lógica, lo que permite al lector apreciar la fecundidad y originalidad de los métodos que está por aprender. Damos una brevísima introducción a la teoría silogística aristotélica, a los métodos lúdicos de Lewis Carroll y al análisis gramatical

fregeano, lo cual permite entrever la teoría de los cuantificadores generalizados y la especificidad de la lógica moderna. El capítulo finaliza con los métodos de decisión para la lógica monádica diseñados por Hilbert y Ackerman, y con algunas lecciones de simbolización.

El segundo capítulo presenta una definición rigurosa de la lógica de primer orden, considerando su sintaxis y semántica, además de la importante noción de consecuencia lógica. Aquí hemos incorporado numerosos ejemplos para ilustrar estos conceptos y, más aún, para practicar la expresión simbólica de situaciones matemáticas o de otra índole. Además, tratamos nociones auxiliares como las de función y relación para trabajar adecuadamente la semántica. Describimos cómo formular algunas teorías comunes en álgebra en un lenguaje formal adecuado, pero también tratamos de presentar ejemplos nada comunes y poco frecuentes incluso de áreas fuera de las matemáticas. De acuerdo con nuestra experiencia, la noción formal de satisfacción en lógica de primer orden es uno de los asuntos que más dificultades presenta para el lector, por lo cual hemos sido especialmente cuidadosos al presentar esta noción. Tratamos de desarrollarla gradualmente a través de numerosos ejemplos hasta llegar a su presentación formal y la demostración de varios resultados asociados, donde las demostraciones pueden volverse demasiado repetitivas, de suerte que en ocasiones omitimos detalles, y ocasionalmente somos ciertamente informales, tratando de recrear, hasta cierto punto, lo que ocurre en la práctica diaria.

Inseparables a la semántica encontramos a las estructuras de interpretación, que son el motivo del capítulo III; estudiamos a los conjuntos definibles y continuamos con el tratamiento, en este caso de sus interpretaciones, de algunas estructuras algebraicas. Aparece la lógica con igualdad y cómo podemos proceder con modelos que no necesariamente respetan igualdad. Examinamos con especial cuidado varias estructuras matemáticas como son las numéricas, módulos, gráficas, órdenes, etc. Disertamos también sobre el tamaño de las estructuras y como compararlas, para lo cual aparecen algunas cuestiones de cardinalidad de conjuntos.

El capítulo IV presenta un lenguaje y un sistema axiomático de particular importancia en lógica y en el resto de las disciplinas matemáticas, a saber, el de la teoría axiomática de conjuntos ZFE (Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección). Por un lado, es un caso particular de una teoría de primer orden. Por otro, es la teoría que soporta a la lógica presentada en los capítulos previos y posteriores. Se enuncian allí resultados especialmente importantes como el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, los teoremas que posibilitan la definición por recursión y muchos resultados sobre compraración de cardinalidades. Una porción generosa del capítulo se avoca a examinar en detalle el uso de qué axiomas se requieren y cómo se emplean para demostrar algunas afirmaciones destacadas. Además, se calcula el tamaño de diversos conjuntos relevantes en lógica matemática. Es un primer contacto del lector con el establecimiento y desarrollo de una teoría axiomática basada en la lógica matemática, que además resulta ser la teoría en la que se apoya la matemática contemporánea.

El último capítulo de este primer volumen es una introducción a la lógica modal que, entre otras cosas, ilustra cómo la lógica clásica puede extenderse a zonas inten-

sionales de nuestro lenguaje. Se inicia con una breve presentación de los sistemas clásicos de lógica modal proposicional, tanto sintáctica como semánticamente. En una sección posterior damos una breve introducción a la lógica temporal que es un tipo de lógica modal útil para modelar los tiempos verbales del lenguaje ordinario. Más adelante se incorpora, a los sistemas analizados, el aparato del cálculo de predicados para formar sistemas de lógica modal cuantificada. Vemos como aquí no hay una semántica estándar sino que puede haber diversas elecciones dependiendo de ciertas disyuntivas filosóficas. La aparición de modelos de dominio variable nos enfrenta a la necesidad de modificar o adaptar un poco la lógica de predicados y es allí que diversas posibilidades se ofrecen a la imaginación. En diversas partes comentamos algunos debates en filosofía del lenguaje que están en estrecha relación con esas elecciones semánticas. Varios métodos de prueba son propuestos y se demuestra su adecuación y completud.

Como ya se mencionó, el libro está diseñado para leerse en tres niveles de dificultad creciente. Algunos temas son más adecuados para lectores intermedios; las secciones de esta categoría se inician con el símbolo  . Además, hay temas que requieren una madurez aún mayor por parte del lector o apelan a resultados más sofisticados; éstos se agrupan en apartados que se inician con  . El fin de estas secciones se marca con los símbolos  y  , respectivamente. El uso de colores en el texto no tiene otra finalidad que llamar la atención del lector a ciertas definiciones, ideas, construcciones, etc. que sobresalen del contexto; o bien hacer más ligera la continuidad del escrito.

No está de más advertir que el libro se desarrolla conforme a la tradición en matemáticas y filosofía: al principio se dan numerosos detalles en los argumentos o demostraciones, pero conforme el libro avanza, se espera que el lector se capaz de establecer por sí mismo cuáles principios, ideas, técnicas y resultados, se utilizan, de suerte tal que desarrolle su madurez y sofistificación intelectual. De ninguna manera es recomendable repetir una y otra vez qué se uso en cierto razonamiento, lema, teorema, etc., si ya ha quedado claro su empleo en situaciones previas. Además, otra figura presente en nuestra obra es que el lector sea capaza de leer textos o incluso trabajos de investigación en el área, de tal suerte que es importante desarrollar su habilidad para seguir en forma autónoma dichos trabajos. Esto sólo se logra cuando el lector es capaz de completar por sí mismo una demostración, construcción o idea. Por ello, las explicaciones en el texto, en ocasiones, se reducen considerablemente, pero sólo cuando el material es avanzado, o especialmente técnico y la abundancia de detalles haría tortuosa la lectura. Aunque no es estrictamente indispensable, es recomendable que el lector haya tenido un encuentro previo con la lógica proposicional, por ejemplo [FeVi09]; al menos en lo que concierne al significado de los conectivos lógicos usuales: conjunción, disyunción, negación, etc y nociones tales como contradicción y tautología. Otra vez, trataremos de evitar cualquier referencia a la lógica proposicional, pero ocasionalmente lo haremos para aclarar alguna noción.

Expresamos un enorme agradecimiento a los numerosos arbitros de esta obra, cuyas opiniones, correcciones y sugerencias han sido sumamente beneficas.

Sería de enorme ayuda para los autores conocer las opiniones de colegas, lectores, estudiantes, etc. acerca de este libro, por lo que mucho agradeceríamos nos enviaran sus comentarios a la dirección de correo electrónico:

tecolote.libros@gmail.com

In quexquichcauh maniz cemanahuatl, ayc pollihuiz itenyo yn itauhca in Mexico-Tenochtitlan

En tanto permanezca el mundo, no acabará la fama y la gloria de México-Tenochtitlan

Ixtapalapa, CDMX, Septiembre 2025.

Preámbulo

Auh ino ipan quizato inoquittaque cenca miectlamantli in tlanahuizolli in oncanca in acaihtic caye ihca ipampa in nahuatil yuhquimilhui in Huitzillopochtli in teomamaque in itahuan in Quauhtlequetzqui anozo in Quauhcohuatl in Axollohua tlamacazqui ca quin nahuati ca yuhquimilhui in ixquich in oncan inonoc in tollihtic in acaihtic in oncan ihcaz, in oncan tlapiez in yehuatl in Huitzilopochtli ca itencopa quimilhui ca yuhquin nahuati in Mexica, auh niman oquittaque iztac in ahuehuetl, iztac in huexotl, in oncan ihcac, ihuan iztac in acatl, iztac in tolli, ihuan iztac in cueyatl iztac in michin, iztac in cohuatl, in oncan nemi atlan, auh niman oquittaque nepaniuhticac intexcalli in oztotl, inic ce in texcalli in ozotl tonatiuh iquizayan itztoc itoca tleatl, Atlatlayan. Auh inic ome in texcalli in oztotl mictlampa Ytztoc, inic nepaniuhtoc, itoca Matlallatl, ihuan itoca Toxpallatl.

Auh inoquittaque niman yechoca in huehuetque quitohua anca yenican yez, caotiquittaque intechilhui inic technahuati in tlamacazqui in Huitzlipochtli inquihto inyuhqui anquittazque in Tollihtic in acaihtic miectlamantli in oncan ca auh in axcan coatiquittaque, otic mahuizoque, caye nelli caomochiuh caoneltic in tlatol inic technahuati, niman oquihtoque Mexicaye maoctihuian caotitlamahuizoque maoctic tlatolchiyecan in tlamacazqui yehuatl quimati quenin mochihuaz, niman ohuallaque motlallico in oncan Temazcaltitlan,

auh niman yohualtica in oquittac inoquimottiti in teomama initoca Quauhtlequetzqui anozo Quauhcohuatl in yehuatl in Huitzilopochtli, oquilhui Quauhcohuatle caohuanquittaque in ixquich in oncan onoc in acaihtic ohuan tlamahui-

Allí, Cuauhcoatl y Axolohua fueron pasando y miraron mil maravillas entre las cañas y los juncos. Ese había sido el mandato que les dio Huitzilopochtli a ellos que eran sus guardianes, eran sus padres los dichos. Lo que les dijo fue así: «En donde se tienda la tierra entre cañas y entre juncos, allí se pondrá en pie, y reinará Huitzilopochtli». Así por su propia boca les habló y esta orden les dio. Y ellos al momento vieron: sauces blancos, allí enhiestos; cañas blancas, juncos blancos, y aun las ramas blancas, peces blancos, culebras blancas; es lo que anda por las aguas. Y vieron después donde se parten las rocas sobre puestas, una cueva cuatro rocas la cerraban. Una al oriente se ve, nada de agua tiene, es sin agua que se agita. La segunda roca de la cueva ve al norte: se ve que está sobrepuesta, y de ella sale el agua que se llama agua azul, agua verdosa.

Cuando esto vieron los viejos, se pusieron a llorar. Y decían ¿conque aquí ha de ser? Es que estaban viendo lo que les había dicho, lo que les había ordenado Huitzilopochtli. Es que él les había dicho: «Habéis de ver maravillas muchas entre cañas y entre juncos». «Ahora las estamos mirando» decían ellos, «¡y quedamos admirados!» «¡Cuán verdadero fue lo dicho, bien se realizó su orden!» Van a buscar a los mexicanos y les dicen: «Mexicanos, vamos, vamos a admirar lo que hemos contemplado. Digamos al sacerdote; él dirá qué debemos hacer». Fueron a Temazcatitlan y allí se detuvieron.

Por la noche vinieron a ver, vinieron a mostrarse unos a otros y era el sacerdote Cuauhtlaquezqui, que es el mismo Huitzilopochtli. Dijo él: Cuauhcóhuatl, ¿habéis visto allí todo, lo que hay entre

zoque. Auh tlaxiccaquica occentlamantli in ayemo anquitta. Auh inin xihuian, xiquittati in Tenochtli in oncan anquittazque ic pacca icpac, ihcac in yehuatl in quauhtli oncan tlaqua, oncan mototonia, auh ca ic pachihui in amoyollo, ca yehuatl iniyollo in Copil intiqualmayauh in oncan timoquetz tlalcocomocco. Auh niman oncan huetzico ino anquittaque texcaltempa, Oztotempa in Acatzallan in toltzallan, auh ca oncan ixhuac iniyollo in Copil, in axcan motocayotia Tenochtli, auh ca oncan intiezque in titlapiezque, in titechiezque intitenamiquizque in nepapantlaca telchiquiuh totzonteco tomiuh tochimal, inic tiquimittazque in ixquich intechyahuallotoc ixquich tiquinpehuazque tiquimacizque ic maniz in taltepeuh Mexico Tenochtitlan quauhtli ipipitzcayan inetomayan quauhtli itlacuayan, ihuan michin ipatlanian, ihuan cohuatl izomocayan in Mexico in Tenochtitlan, auh ca miectlamantli in mochihuaz, niman oquilhui in Quauhcohuatl, cayequalli tlamacazque otlacauhqui imoyollotzin maquicaquican imottahuan in huehuetque in ixquichtin, ic niman oquincentalli in Mexica in Quauhcohuatl oquincaquilti initlatol in Huitzilopochtli inoquicacque Mexica.

Auh niman onoceppa yahque in Toltzallan in Acatzallan, in Oztotempa, auh ino ipan quizato Acatitlan ihcac in Tenochtli, in oncan (Oztotempa inoquittaque icpacca icpac ihcac moquetzticae in Quauhtli in yehuatl in Tenochtli oncan tlaqua, oncan quiqua quitzotzopitzticac in quiqua, auh in yehuatl in quauhtli inoquimittac in Mexica cenca omopechtecac in quauhtli, zan huecapa in conittaque) Auh initapazol inipepech, zan moch yehuatl in ixquich inepapan tlazo ihuitl in ixquich in xiuhtotoihuitl, in tlauhquecholihuitl, in ixquich quetzalli, auh zan no oncan quittaque in oncan tetepeuhtoc inin tzonteco inepapan totome in tlazototome in tzonteco oncan zozoticate, ihuan cequitoto icxitl, cequi omitl,

auh oncan quinnotz in Diablo quimilhui Mexicaye ye onca yecin, auh yece amo quitta in Mexica in aquinquinotza ic oncan tlatocayotique Tenochtitlan auh niman ye ic choca in Mexica quitohua cañas y juncos? ¡Aún resta ver otra cosa! No la habéis visto todavía. Id y ved un nopal salvaje: y allí tranquila veréis un Águila que está enhiesta. Allí come, allí se peina las plumas, y con eso quedará contento vuestro corazón. ¡Allí está el corazón de Cópil que tu fuiste a arrojar allá donde el agua hace giros y más giros! Pero allí donde vino a caer, y habéis visto entre los peñascos, en aquella cueva entre cañas y juncos. ¡Del corazón de Cópil ha brotado ese nopal salvaje! ¡Y allí esperaremos y allí reinaremos! ¡Allí esperaremos y daremos el encuentro a toda clase de gentes! Nuestros pechos, nuestra cabeza, nuestras flechas, nuestros escudos. ¡Allí les haremos ver! ¡A todos los que nos rodean allí los conquistaremos! ¡Aquí estará perdurable nuestra ciudad de Tenochtitlan! ¡El sitio donde el Águila grazna, en donde abre las alas; el sitio donde ella come y en donde vuelan los peces, donde las serpientes van haciendo ruedos y silban! ¡Ese será México Tenochtitlan y muchas cosas han de suceder! Dijo entonces Cuauhcóhuatl: ¡Muy bien está, mi señor sacerdote! ¡Lo concedió tu corazón: vamos a hacer que lo oigan mis padres los ancianos todos juntos! Y luego hizo reunir a los ancianos todos Cuauhcóhuatl y les dio a conocer las palabras de Huitzilopochtli. Las oyeron los mexicanos.

Y de nuevo van allá entre cañas y entre juncos, a la orilla de la cueva. Llegaron al sitio donde se levanta el nopal salvaje, allí al borde de la cueva y vieron tranquila, parada, al Águila en el nopal salvaje. Allí come, allí devora y echa a la cueva los restos de lo que come. Y cuando el Águila vio a los mexicanos, se inclinó profundamente. Y el Águila veía desde lejos. Su nido y su asiento era todo él de cuantas finas plumas hay: plumas de azulejos, plumas de aves rojas y plumas de quetzal. Y vieron también allí cabezas de aves preciosas y patas de aves y huesos de aves finas tendidos por tierra.

Le habló el dios y así les dijo: ¡Ah, mexicanos: aquí sí será! ¡México es aquí! Y aunque no veían quién les hablaba, se pusieron a llorar y decían: ¡Felices nosotros, dichosos al fin! ¡Hemos visto ya dónde ha de ser nuestra ciudad! ¡Vamos y venga-

otocnopiltic, otomacehualtic caotic mahuizoque in *mos a reposar aquí!*
taltepeuh yez, maoctihuian, maoctitocehuiti.

Crónica Mexicáyotl, folios 86, 87


tenochtitlan
colhuacan. pueblo.
tenayucan. pueblo/

Descripción del tlacuache y de sus propiedades medicinales en el Códice Florentino

Inic nahui parrapho itechpa tlatoa in quenami iyeliz, in yolqui, manenenqui, in ituca tlacuatl.

Tlacuatl; tlacuaton, anozo tlatlacuaton: pazaltuntli, huel yuhquin epatl. Auh in ye huecahua, inic huehue, in ye ilama, tetazahui. Tempitzantun. Mihichiuh, mihixtetlilcomolo, nacazhuihuitzpil, cuitlapilhuiac, cuitlapilxuxupetztic; zan huel nacatl in icuitlapil; acan ca tzontli, in manel tumitl.

Auh in yeliz: tlallan, tlacoyocco, cana tepancamac in mopilhuatia. Auh in omopilhuati, in canapa yauh, quinhuica in ipilhuan: ca xillan xiquipile. Uncan quimotema, uncan quimonaaquia in ipilhuan; quinhuica in tlatlacuaz, umpa chichitihui. Niman amo yellele, amo tlahuele, amo tecua, amo tetetexoa, in icuac ano, in icuac tzitzquilo. Auh in icuac axihua, choca, pipitzca, huel quiza in imixayo, oc cenca icuac in ano, ihuan in ipilhuan; cenca quinpipitzquilia in ipilhuan, quinchoquilia, huel quiza in ixayo. Quimontetema in ixiquipilco, quinhualquiquixtia.

Auh in itlacuatl tonacayutl; metzalli, ihuan necutli. Ahu in incayo cualoni. Huelic, yuquin tochin, yuhquin citli. Auh in iyomio oc cenca yeh, in icuitlapil, zan niman amo cualoni. In aquin quicuaz, oc cenca yeh, intla miec quicuaz, mochi quiza in iitic ca, in icuitlaxcol.

Ceppa quichtacacua in chichi, ihuan miztun, in inacayo tlacuatl. Zan mochi quiteteitz, quitutupotz in omitl, ca nel nozo chichi. In tlthuic, omochi motepehuaco in icuitlaxcoli za quihuilantinemi.

Auh inin, icuitlapil, ca patli, ca tlatupehuani, tlaquixtiani. In canin tlein calaqui, oc cenca yeh momicamac in ahuelquiza, onmopapalteuhteca in tlacuacuitlapilli, miecpa onmoteca. In manel huel tzitzicaticac, quiquixtia zan ihuian quiquixtitiuh. Auh in yehuantin in ahuellacachihua, in ahuel mixihui ca coni ic iciuhca tlacati in conetzintli. Auh in aquin aoc huel maxixa in maxixtzacua, ca coni quitlapoa in piaztli, in cocotli, quipopohua, quiyectia, cochpana in ixtetenca. No Tlácuatl, tlacuatn o tlatlacuaton. Es lanudillo, muy semejante al zorrillo. Y cuando envejece, cuando ya es anciano, ya es anciana, se vuelve blancuzco. Es de labios agudillos. Se pintó mucho del rostro: se hizo rodetes de tinta alrededor de los ojos. Orejas aguditas, larga la cola, la cola muy pelada: sólo de carne su cola; en ningún lado tiene cabellos, aunque hay pelusa.

Y sus costumbres: en la tierra, en un hoyo, en algún lugar en los boquetes de las paredes, pare la hembra. Y cuando parió, si va a alguna parte, lleva a sus hijos, pues tiene una bolsa en el vientre. Allí los pone: allí mete a sus hijos; los lleva cuando va a comer; allí van mamando. Luego, no es iracundo, no se enoja, no muerde, no trasca cuando es capturado, cuando es asido. Y cuando es cogido llora, chilla, bien salen sus lágrimas, principalmente cuando es capturada la hembra con sus hijos; mucho les chilla a sus hijos, le llora, bien salen sus lágrimas. Los pone en la bolsa; los hace salir.

Y su comida es el maíz y las raeduras de maguey y la miel. Y su carne es comestible. Es sabroso, como conejo, como liebre. Pero sus huesos, principalmente los de su cola, no son comestibles. A quien los come, si come muchos, le sale todo lo que está en su vientre, sus intestinos.

Una vez furtivamente un perro y un gato comieron la carne del tlacuache. En verdad el perro royó, mordió todos los huesos. Al amanecer todos sus intestinos se le vinieron a esparcir, sólo los andaba arrastrando.

Y ésta, su cola, es medicina: porque es arrojadora, es sacadora de cosas. Donde algo entra, principalmente en una grieta del hueso, que no puede salir, se pone abundantemente cola de tlacuache, mucha ahí se pone. Aunque esté muy atorado lo que se ha encajado, lo hace salir, fácilmente la va hacer salir. Y ellas, las que paren con dificultad, las que no pueden parir, beben el caldo para que rápidamente nazca el niñito. Y el que ya no puede defecar, que tiene estreñimiento, bebe el caldo

yehuatl in tlatlaci, no coni in icuitlapil tlacuatl, ca quicxotla, quitemohuia in alahuac. No yehuatl coni in cacahuatl ipan huei nacaztli ipan tlilxochitl, mecaxochitl ipan, in quin aoc temo quicua in ocuitlaxcol itlacauh in omotexten.

de la cola del tlacuache, porque pisotea, hace bajar las flemas. También él lo bebe con cacao, con huei nacaztli (Cymbopetalum penduliflorum), con tlixóchitl (Vanilla), con mecaxóchitl (Vanilla planifolia), quien ya no digiere lo que come, al que se le corrompieron los intestinos, el que se repletó de masa.

A lo largo del libro aparecen diversos relatos, mitos, cuentos relativos al tlacuache, los cuales irán precedidos por la siguiente representación del tlacuache, tomada del Códice Fejérváry-Mayer:

http://www.famsi.org/spanish/

Los relatos, extractos, textos, dichos, adivinanzas, etc. no relacionados con matemáticas y que aparecen a lo largo del libro se tomaron de las siguientes fuentes e irán precedidos por la figura:

1. E. Ramírez, G. Valdés, *Canciones, mitos y fiestas huicholas*, México, DGEI/SEP, 1982.

2. M. Portal, *Cuentos y mitos en una zona mazateca*, México, INAH, 1986.

3. A. López Austin, *Los mitos del tlacuache, caminos de la mitología mesoamericana*, Alianza Editorial, México, 1990.

4. E. Florescano, *Memoria mexicana*, 3a Ed., FCE,1994.

5. Revista *Arqueología Mexicana*, diversos números.

6. J. Soustelle, *El universo de los aztecas*. FCE, 1996.

7. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicana*, 2a Ed., Porrúa, 1975.

8. F. Alvarado Tezozómoc, *Crónica mexicáyotl*, México, UNAM, 1975.

9. *Códice Matritense de la Real Academia de la Historia*, Textos en náhuatl de los indígenas informantes de Sahagún, ed. facs. del Paso y Troncoso, vol. VIII, Madrid, 1907.

10. M. León-Portilla, *Los antiguos mexicanos*, México, FCE, 1987.

11. «Anales de Cuauhtitlan», en *Códice Chimalpopoca*, México, Imprenta Universitaria, 1945.

12. *Oraciones, adagios, adivinanzas y metaforas*, Del libro sexto del códice florentino, Pórtico de la Ciudad de México, 1993.

IN CALLI IXCAHUICOPA

El lema de esta casa de estudios se basa en la frase náhuatl In Calli Ixcahuicopa; ésta se integra por los elementos in calli, que significa «casa» y el compuesto ixcahuicopa formado por ix (tli) «rostro», cáhui (tl) «tiempo», y copa «hacia», que expresa «hacia el tiempo con rostro».

El elemento central cáhui (tl) implica «cambio y lo que éste va dejando». En síntesis, In calli ixcahuicopa es «casa orientada al tiempo con rostro». Convertida la frase en lema, apunta a los propósitos de la Universidad, que es «CASA ABIERTA AL TIEMPO» portador de sentido, posibilidad de saber y de diálogo.

Índice

1

Introducción al cálculo de predicados

Vel itech peuhtica, vel itech quiztica in Quetzalcoatl in ixquich in Toltecayotl, in nemachtilli...
Yoan in tlamacazque Tollan tlamaniliztli inic otlamanitiaia, inic otlamanca in nican Mexico.
En verdad con él se inició, en verdad de él proviene, de Quetzalcóatl, toda la Toltecáyotl, el saber...

Y los sacerdotes así gurdaban en Tula sus preceptos, como se han guardado aquí en México.

Códice Matritense.

1.1 Introducción

En este capítulo daremos una introducción informal a la lógica de predicados. Si el lector no está interesado en los temas que aquí se tratan y que a continuación señalamos, puede comenzar directamente con el capítulo 2. En general, el capítulo pretende establecer un puente entre la lógica proposicional que el lector, suponemos, ya conoce, aunque sea someramente, y el cálculo de predicados. Para ello veremos algunos métodos para determinar la validez de fórmulas de la lógica monádica. Comenzaremos con un esbozo de la teoría silogística de Aristóteles y sus métodos de prueba y refutación. Así ilustraremos un tanto la naturaleza de la lógica (o de una lógica); enseguida estudiaremos el método diagramático de Lewis Carrol que permite decidir de manera algorítmica la validez de silogismos y de razonamientos análogos. Más adelante y, de nuevo, con el objetivo de profundizar en ese mismo tema, mostraremos un método para decidir la validez de cualquier enunciado de la lógica monádica. Como estos se pueden reducir a la lógica proposicional, esta sección servirá de repaso al lector. Por útimo, esbozamos la sintaxis del lenguaje lógico introducido por Frege en 1879 como un primer acercamiento al lenguaje de la lógica de predicados.

No es fácil dar una definición del término «lógica» que sea aceptada por todos los especialistas en el tema. A pesar de que el término se utiliza para aludir a desarrollos formales muy distintos, parece haber un sustrato común a todos ellos. Siempre se trata de un modo directo o más velado de codificar el razonamiento correcto. Podemos hacer más precisa esta idea si recordamos lo que Carnap entendía por «explicación».

Con este vocablo Carnap se refiere a la operación de proporcionar un concepto preciso, utilizable científicamente, que corresponda en algunos aspectos a una noción vaga del lenguaje ordinario o de una rama del conocimiento aún en desarrollo. Por ejemplo, todos tenemos una idea imprecisa de «fuerza», es decir, sabemos que se requiere aplicar mucha fuerza para levantar un refrigerador por encima de la propia cabeza. La física tiene un concepto preciso de fuerza que recoge bastante bien nuestras intuiciones originales. Es decir, la física nos brinda una explicación de nuestra noción intuitiva de fuerza. De la misma manera, la psicología ofrece varias explicaciones de la idea de inteligencia. En general, esperamos que si un individuo nos parece inteligente, así resulte serlo según el concepto psicológico correspondiente, pero habrá casos excepcionales en que esto no ocurra. Llamemos *explicandum* a la noción informal y *explicatum* al concepto preciso correspondiente, y como dijimos, debe haber cierta coincidencia en la aplicación de ambos. La ventaja del *explicatum* es que puede emplearse en la ciencia porque satisface los estándares de rigor científico. Así, un concepto de inteligencia permite medir con precisión qué tan inteligente es un individuo. Ahora bien, la lógica tiene como intención primaria dar una explicación de nuestra noción informal de argumento correcto. Un argumento es una justificación que se da en defensa de una tesis. Podemos argumentar que Estados Unidos no se interesa realmente por las cuestiones ecológicas apelando al hecho de que ese país no suscribe el Protocolo de Kyoto. O podemos sostener que Porfirio Díaz fue un gran político argumentando que logró mantener a nuestro país en paz y que en México reinó el caos en los primeros 60 años del siglo XIX. A la tesis que se pretende sustentar le llamaremos «conclusión» y a los enunciados esgrimidos en su defensa, «premisas». Si el argumento es correcto, diremos que la conclusión es consecuencia de las premisas o que se sigue de ellas. De igual manera, podemos hablar de inferencias en lugar de argumentos. De que el hijo padece fenilcetonuria inferimos que uno de sus progenitores sufrió esta condición. Ahora bien, la lógica no tiene nada que ver con que las premisas sean o no verdaderas. Si, por ejemplo, se trata de un argumento sobre la pertinencia de llamar planeta a Plutón, será el astrofísico el encargado de decirnos si las premisas son aceptables, posibles, verosímiles o verdaderas. Diremos que un argumento es correcto si, admitidas las premisas (es decir, suponiendo que son verdaderas), estamos obligados a aceptar que la conclusión lo es, no en virtud de nuestros conocimientos sino sólo por haber aceptado las premisas. Si esquematizamos un argumento con premisas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y conclusión β de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

entonces, que sea correcto, o bien que β sea consecuencia lógica de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, significa que no es posible que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sean verdaderas y β falsa. Sin embargo, hasta aquí la demarcación de nuestro tema es todavía muy inadecuada. Consideremos los siguientes ejemplos,

Ningún mexicano ha estado en la luna
Armstrong estuvo en la luna

Armstrong no es mexicano

La longitud de la recta A es igual a la de la recta C
La longitud de la recta B es igual a la de la recta C

La longitud de la recta A es igual a la de la recta B

No todas las lesiones cutáneas del paciente se encuentran en el mismo estadio de desarrollo

El paciente no tiene viruela

Tres veces me he encontrado con uno de los hermanos de Mario
Mario solo tiene dos hermanos

Dos veces me he encontrado con el mismo hermano de Mario

El barómetro descendió a 1,2 milibares
Las nubes están muy bajas

Hoy tendremos lluvias

Todos estos pueden ser considerados argumentos correctos. Sin embargo, veremos que no todos son asunto exclusivo de la lógica. En todos ellos podemos decir que la conclusión se sigue de las premisas o que es consecuencia de ellas. En un contexto cotidiano, por ejemplo, podríamos decir que de la información de que no todas las lesiones cutáneas de un paciente se encuentran en el mismo estado de desarrollo se sigue lógicamente que el paciente no tiene viruela. En breve esperamos dejar en claro que este no es un caso de consecuencia lógica, excepto que agreguemos más premisas, es decir, cierta información que puede omitirse en un contexto en que se da por sentada. Podemos adelantar que se considera a la lógica como una disciplina formal y universal que pueda aplicarse a cualquier campo de estudio o tema y que, por tanto, es competencia de cualquier ser humano con uso de razón. En cambio, en el ejemplo anterior algo hay que saber sobre la viruela para poder inferir la conclusión de la premisa. El primer ejemplo es paradigmático de un argumento lógicamente correcto y nos sirve para resaltar la formalidad que hemos mencionado. Hay un sentido en que podemos decir que el mismo razonamiento aparece ilustrado enseguida.

Ningún australiano ha ganado el abierto de Chinconcuac
Alberto ganó el abierto de Chinconcuac

Alberto no es australiano

El razonamiento es correcto. Si las premisas son verdaderas la conclusión no podría ser falsa. Las premisas nos dicen que los australianos y los ganadores del abierto de Chinconcuac forman conjuntos que no tiene elementos en común. Si Alberto está en el segundo grupo, es imposible que esté en el primero; aquí aparece también una forma de necesidad (o equivalentemente de imposibilidad), asimismo, observe que el razonamiento es correcto independientemente de Alberto y de Armstrong o de los australianos y los mexicanos. Suele decirse que la lógica es neutral al tópico, pues le es indiferente si estamos hablando de australianos o de australopitecus o de si las premisas son realmente verdaderas o no, eso dependerá del tema y tocará determinarlo a los conocedores del mismo. La corrección del argumento, en cambio, es asunto del fuero común, y cualquiera dirá que esa es una forma correcta de razonar. El asunto de la lógica es cernir con precisión esa noción común. Ya han aparecido algunos de sus rasgos: neutralidad (o formalidad, en contraste a materialidad) y necesidad, pero esas aún son características muy vagas e incluso obscuras. Todavía estamos muy lejos de responder a la pregunta planteada. Veamos otro ejemplo. Cualquiera diría que de que un auto es azul se sigue lógicamente que no es verde. Estrictamente hablando, el argumento no es lógicamente correcto pues es por el conocimiento del significado de las palabras de color que sabemos que un punto del espacio visual no puede tener dos colores. De igual manera, podemos inferir que un reptil no puede ser mamífero por el solo significado de las palabras. En cambio, en el primer ejemplo, podemos determinar que hay inferencia lógica aún sin saber lo que significa la palabra «australiano». Nos basta con saber que designa a un grupo y la premisa inicial nos dice que este no tiene intersección con otro grupo, y eso es todo lo que requerimos de ella para determinar la corrección o validez del argumento. Pero, en cambio, sí necesitamos saber qué significa la palabra «ningún». La diferencia es que este término forma parte del vocabulario lógico y, por el momento, nuestra explicación debe terminar allí. Nos llevaría muy lejos discutir qué hace que un término sea clasificado como lógico. Baste agregar que al respecto no hay consenso. En breve, algunos ejemplos ayudarán a ilustrar este punto.

Alguien podría sugerir que quien infiere que el auto azul no es verde presupone una premisa implícita, a saber, la de que ninguna cosa azul es verde. Agregando esta premisa, el argumento adquiere la forma del primer ejemplo y es, por lo tanto, lógicamente correcta. Esto es lo que en tradición se llamó un entinema (argumento con una o varias premisas implícitas). Tal vez, de la misma forma podríamos clasificar a los demás ejemplos exceptuado el último. Es decir, podríamos suponer que son lógicamente correctos una vez que cierta información fuese agregada. Habríamos ya circunscrito el ámbito de competencia del lógico. Por ejemplo, en el argumento sobre la viruela; que el paciente no tenga esta enfermedad, se sigue pero no lógicamente de que sus pústulas no se encuentran igualmente desarrolladas. Pero el argumento es lógicamente correcto si agregamos la premisa de que en la viruela todas las lesiones de la piel evolucionan a la misma velocidad. El lógico determina que con esa

premisa el argumento ya es correcto. Sin embargo, no hemos contestado más que superficialmente la cuestión de cuál es el tema de la lógica. Para verlo, consideremos el argumento anterior sobre las líneas rectas. ¿Es lógicamente correcto así como está o solo considerado como un entinema? Aparentemente no requiere de ninguna premisa extra. Sin embargo, alguien podría ponerlo en duda diciendo que falta la premisa de que si dos cosas son iguales a una tercera son iguales entre sí. ¿Cómo dirimir esta cuestión? Nuestra noción intuitiva de argumento correcto es vaga y justamente lo que desearíamos es dar una explicación de la misma. Veremos que es razonable decir que no falta ninguna premisa, aceptados ciertos supuestos. Partamos ahora de nuestras pobres intuiciones y más adelante podremos arrojar luz sobre estas cuestiones. *Allez en avant et la foi vous viendra!*

Volvamos a la cuestión de la formalidad y la necesidad. Dijimos que un argumento es correcto si supuestas las premisas verdaderas, la conclusión no puede ser falsa. El primer problema con esta caracterización es que no sabemos qué significa que algo no pueda ser falso. Por ejemplo, un argumento con premisas cualesquiera y conclusión $3 + 4 = 7$ sería automáticamente correcto pues, independientemente de las premisas, la conclusión no puede ser falsa. Sin embargo, no calificaríamos así a un argumento que tuviese esa conclusión y como premisas que el perro del hortelano es gris y que Plutón es un monolito. Así es que esa pretendida caracterización, si bien recoge algún aspecto intuitivo de la consecuencia lógica, no es suficiente para delimitarla. Tomemos otro ejemplo. Consideremos un argumento que comienza con la premisa: El tren viaja a la velocidad de la luz.

Al margen de sus demás premisas y conclusión, ¿debemos considerarlo correcto porque ningún objeto con masa puede viajar a la velocidad de la luz? Es imposible que esta premisa sea verdadera y, por lo tanto, es imposible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. ¿Es por ello correcto? Aparentemente no, pero nuestra «definición» nos deja en tinieblas al respecto porque no dice de qué género de posibilidad se trata. Si decimos que lo que nos concierne es la posibilidad lógica y no la física, estamos evidentemente en un círculo. Sin embargo, por mala que sea esa definición nos da una primera idea de qué noción intuitiva de argumento correcto intentará capturar la lógica.

En todo caso, la lógica siempre proveerá un lenguaje preciso en el que podemos parafrasear los argumentos del lenguaje ordinario. A los argumentos traducidos a ese lenguaje preciso se aplicará directamente la definición dada de «argumento correcto» o «consecuencia lógica»; y sólo indirectamente, vía la traducción propuesta, podremos determinar la corrección o incorrección de los argumentos originales. Al construir un lenguaje lógico debemos precisar con todo detalle su sintaxis, es decir, cómo se formarán los enunciados (las expresiones susceptibles de tener un valor de verdad, es decir, de ser verdaderas o falsas) a partir del léxico (que también se especificará) y qué términos del léxico se considerarán lógicos y cuáles no. Más adelante daremos una semántica, lo que permitirá adscribir un valor de verdad a los enunciados del lenguaje formal o lógico.

1.1.1 Lógica Silogística.

Veamos un ejemplo sencillo de lo que hemos estado diciendo. Consideremos el lenguaje ordinario, con su sintaxis y semántica ordinarias. Supongamos, siguiendo a Aristóteles, que las expresiones que constituyen el vocabulario lógico son

Todo(s) . . . son . . .
Algún . . . es . . .
Ningún . . . es . . .
Algún . . . no es . . .
No
Si . . . entonces . . .

Supongamos también que todos los enunciados que nos conciernen son de la forma
(A) «Todo A es B»,
(E) «Ningún A es B»,
(I) «Algún A es B», y
(O) «Algún A no es B»

donde «A» y «B» representan nombres de clases naturales o, en general, predicados; por ejemplo, «A» puede ser «caballo» y «B» «chango». Debemos aclarar cómo entenderemos esas palabras de vocabulario lógico. Algún A es B significará que hay por lo menos un objeto A que es B (es decir que tiene la propiedad B). Si hay varios objetos que son tanto A como B, o si todos los A son B, entonces algún A es B también es verdadero. Lo mismo ocurre con algún A no es B que será verdadero incluso si ningún A es B, pero daremos por sentado que existen objetos con la propiedad A. Llamemos «término» a los predicados que reemplazan «A», «B» y «C». Tomemos, como el estagirita, silogismos, es decir, argumentos en que aparecen dos premisas y una conclusión (todos de las cuatro formas dadas) y tres términos en total, cada uno de los cuales aparece dos veces por ejemplo:

Todo caballo es chango
Algún primate no es chango
Algún primate no es caballo

Supongamos que todo caballo es realmente un chango y que algún primate (digamos Juan) no es chango. Es evidente que Juan no podría ser un caballo, porque entonces sería también un chango y sabemos que no lo es. Por ello, el argumento es correcto o válido. Observamos que pudimos determinar su corrección sin importarnos qué predicados precisos sustituyen a «A», «B» y «C». Lo importante fue el significado de las expresiones lógicas. De hecho, cualquier argumento que resulte de

sustituir «A», «B» y «C» por predicados será correcto. Ninguno tendrá las premisas verdaderas y la conclusión falsa. Podemos decir que el esquema

Todo A es B
Algún C no es B
Algún C no es A

es correcto, y que todos los argumentos formados a partir de él (o con esta forma) son correctos. Eso significa que al sustituir en uno de ellos sus palabras no lógicas por otras de la misma categoría gramatical, nunca obtendremos un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa. Ahora tenemos una caracterización más aceptable de argumento correcto relativo a un fragmento de nuestro lenguaje. De manera análoga todos los enunciados de la forma

(+) Si todo A es B y algún C no es B, entonces algún C no es A

son verdaderos. De forma equivalente diremos que (+) es un esquema válido. Es decir, resulta siempre en enunciados verdaderos una vez que sustituimos sus letras por términos cualesquiera. Aristóteles analizó todos los silogismos, es decir, las combinaciones de tres enunciados de las formas especificadas que contienen tres términos, cada uno de los cuales aparece dos veces, para determinar cuáles son correctos[1]. Halló 14 formas de silogismos correctos repartidos en tres categorías (conocidas como figuras). En la primera figura el término que se repite en las premisas aparece en una como predicado y en otra como sujeto. En la segunda aparece en ambas premisas como predicado, mientras que en la tercera figura aparece en las dos como sujeto.[2] Expresados en la forma de esquemas de enunciados condicionales, estos silogismos son los siguientes,

Primera figura

Si todo M es G y todo P es M, entonces todo P es G (Barbara)
Si ningún M es G y todo P es M, entonces ningún P es G (Celarent)
Si todo M es G y algún P es M, entonces algún P es G (Darii)
Si ningún M es G y algún P es M, entonces algún P no es G (Ferio)

[1]Estrictamente hablando solo llama «silogismos»a los argumentos correctos de esta forma, pero usaremos el término de forma más usual.

[2]Una cuarta figura del silogismo fue propuesta por Galeno en el siglo II de nuestra era. En ella el término medio aparece respectivamente como predicado y sujeto de las premisas (en ese orden), pero la primera premisa contiene como sujeto el predicado de la conclusión, mientras que la segunda contiene como predicado el sujeto de la conclusión.

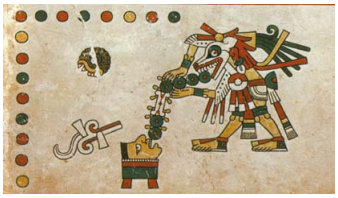
Segunda figura

Si ningún G es M y todo P es M, entonces ningún P es G (Cesare)
Si todo G es M y ningún P es M, entonces ningún P es G (Camestres)
Si ningún G es M y algún P es M, entonces algún P no es G (Festino)
Si todo G es M y algún P no es M, entonces algún P no es G (Baroco)

Tercera figura

Si todo M es G y todo M es P, entonces algún P es G (Darapti)
Si ningún M es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Felapton)
Si algún M es G y todo M es P, entonces algún P es G (Disamis)
Si todo M es G y algún M es P, entonces algún P es G (Datisi)
Si algún M no es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Bocardo)
Si ningún M es G y algún M es P, entonces algún P no es G (Ferison)

Aunque, desde luego, la validez de estos esquemas (o la corrección de los silogismos respectivos) es evidente, Aristóteles reduce unos a otros, es decir muestra cómo, aceptadas ciertas transformaciones, unos silogismos se convierten en otros. Como es claro que estas transformaciones preservan validez o corrección, puede decirse que prueba que unos silogismos son correctos, si admitimos que otros lo son. Los silogismos en Barbara y Celarent son aquellos a los que Aristóteles reduce todos los demás. Podemos verlos como axiomas y a las reglas de reducción como modos de inferencia. Admitidos unos y otras, los demás silogismos (válidos) aparecen como teoremas de este sistema.



Hace mucho tiempo, no se conocía el fuego, y los hombres debían comer sus alimentos crudos. Los Tabaosimoa, los Ancianos, se reunieron y discutieron sobre la manera de obtener alguna cosa que les procuraría el calor y les permitiría cocer sus alimentos. Ayunaron y discutieron... y vieron pasar por encima de sus cabezas una bola de fuego que se sumergió en el mar pero que ellos no pudieron alcanzar. Entonces, fatigados, los Ancianos reunieron personas y animales para preguntarles si alguno de ellos podía aportarles el fuego. Un hombre propuso traer un rayo de sol a condición de que sean cinco para ir al lugar donde salía el sol. Los Tabaosimoa aprobaron la proposición y pidieron que los cinco hombres se dirigieran hacia el oriente mientras que ellos, llenos de esperanza, continuarían suplicando y ayunando. Los cinco partieron y llegaron a la montaña donde nacía el fuego. Esperaron la llegada del día y se dieron cuenta que el fuego nacía sobre otra montaña, más alejada. Retomaron entonces su camino. Llegados a la montaña, en un nuevo amanecer, vieron el fuego nacer sobre una tercera montaña, aún más alejada. Prosiguieron así hasta la cuarta, después la quinta montaña donde, desalentados, decidieron regresar, tristes y fatigados. Contaron esto a los Ancianos quienes pensaron que jamás podrían alcanzar el Sol. Los Tabaosimoa les agradecieron y se volvieron a poner a reflexionar sobre lo que podrían hacer. Es entonces que apareció Yaushu, un Tlacuache sabio, y él les relató un viaje que había hecho hacia el oriente. Había percibido una luz lejana y quiso verificar lo que era. Se puso a marchar durante noches y días, durmiendo y comiendo

apenas. La noche del quinto día pudo ver que en la entrada de una gruta ardía un fuego de madera de donde se elevaban grandes llamas y un torbellino de chispas. Sentado sobre un banco un hombre viejo miraba el fuego. Era grande y llevaba un taparrabo de piel, los cabellos blancos y los ojos horriblemente brillantes. De tanto en tanto alimentaba esta «rueda» de luz con leños. El Tlacuache contó cómo él permaneció escondido detrás de un árbol y que, espantado, él hizo marcha atrás con precaución. Se dio cuenta que se trataba de alguna cosa caliente y peligrosa.

Cuando él hubo acabado su relato, los Tabaosimoa pidieron a Yaushu si él podía volver y traerles un poquito. El Tlacuache aceptó, pero los Ancianos y su gente debían ayunar y orar a los dioses haciendo ofrendas. Ellos consintieron pero le amenazaron de muerte si éste los engañaba. Yaushu sonrió sin decir una palabra. Los Tabaosimoa ayunaron durante cinco días y llenaron cinco sacos de pinole que dieron al Tlacuache. Yaushu les anunció que estaría de regreso en otros cinco días; debían esperarlo despiertos hasta medianoche y si él moría, les recomendó de no lamentarse por él.

Portando su pinole, él llegó al lugar donde el viejo hombre contemplaba el fuego. Yaushu lo saludó y fue solamente a la segunda vez que él obtuvo una respuesta. El viejo le preguntó lo que hacía tan tarde en ese lugar. Yaushu respondió que era el emisario de Tabaosimoa y que buscaba agua sagrada para ellos. Estaba muy fatigado y preguntó si podía dormir antes de retomar su camino la mañana siguiente. Debió suplicarle mucho pero al fin el viejo le permitió quedarse a condición de que no toque nada. Yaushu se sentó cerca del fuego e invitó al viejo a compartir su pinole. Este vertió un poco sobre el leño, tiró algunas gotas por encima de su hombro, después bebió el resto. El viejo le agradeció y se durmió.

Mientras que Yaushu lo escuchaba roncar, pensaba la manera de robar el fuego. Se levantó rápidamente, tomó una brasa con su cola y se alejó. Había hecho un buen pedazo del camino cuando sintió que una borrasca venía sobre él y vio, frente a él, al viejo encolerizado.

Él lo reprendió por tocar y robar una cosa que no le pertenecía; lo mataría. Inmediatamente él tomó a Yaushu para quitarle el tizón pero aunque éste lo quemaba no lo soltaba. El viejo lo pisoteaba, le trituraba los huesos, lo sacudía y lo balanceaba. Seguro de haberlo matado, se vuelve a vigilar el fuego. Yaushu rodó, rodó y rodó... envuelto en sangre y fuego; llegó así delante de los Tabaosimoa que estaban orando.

Moribundo les dio el tizón. Los Ancianos encendieron los leños. El Tlacuache fue nombrado «héroe Yaushu». Lo vemos aún hoy marchar penosamente por los caminos con su cola pelada.

Leyenda azteca

1.2 Lógica monádica aristotélica.

Aristóteles prueba los restantes silogismos válidos en tres formas. La primera es la conversión que permite obtener «ningún A es B» de «ningún B es A». La segunda es la reducción al absurdo que para probar la validez de un silogismo, toma la negación de la conclusión y una de las premisas para inferir, usando otro silogismo, la negación de la otra premisa. La tercera es llamada la prueba por *écthesis*. Se han dado de ella varias interpretaciones, pero nos parece aceptable la ofrecida por Alejandro de Afrodisia (con una pequeña diferencia). La idea es que a partir de una o ambas premisas concluimos que un cierto objeto del dominio posee una propiedad determinada y razonamos a partir de él. Por ejemplo, si las premisas son que todo A es C y todo A es B, la *écthesis* sería tomar un individuo C que es A y, por lo tanto, a la vez es B y C y de allí concluir que ese individuo es B y es C, de lo cual concluímos que algún B es C. Este procedimiento se asemeja a lo que en la actualidad se llama instanciación universal que aparecerá más adelante en el texto. Sin embargo, la *échtesis* no es necesaria. Podemos reducir los silogismos válidos a los modos Barbara y Celarent utilizando la conversión y la reducción al absurdo, es decir, la tranformación de un enunciado de la forma «Si P y Q, entonces R» a «Si P y no R, entonces no Q» o a «Si no R y Q, entonces no P». También tenemos que aceptar que siempre podemos reemplazar la negación de un enunciado por un enunciado equivalente, según las siguientes directrices: a) un

enunciado de la forma «todo A es B» es equivalente a la negación de un enunciado de la forma «Algún A no es B» y viceversa; y b) que la negación de un enunciado de la forma «Ningún A es B» es equivalente a un enunciado de la forma «Algún A es B». Una cuarta regla, implícita, es que la conjunción de enunciados es conmutativa. Por ejemplo, consideremos el silogismo

Si todo M es G y algún P es M, entonces algún P es G (Darii)

Por reducción al absurdo (y usando las equivalencias mencionadas) se convierte en

Si todo M es G, y ningún P es G, ningún P es M.

E invirtiendo los conyuntos del antecedente

Si ningún P es G y todo M es G, ningún P es M ,

invirtiendo el consecuente, tenemos

Si ningún *P* es *G* y todo *M* es *G*, ningún *M* es *P*.

El cual es de la forma Cesare. Así hemos reducido Darii a Cesare. A su vez

Si ningún G es M y todo P es M, entonces ningún P es G (Cesare)

se puede convertir en

Si ningún M es G y todo P es M, entonces ningún P es G.

En el caso en que las premisas de una forma silogística no sean suficientes para establecer la conclusión, Aristóteles plantea los que llamamos en la actualidad contraejemplos. En realidad, para una forma concreta da dos ternas de términos. Con la primera podemos formar (haciendo las sustituciones adecuadas) un silogismo que tenga premisas verdaderas y una conclusión verdadera de la forma «Todo P es G», mientras que con la segunda podemos obtener otro silogismo con premisas y conclusión verdaderas, como «Ningún P es G». Por ejemplo, consideremos premisas de la forma «Algún M es G» y «Algún M es P». Claramente, no brindan suficiente información para establecer como cierta alguna relación entre P y G. Cualquier conclusión de la forma mencionada con sujeto P y predicado G es errónea. Habría cuatro posibles conclusiones, dos «afirmativas» (I, A) y dos «negativas» (E, O):

Algún «M» es «G»
Algún «M» es «P»

+	Algún «P» es «G»	(I)
	Todo «P» es «G»	(A)
-	Ningún «P» es «G»	(E)
	Algún «P» no es «G»	(O)

Aristóteles da dos ternas de términos, por ejemplo (mexicano, jarocho, veracruzano) y (mexicano, judío, musulmán)

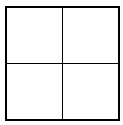
Contraejemplo 1:	Contraejemplo 2:
M= Mexicano	M= Mexicano
P= Jarocho	P= Judío
G= Veracruzano	G= Musulmán
Algún mexicano es veracruzano	Algún mexicano es musulmán
Algún mexicano es jarocho	Algún mexicano es judío
Todo jarocho es veracruzano	ningún judío es musulmán

El primer contraejemplo muestra que no podríamos inferir de las premisas una conclusión «negativa» (ni que ningún P es G, ni que algún P no es G), mientras que el segundo muestra que no hay conclusión «afirmativa» que haga correcto el argumento respectivo.

El hecho de que Aristóteles de contrajemplos para probar invalidez podría interpretarse como una prueba a favor de que entiende la validez en términos de substituciones. Si un esquema de argumento (del tipo dicho) es incorrecto porque haciendo substituciones adecuadas podemos transformarlo en un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa, entonces un argumento válido debe tener un esquema en el que cualquiera de estas substituciones resulte en un argumento que si tiene premisas verdaderas, también tiene una conclusión verdadera. Desde luego, no sabemos si Aristóteles aceptaría esta definición, pero veremos que brinda una característica necesaria pero no suficiente de la validez. En todo caso, la consecuencia lógica es relativa a una gramática y a una selección de vocabulario lógico. Si es posible o deseable eliminar esta relatividad es un problema filosófico complejo.

1.3 El juego de la lógica de Lewis Carroll

En sus libros *Symbolic Logic* y *The Game of Logic (1876)*, Lewis Carroll presenta un método gráfico para determinar la corrección de silogismos y de argumentos similares; veamos en qué consiste. Tomemos dos términos X y Y o, en forma equivalente, dos clases y representaremos los posibles enunciados de las formas A, E, I y O que pueden formarse tomando una como sujeto y la otra como predicado. Consideremos la cuadrícula



La parte superior representa la clase X, y la inferior, su complemento. La parte izquierda simboliza la clase Y y la derecha, su complemento. Si representamos como XY a la intersección de los conjuntos X y Y, y a X' como el complemento de X, cada una de las 4 secciones del cuadrado simboliza una clase, de acuerdo con el siguiente diagrama:

XY	XY'
$X'Y$	$X'Y'$

El símbolo 0 en una casilla indicará que ésta se encuentra vacía, mientras que un I simboliza que hay algún o algunos elementos en la casilla correspondiente. En algunos casos el I puede hallarse sobre una línea. Por ejemplo,

I	

indicando que algún elemento es Y (que existe al menos algún Y) aunque ignoramos si es también X o no. La cuadrilla

I	

Significa que algún X es Y (o que algún Y es X); por otro lado, ningún X es Y se simboliza con el siguiente diagrama bilateral:

0	

Por otro lado,

I	0

Significa que todo X es Y.

¿Qué cosa es una piedra roja que va dando brincos? La pulga.

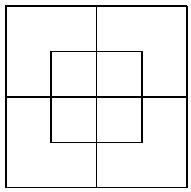
Adviértase que para Carroll, que todo A es B implica que algún A es B, mientras que «ningún A es B» no implica que algún A no es B. En la lógica contemporánea la convención es que «todo A es B» es verdadero si hay por lo menos un A que es B o bien si no existe ningún A, de tal manera que de «Todo A es B» no se sigue que algún A es B. Algo similar vale para «Ningún A es B».

Desde luego,

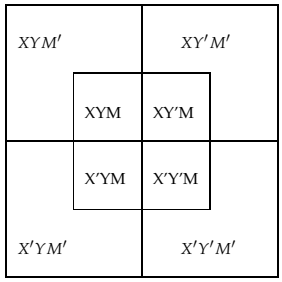
Algún X no es Y

Se simboliza de la misma forma que
Algún X es Y'.

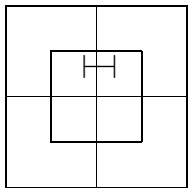
A los diagramas anteriores los llamaremos bilaterales. Introduciremos ahora un medio de representar dos enunciados en forma simultánea. En el siguiente gráfico el interior del cuadrado central representa una tercera clase M, mientras que su exterior simboliza M'. Por supuesto, el cuadrado completo simboliza el universo de discurso que sea pertinente a cada caso.



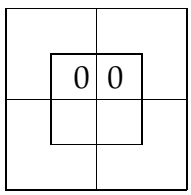
En el diagrama anterior (al que llamaremos trilateral) cada subsección representa una intersección de conjuntos de acuerdo con la siguiente correspondencia,



Ahora el enunciado
Algún X es M (o algún M es X) se representará como



mientras que



significará que ningún X es M (o que ningún M es X).

Carroll descompone

Todo X es M

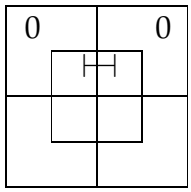
En las dos afirmaciones:

Algún X es M

Y

Ningún X es M′.

Por tanto, el diagrama



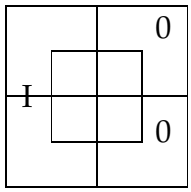
representará el enunciado

Todo X es M.

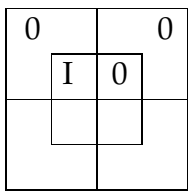
¿Qué cosa son unos espejitos entre ramas de pino? Los ojos.

De manera similar,

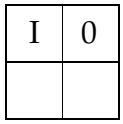
Todo M′ es Y se representa como



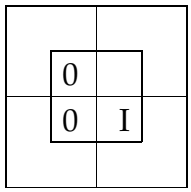
Ahora veremos cómo la información contenida en un diagrama trilateral puede ser vertida en un diagrama bilateral, lo que haremos cuando queramos obtener una conclusión que sólo involucre a X y a Y habiendo partido de premisas que también incluían el término M. El procedimiento es sencillo. Llamemos cuadrantes a las cuatro secciones que componen un diagrama bilateral. Si las dos subsecciones de un cuadrante están ocupadas con '0' estamos autorizados a poner '0' en el cuadrante correspondiente del diagrama bilateral. Por ejemplo, el diagrama



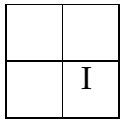
se convierte en el diagrama



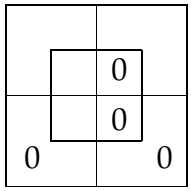
Un I completamente dentro de una subsección nos autoriza a colocar un I dentro del cuadrante respectivo. Por ejemplo,



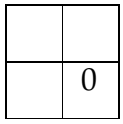
se convierte en



Un I que intersecta uno de los cuatro ejes centrales del diagrama trilateral no nos da información suficiente para llenar el cuadrado bilateral. Un ejemplo similar es



Que se transforma en



Por otro lado, si tenemos un I que intersecta la línea divisoria entre dos casillas e información complementaria nos indica que una de ellas está vacía, debemos mover el I a la otra casilla, como veremos en ejemplos posteriores.

Ahora bien, los pasos para determinar qué conclusión puede derivarse de las premisas de un silogismo son sencillos,

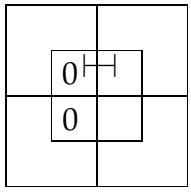
- Lo primero es sustituir los tres términos del silogismo por X, Y y M utilizando siempre esta última letra para el término que aparece repetido en las premisas.

- Después debemos descomponer los enunciados de la forma Todo A es B en los enunciados de las formas
  Algún A es B
  y
  Ningún A es B′.

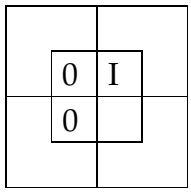
- Enseguida, representaremos los enunciados que resultan de descomponer así las premisas, comenzando siempre por los de la forma
  Ningún A es B.

- Por último, reduciremos el esquema trilateral a un esquema bilateral y extraeremos el esquema (o los esquemas) de enunciado que queda representado en el diagrama resultante, para después , reemplazar las letras X y Y por los predicados que representan.

Vemos ahora un ejemplo; tomemos las premisas ningún chango es ovíparo y algún chango mide más de 1.80 m. Simbólicamente al representar Ningún M es Y, Algún M es X, en el diagrama tenemos

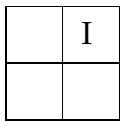


Aquí el I que intersecta las casillas de la clase X pasa a la derecha, pues sabemos que la casilla superior de la clase Y está vacía, como se muestra,



¿Qué cosa es una vieja espantosa que muerde la tierra? La tuza.

Finalmente, convertimos el diagrama anterior en uno bilateral como sigue:



Concluimos que algún X es Y' o algún animal que mide más de 1.80 m no es ovíparo.
Comprobemos ahora la validez de un silogismo de la forma Darapti
Si todo M es Y y todo M es X, entonces algún X es Y.

Las premisas equivalen a,

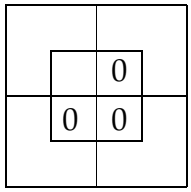
(1) Ningún M es Y'.

(2) Algún M es Y.

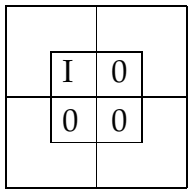
(3) Ningún M es X'.

(4) Algún M es X.

Representando primeramente (1) y (3),

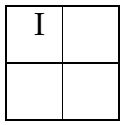


Si agregamos la información de (2) y (4) y la acomodamos con la que teníamos, llegamos a:



El que nació pa' tarugo, nunca llega ni a vaqueta.

Que se convierte en el diagrama bilateral



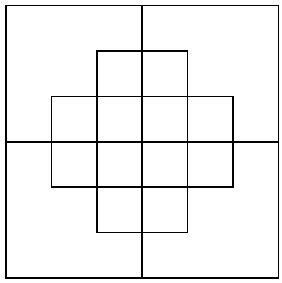
Correspondiente a la conclusión de que algún X es Y.

Note cómo aparece aquí de manera clara una de las características de la consecuencia lógica. Solía decirse que en un argumento correcto la conclusión solo hacía patente una información que ya se hallaba implícita en las premisas. Si es así, entonces es claro que si las premisas fuesen verdaderas la conclusión tendría también que serlo. La lógica no proveería ninguna nueva información, solo extraería la que ye tenemos. En los diagramas trilaterales metemos la información de las premisas y luego, sin agregar

nada, eliminamos un cuadrado para obtener el diagrama bilateral. Si el argumento es correcto, la conclusiíon debe estar ya dibujada.

El método de Carroll es más general que la teoría silogística de Aristóteles. Con él el lector puede comprobar la corrección o incorrección de otros silogismos. Alguna divergencia habrá, sin embargo, debido a que para Carroll el categórico universal negativo (ningún A es B) no implica el particular negativo (algún A no es B), mientras que para Aristóteles sí.

Carroll ideó diagramas más complicados para aplicarse al caso en que tengamos argumentos para un mayor número de términos. En el caso de cuatro términos el diagrama tendría la siguiente forma,



Además de los diagramas, Carroll también proporciona un lenguaje formal para simbolizar enunciados como los que aparecen en los ejemplos anteriores. Con ello también provee un método para determinar la corrección de argumentos en los que aparecen tres clases de cosas y sus complementos en dos premisas y una conclusión. El algoritmo que propone es interesante porque engloba en pocos casos los argumentos válidos de la forma mencionada. Empecemos por definir algunos términos; dado que estamos tratando con clases y sus complementos siempre estamos presuponiendo un universo o dominio de discurso. Llamaremos entidad a una proposición que asevera la existencia de algo, es decir, es una afirmación que en el diagrama genera un I. Si x representa un atributo, x_1 simbolizará la proposición de que algunas cosas tienen el atributo x; de igual forma, xy_1 significará que algunos x son y o que algunos y son x o que existen cosas que tienen tanto la propiedad x como la propiedad y. Note que yx_1 y xy_1 afirman lo mismo, todas ellas son entidades. De la misma manera x_0 significará que no existen x o que nada tiene la propiedad x, mientras que xy_0 puede traducirse como que ningún x es y o, equivalentemente, que ningún y es x. Estas proposiciones serán llamadas nulidades. Por ejemplo, las proposiciones de los tipos A, E, I y O que aparecen en los silogismos aristotélicos pueden ser simbolizadas así,

Ningún A es B AB_0
Todo A es B A_1B_0'
Algún A es B AB_1
Algún A no es B AB_1'

No obstante, se debe recordar que la universal negativa tiene para Aristóteles consecuencias existenciales, es decir, debería traducirse al lenguaje formal por la fórmula A_1B_0. Por ejemplo, el silogismo

Ningún producto refinado es sano
Algunos cereales son sanos

Algunos cereales no son refinados

puede simbolizarse[3] así: $xm_0{+}zm_1 \rhd zx'_1$. Nótese que todos los x son y podría simbolizarse como $xy'_0 + x_1$, pero Carroll la abrevia como $x_1y'_0$. Formalicemos este lenguaje y su semántica intuitiva.

Empecemos por especificar un lenguage formal del que diremos que es del tipo LLC. Sus símbolos primitivos son letras mayúsculas X, Y, Z... un símbolo de función unaria $'$ y el conectivo binario +.
Una letra mayúscula es una literal.
Si A es una literal, también lo es A'
Ahora definimos lo que es una fórmula.
Si A y B son literales AB_0 es una fórmula
Si A y B son literales A_1B_0 es una fórmula
Si ϕ y γ son fórmulas, $\phi + \gamma$ es una fórmula.
El lenguaje así formado estará determinado por sus letras, y supongamos que un lenguaje de este tipo ha sido especificado. Una interpretación $\mathfrak{I}$ de este lenguaje es una pareja $\langle D, f\rangle$, tal que D es un conjunto no vacío y f una función tal que a cada literal le asigna un subconjunto de D y si A es una literal $f(A') = D - f(A)$.
Dada una interpretación $\mathfrak{I} = \langle D, f\rangle$ para un lenguaje LLC, definiremos que una fórmula α es verdadera en $\mathfrak{I}$ (o $\mathfrak{I} \models \alpha$) con las siguientes cláusulas. Sean A y B literales y ϕ y ψ fórmulas del lenguaje en cuestión.

1. $\mathfrak{I} \models AB_0$ si y solo si $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
2. $\mathfrak{I} \models AB_1$ si y solo si $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$.
3. $\mathfrak{I} \models A_1B_0$ si y solo si $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ y $f(A) \neq \emptyset$.
4. $\mathfrak{I} \models \phi + \psi$ si y solo si $\mathfrak{I} \models \phi$ y $\mathfrak{I} \models \psi$.

Decimos que una fórmula β es consecuencia lógica de las fórmulas $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ si en cada interpretación en que son verdaderas todas las fórmulas $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$, también lo es β.

Veamos ahora el algoritmo que propone Carroll para determinar que una fórmula es consecuencia lógica de otras. Tanto la definición de fórmula que acabamos de dar como el algoritmo que especificaremos enseguida pertenecen a la sintaxis del sistema, porque definen cualidades o relaciones entre expresiones simbólicas sin atender a su

[3] El símbolo $\rhd$ lo emplea Carroll para separar premisas y conclusión de un argumento correcto. Más adelante le daremos un significado preciso.

significado. En cambio, la definición de interpretación, de verdad en una interpretación y de consecuencia lógica pertenecen a la semántica pues, para decirlo con pocas palabras, son conceptos que ponen en relación al lenguaje con el mundo.

De dos símbolos de clase diremos que son similares si ambos están acentuados o ninguno lo está. Similarmente son disimilares si uno está acentuado y el otro no. De x y x' diremos que tienen diferentes signos. El símbolo $\triangleright$ se usará para indicar derivación lógica. Ası, por ejemplo, $X_1Y_0' + YZ_o \triangleright XY_0$ significa que XY_0 puede ser derivado de $X_1Y_0' + YZ_o$, es decir que por una serie de transformaciones siguiendo las reglas que veremos es posible llegar de $X_1Y_0' + YZ_o$ a XY_0. En un silogismo al término medio, representado por m, lo llamaremos el eliminando, pues desaparecerá en la conclusión. Los otros dos términos serán llamados residuos o retinendos. Si de uno solo de ellos se afirma existencia ese será el residuo-entidad. Similarmente hablaremos del residuo-nulidad. Esto quedará más claro enseguida.

Carroll da tres reglas para tres tipos de argumentos de este tipo,

1. Dos nulidades con eliminandos disimilares construyen una nulidad en la que ambos residuos conservan su signo. De un retinendo del que se afirma en las premisas su existencia, puede ser asegurada su existencia en la conclusión. En símbolos, $xm_0 + ym_0' \triangleright xy_0$, $x_1m_0 + ym_0' \triangleright x_1y_0$ y $xm_0 + y_1m_0' \triangleright y_1x_0$.

2. Una nulidad y una entidad con eliminandos similares construyen una entidad en la cual el residuo nulidad cambia su signo. En símbolos, $xm_0 + ym_1 \triangleright x'y_1$.

3. Dos nulidades con eliminandos similares de los que se asevera que existen construyen una entidad en la cual ambos residuos cambian su signo. Es decir, $xm_0 + ym_0 + m_1 \triangleright x'y_1'$.

Veremos algunos ejemplos para ilustar en qué sentido un argumento se ajusta a uno de estos patrones.

Ninguno de mis amigos es extranjero
A todos los mexicanos les gusta el pulque
Por lo tanto, a ninguno de mis amigos le disgusta el pulque.

Este es un ejemplo de la primera figura: $xm_0' + m_1y_0' \triangleright xy_0'$. Desde luego, también sabemos que la clase m no es vacía, pero eso ya no concierne a la conclusión, que solo reporta la relación entre x y y. Otro ejemplo de la primera figura es,

Todo doctor es honesto
Toda persona honesta paga sus impuestos
Por lo tanto, todo doctor paga sus impuestos.
$x_1m_0' + m_1y_0 \triangleright x_1y_0$

Un ejemplo más de esta categoría que tiene la peculiaridad de dar dos conclusiones correctas a partir del mismo algoritmo es el siguiente,

Todos los jóvenes son activos
Todos los admiradores de Ronaldo son inactivos
Por lo tanto, todos los jóvenes no admiran a Ronaldo y todos los admiradores de Ronaldo no son jóvenes.
$x_1'm_0 + y_1m_0' \triangleright x_1'y_0 + y_1x_0'$

Recuerde que para Carroll «todos los jóvenes son inactivos» no es equivalente a «Ningún joven es activo», pues el primero tiene como consecuencia una entidad y, el segundo, no. Ejemplifica el segundo patrón el siguiente argumento,
Todos los propietarios de perros son responsables
Algunos analfabetas son irresponsables
Por lo tanto, algunos que no tienen perros son analfabetas.
$x_1m_0' + y'm_1' \rhd x'y_1'$.

Advierta que la conclusión también pudo ser «algunos analfabetas no tienen perros». Significa simplemente que la clase de los analfabetas y la de los que no tienen perros tienen una intersección no vacía. Ilustremos el último esquema con,
Ningún extranjero gusta del nopal asado
Todos los que gustan del nopal asado son aficionados al futbol
Por lo tanto, algunos mexicanos son aficionados al futbol.
$x'm_0 + m_1y_0' \rhd xy_1$

Las condiciones impuestas a las premisas son necesarias y eso puede verse a través de las que Carroll llama falacias, es decir, argumentos que casi cumplen las condiciones establecidas, pero que fallan en un pequeño detalle, lo que puede llevar al error. Por ejemplo, tome las premisas $x_1m_0 + ym_1'$. Dado que los eliminandos son de signo contrario tenderíamos a aplicar las primera figura, pero sería incorrecto porque se trata de dos entidades. Lo mismo sucede con $xm_0 + ym_1'$. El lector puede comprobar haciendo un diagrama que ninguna conclusión válida puede obtenerse entre x y y. Las siguientes premisas parecerían adecuadas para la aplicación de la tercera figura: $x_1m_0 + ym_0$, excepto que no se asevera la existencia del eliminando. Las premisas $xm_1 + ym_1$ podrían inducir a pensar que es un caso de la segunda figura, pero ambas son entidades y sería un error sacar una conclusión.

«Ancha y verde pluma de quetzal». Decíanse estas palabras refiriéndose a un buen orador, ya fuera el rey, alguno de los nobles o algún jefe.

Los algoritmos anteriores pueden aplicarse de manera secuencial. Por ejemplo, supongamos que nos dan las siguientes premisas,
(1) x_1s_0
(2) $s'm_0$
(3) ym_0'
(4) zx_0
(5) wy_0'
De aquí podemos hacer las siguientes derivaciones:
(6) x_1m_0 de (1) y (2) por la figura 1.
(7) x_1y_0 de (6) y (3) por la figura 1,

(8) $z'y'_1$ de (4) y (7) por la figura 3,
(9) $w'z'_1$ de (5) y (8) por la figura 2.

En los ejemplos anteriores vemos cómo una definición de lógica depende de una gramática, es decir, de precisar ciertas estructuras linguísticas y de la elección de un vocabulario lógico. Por ejemplo, en el caso de Aristóteles solo atendemos a oraciones de las formas A, E, I y O. En las de la forma A retenemos la estructura Todo X es Y. Esta pertenece a la lógica y su significado es definido con precisión, mientras que los significados de los términos que pueden reemplazar a X y a Y son irrelevantes desde un punto de vista lógico. En el sistema de Carroll la gramática es similar, aunque no idéntica y, en particular, la expresión lógica «Todo X es Y» tiene un significado diferente del que le dio Aristóteles.

1.4 Lógica monádica de predicados

Siguiendo a Hilbert y Ackermann, introduciremos en seguida una notación para representar los silogismos anteriores, la cual nos permitirá generalizar los métodos aristotélicos. Utilizaremos los conectivos proposicionales ordinarios en dos formas distintas,

(a) Para formar nuevos enunciados partiendo de enunciados ya dados, como se hace en la lógica proposicional.

(b) Para formar un predicado a partir de otros.

Así, por ejemplo, (caballo $\wedge$ negro) será verdadero de todas las cosas que son caballos y son negras, es decir, de todos los caballos negros, mientras que $\neg$caballo será verdadera de todas las cosas que no son caballos. A los esquemas proposicionales interpretados como predicados complejos los llamaremos esquemas de términos booleanos. Por ejemplo, ((Caballo$\wedge$ Negro)$\vee$ Azabache) es un esquema de términos booleanos. Para formar un enunciado a partir de un predicado, lo colocaremos entre barras $|$ para simbolizar el enunciado que asevera que todo individuo u objeto tiene la propiedad representada por el predicado correspondiente. Así, $|$ ($\neg$ caballo$\vee$ negro)$|$ significará que cualquier objeto o no es caballo o es negro o, en forma equivalente, que todo caballo es negro. A los enunciados así obtenidos los denominaremos esquemas universales booleanos.

Adviértase que, en un cierto sentido, no hemos introducido casi nada que no estuviera en el lenguaje formal de Carroll. Caballo$\wedge$ Negro y $\neg$ Caballo era simbolizados por CaballoNegro y Caballo'. La disyunción Caballo$\vee$ Negro hubiera podido representarse por (Caballo'Negro')' mientras que $|$ ($\neg$ caballo$\vee$ negro)$|$ ya sabemos que se simboliza como $Caballo_1 Negro'_0$. Sin embargo, es conveniente utilizar los conectivos proposicionales, en parte, para ganar mayor expresividad y, en parte, porque así veremos un algoritmo que reduce la determinación de la consecuencia lógica a una cuestión de si algo es o no una tautología. Ahora bien, de estos esquemas podremos

formar nuevos enunciados utilizando los conectivos proposicionales en la forma (a). A los resultados de esta operación los llamaremos esquemas de enunciados booleanos.

Con estos esquemas podemos representar los cuatro tipos de enunciados básicos de Aristóteles:

(A) Todo caballo es negro (cualquier cosa o no es caballo o es negro).

$$|\ (\neg caballo) \vee negro\ |$$

(E) Ningún caballo es negro (cualquier cosa o no es caballo o no es negro).

$$|\ (\neg caballo) \vee (\neg negro)\ |$$

(I) Algún caballo es negro (no es cierto que ningún caballo sea negro).

$$\neg\ |\ (\neg caballo) \vee (\neg negro)\ |$$

(O) Algún caballo no es negro (no es cierto que todo caballo es negro).

$$\neg\ |\ (\neg caballo) \vee (negro)\ |$$

Así, si A, B y C representan términos o predicados, los siguientes esquemas de enunciados booleanos simbolizan las 14 formas válidas de Aristóteles:

Primera figura

Si todo M es G y todo P es M, entonces todo P es G (Barbara)
$(|\ \neg M \vee G\ |\ \wedge\ |\ \neg P \vee M\ |) \rightarrow |\ \neg P \vee G\ |$
Si ningún M es G y todo P es M, entonces ningún P es G (Celarent)
$(|\ \neg M \vee \neg G\ |\ \wedge\ |\ \neg P \vee M\ |) \rightarrow |\ \neg P \vee \neg G\ |$
Si todo M es G y algún P es M, entonces algún P es G (Darii)
$(|\ \neg M \vee G\ |\ \wedge \neg\ |\ \neg P \vee \neg M\ |) \rightarrow \neg\ |\ \neg P \vee \neg G\ |$
Si ningún M es G y algún P es M, entonces algún P no es G (Ferio)
$(|\ \neg M \vee \neg G\ |\ \wedge \neg\ |\ \neg P \vee \neg M\ |) \rightarrow \neg\ |\ \neg P \vee G\ |$

«Barro y recojo». Decíanse estas palabras de un trabajo o encargo de parte de la ciudad del templo; así se decía: nada más se barre, se recoge en la presencia de nuestro señor o de la ciudad.

Segunda figura

Si ningún G es M y todo P es M, entonces ningún P es G (Cesare)
$(\mid \neg G \vee \neg M \mid \wedge \mid \neg P \vee M \mid) \rightarrow \mid \neg P \vee \neg G \mid$
Si todo G es M y ningún P es M, entonces ningún P es G (Camestres)
$(\mid \neg G \vee M \mid \wedge \mid \neg P \vee \neg M \mid) \rightarrow \mid \neg P \vee \neg G \mid$
Si ningún G es M y algún P es M, entonces algún P no es G (Festino)
$(\mid \neg G \vee \neg M \mid \wedge \neg \mid \neg P \vee \neg M \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee G \mid$
Si todo G es M y algún P no es M, entonces algún P no es G (Baroco)
$(\mid \neg G \vee M \mid \wedge \neg \mid \neg P \vee M \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee G \mid$

Tercera figura

Si todo M es G y todo M es P, entonces algún P es G (Darapti)
$(\mid \neg M \vee G \mid \wedge \mid \neg M \vee P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee \neg G \mid$
Si ningún M es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Felapton)
$(\mid \neg M \vee \neg G \mid \wedge \mid \neg M \vee P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee G \mid$
Si algún M es G y todo M es P, entonces algún P es G (Disamis)
$(\neg \mid \neg M \vee \neg G \mid \wedge \mid \neg M \vee P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee \neg G \mid$
Si todo M es G y algún M es P, entonces algún P es G (Datisi)
$(\mid \neg M \vee G \mid \wedge \neg \mid \neg M \vee \neg P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee \neg G \mid$
Si algún M no es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Bocardo)
$(\neg \mid \neg M \vee G \mid \wedge \mid \neg M \vee P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee G \mid$
Si ningún M es G y algún M es P, entonces algún P no es G (Ferison)
$(\mid \neg M \vee \neg G \mid \wedge \neg \mid \neg M \vee \neg P \mid) \rightarrow \neg \mid \neg P \vee G \mid$

Consideremos ahora las dos siguientes reglas:

a) Admitamos como correcto un esquema de la forma:

$(\mid \neg H \vee B \mid \wedge \mid A \vee H \mid) \rightarrow \mid A \vee B \mid$

b) Aceptemos que las siguientes reglas preservan validez.

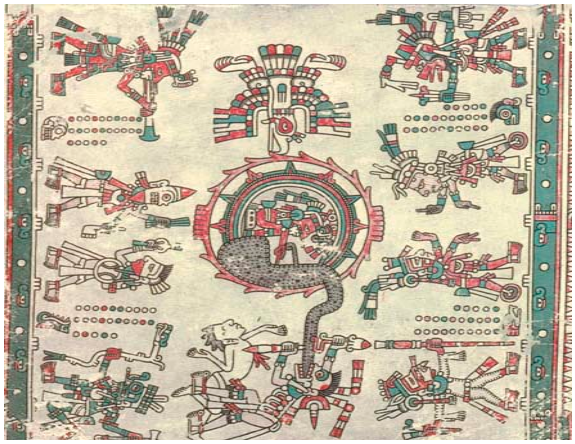
1. La sustitución de un componente de la forma $\mid A \vee B \mid$ por otro de la forma $\mid B \vee A \mid$

2. El reemplazo de una letra por cualquier otra o por la negación de cualquier otra en todas sus ocurrencias en un esquema.

3. La sustitución de un enunciado de la forma $(\neg\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\gamma$ o de la forma $(\neg\beta \wedge \alpha) \rightarrow \neg\gamma$ por otro de la forma $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta$ o viceversa.

4. La sustitución de un enunciado de la forma $\neg\neg\alpha$ por α.

Ahora es fácil probar, usando únicamente las reglas a) y b), que doce de los catorce esquemas dados son válidos (se deja como ejercicio para el lector), excepto Darapti y Felapton que no son válidos desde el punto de vista moderno. En cambio, el categórico afirmativo de Carroll Todo X es Y no puede expresarse con un esquema universal booleano, pero sí con un esquema de enunciados booleano, por ejemplo, $\mid A \rightarrow B \mid \wedge\neg \mid \neg A \mid$.



Ahora especificaremos una semántica para este lenguaje. Hasta aquí no hemos especificado a qué objetos nos estábamos refiriendo cuando dijimos que $\mid A \mid$ simboliza el enunciado de que todo individuo u objeto tiene la propiedad representada por el predicado A. Llamaremos *interpretación* a un par $\langle D, f\rangle$ tal que D es un conjunto no vacío cualquiera y f una función que asigna a cada letra mayúscula un subconjunto de D.

La función f se extiende a todo esquema de términos booleanos, si leemos los conectivos en la forma esperada (como formando términos o predicados).

Por ejemplo, si D es el conjunto de seres humanos y f asigna a A y B respectivamente los conjuntos $\{x \mid x \text{ es americano}\}$ y $\{x \mid x \text{ es católico}\}$, entonces f asocia a $A \wedge B$ el conjunto de los cátolicos americanos y a $\neg A$ el conjunto de los seres humanos que no son católicos. Ahora bien, si α es un esquema de términos booleanos, α será verdadero de un objeto x de D según la interpretación $\langle D, f\rangle$ si x pertenece a $f(\alpha)$, y $\mid \alpha \mid$ será verdadero en $\langle D, f\rangle$ si α es verdadero en todo elemento de D. Estas definiciones se extienden naturalmente a los esquemas de enunciados booleanos suponiendo que los conectivos lógicos tienen sus significados habituales (esta vez como formando enunciados). Por ejemplo, si α y β son esquemas de enunciados booleanos $(\alpha \wedge \beta)$ es verdadero en una interpretación si tanto α como β son verdaderos en esa interpretación. Un esquema de enunciados booleano es válido si es verdadero en toda interpretación. Esta definición se extiende a los esquemas universales booleanos que también pueden ser considerados esquemas de enunciados booleanos. De nuevo, escribiremos $\models \phi$ para indicar que ϕ es válido, aunque estrictamente algún subíndice debería indicar a qué sistema nos estamos refiriendo.

Así, por ejemplo,
$(\neg \mid \neg M \vee \neg G \mid \wedge\neg \mid \neg M \vee \neg P \mid) \rightarrow \mid \neg P \vee G \mid$

es falso en la interpretación
$D = \{x \mid x \text{ es humano}\}$
$f(M) = \{x \mid x \text{ es mexicano}\}$
$f(G) = \{x \mid x \text{ es veracruzano}\}$
$f(P) = \{x \mid x \text{ es chiapaneco}\}$.

Si $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es un conjunto de esquemas de enunciados booleanos, α es *consecuencia lógica* de Σ si α es verdadero en toda interpretación en que sea verdadero cada elemento de Σ. Si α es un esquema de términos booleanos, representaremos con α' el mismo esquema, considerado esta vez como esquema proposicional. Si, por ejemplo, α es el predicado $A \vee \neg A$, α' es la tautología $A \vee \neg A$.

Algoritmo para determinar validez o invalidez

Ahora daremos un algoritmo para determinar si un esquema de enunciados booleano es o no válido. Más adelante demostraremos algunos lemas que constituyen su justificación. El algoritmo es el siguiente: sea α un esquema de enunciados booleano.

1. Ponga α en forma normal conjuntiva, es decir, si p y q son esquemas universales booleanos:

   1.1 Sustituya subfórmulas de la forma $(p \to q)$ y $(p \leftrightarrow q)$ por equivalentes usando a) y b). Proceda de izquierda a derecha.

   a) $p \to q \equiv (\neg p \vee q)$
   b) $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

   1.2 Sustituya subfórmulas de la forma $\neg(p \vee q)$ y $\neg(p \wedge q)$ por equivalentes usando c) y d), de tal manera que el símbolo de negación quede adjunto a los esquemas universales booleanos o a las letras proposicionales:

   c) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
   d) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$; de nuevo proceda de izquierda a derecha.

   1.3 Elimine $\neg\neg$ en cada una de sus apariciones de acuerdo con la siguiente regla.

   e) $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$; para ello, proceda de izquierda a derecha.

   1.4 Coloque $\wedge$ como símbolo principal en toda subfórmula en que $\vee$ sea el símbolo principal. Sustituya fórmulas de la forma $p \vee (q \wedge r)$ por equivalentes usando f) y proceda de izquierda a derecha.

   f) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   El resultado hasta aquí será un esquema de enunciados booleanos en forma normal conjuntiva (FNC).

«No hay en ningún lado agua con que te laves, con que te limpies». Decíanse estas palabras al que había hecho algo malo, que tal vez había robado, tal vez había cometido un adulterio

Ejemplo 1.4.1. (de los pasos anteriores): $\neg(p \to (q \leftrightarrow \neg r))$

$\neg(\neg p \vee (q \leftrightarrow \neg r))$ por (a)

$\neg(\neg p \vee ((\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg\neg r \vee q)))$ por (b)

$(\neg\neg p \wedge \neg((\neg q \vee \neg r \wedge (\neg\neg r \vee q)))$ por (c)

$(\neg\neg p \wedge (\neg(\neg q \vee \neg r) \vee \neg(\neg\neg r \vee q)))$ por (d)

$(\neg\neg p \wedge (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)) \vee \neg(\neg\neg r \vee q)))$ por (c)

$\neg\neg p \wedge ((\neg\neg q \wedge \neg\neg r) \vee (\neg\neg\neg r \wedge \neg q)))$ por (c)

$p \wedge (\neg\neg q \wedge \neg\neg r) \vee (\neg\neg\neg r \wedge \neg q)))$ por (e)

$p \wedge ((q \wedge \neg\neg r) \vee (\neg\neg\neg r \wedge \neg q))$ por (e)

$p \wedge ((q \wedge r) \vee (\neg\neg\neg r \wedge \neg q))$ por (e)

$p \wedge ((q \wedge r) \vee (\neg r \wedge \neg q))$ por (e)

$p \wedge (((q \wedge r) \vee \neg r) \wedge ((q \wedge r) \vee \neg q))$ por (f)

$p \wedge (((q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r)) \wedge ((q \wedge r) \vee \neg q))$ por (f)

$p \wedge (((q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)))$ por (f)

2. Si cada conyunto es válido, la fórmula original es válida; si algún conyunto es inválido, así lo es la fórmula α.

3. Cada uno de los conyuntos está en forma normal disyuntiva (FND).

   Llamemos negativo a un esquema de enunciados booleanos si es la negación de un esquema universal booleano, y positivo si es un esquema universal booleano. Hay tres posibilidades.

   3.1 En el conyunto hay un solo miembro positivo (de la forma $|\alpha|$); entonces $|\alpha|$ es válido si y sólo si α' es tautología.

   3.2 En el conyunto sólo hay miembros negativos, uno o varios, de manera que el conyunto es de la forma

$$\neg \mid \alpha \mid \vee\neg \mid \beta \mid \vee\neg \mid \gamma \mid$$

Sustitúyase por:
$\neg \mid \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid$.
Ahora bien,
$\neg \mid \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid$
es válido si y sólo si,
$\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma'$

es inconsistente. En particular $\neg \mid \alpha \mid$ es válido si y solo si α' es inconsistente.

«El negro y el rojo de los antiguos». Estas palabras se decían de las instituciones de los antiguos, de la forma de vida que ellos nos dejaron; unos viven de acuerdo con ella, otros no; por eso se decía: que no se pierda el negro, el rojo de los antiguos, es decir, las costumbres.

3.3 Hay varios negativos y varios positivos; entonces α es de la forma
$\neg \mid \beta \mid \vee \neg \mid \gamma \mid \vee \mid \theta \mid \vee \mid \pi \mid$
Y es válida si y sólo si,
$(\beta' \wedge \gamma') \rightarrow \theta'$ es tautología o
$(\beta' \wedge \gamma') \rightarrow \pi'$ es tautología.

Más adelante demostraremos que
$\mid \alpha \mid \wedge \mid \beta \mid \wedge \mid \gamma \mid \rightarrow \mid \theta \mid$
es válido si y sólo si,
$\models (\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma') \rightarrow \theta'$,
es decir, si
$(\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma') \rightarrow \theta'$
es una tautología.

Ejemplo 1.4.2. Premisas: Todos los amigos canadienses de Alicia son ilustrados y cultos y no hay individuo ilustrado que sea culto.
Conclusión: Ningún canadiense es amigo de Alicia.

Primero se representan los predicados asignándoles una letra proposicional

A: amigos
C: canadienses
I: ilustrados
U: cultos

Ahora lo representamos con esquemas de enunciados booleanos.
$(\mid ((A \wedge C) \rightarrow (I \wedge U)) \wedge \mid I \rightarrow \neg U \mid$
$\mid C \rightarrow \neg A \mid$.
Solución: el esquema de enunciados booleanos que corresponde a este argumento es
$(\mid((A \wedge C) \rightarrow (I \wedge U)) \wedge (I \rightarrow \neg U)\mid) \rightarrow \mid C \rightarrow \neg A\mid$.
Como

$\models (((A \wedge C) \to (I \wedge U)) \wedge (I \to \neg U)) \to (C \to \neg A)$,
el argumento es correcto.

Veamos ahora los lemas que se encuentran en la base del algoritmo recién ilustrado. Más adelante tratremos ejemplos más complejos de su aplicación.

Lema 1.4.3. *Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son esquemas de términos booleanos y cada $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ es consistente, entonces en cualquier dominio que contenga n objetos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hay una interpretación que hace a cada α_i verdadera del correspondiente objeto x_i.*

Demostración. Se deja al lector la prueba. Los siguientes ejemplos le servirán de guía. □

Ejemplo 1.4.4. Considere los siguientes esquemas de enunciados proposicionales

1. $(P \wedge \neg Q)$
2. $P \to R$
3. $S \to Q$
4. $\neg R \vee S$

Aunque $\{(P \wedge \neg Q), (P \to R), (S \to Q), (\neg R \vee S)\}$ forme un conjunto inconsistente, cada uno de los conjuntos $\{(P \wedge \neg Q)\}, \{(P \to R)\}, \{(S \to Q)\}, \{(\neg R \vee S)\}$ es consistente. Según el lema anterior podemos hallar una interpretación en que $(P \wedge \neg Q)$ sea verdadero de B. Obama y $(P \to R), (S \to Q), (\neg R \vee S)$ sean respectivamente verdaderos de Fidel Castro, del Che Guevara y de Evita Perón. Elegimos para cada uno de esos esquemas un renglón de su tabla de verdad en que sea verdadero, digamos de la siguiente manera:

¿Qué cosa es un jarrito de pulque, blanco por encima y con plumas de quetzal? La cebolla.

1. $P \wedge \neg Q$
   $V \quad F$
2. $P \to R$
   $F \quad V$
3. $S \to Q$
   $F \quad V$

4. $\neg R \vee S$
   $F \quad F$

Entonces la interpretación que buscamos debe asignar a P una propiedad que tenga Barack Obama y no tenga Fidel Castro, digamos la de ordenar el bombardeo de personas inocentes. Para Q requerimos una propiedad que no tenga Obama, pero sí el Che Guevara, por ejemplo la de ser una persona decente. Necesitamos que se asigne a R una propiedad de Fidel Castro de la que carezca Evita Perón, digamos la de ser varón. Por último, para S basta una propiedad de la que carezcan tanto el Che Guevara como Evita Perón, como ser europeo. Cualquier interpretación que asigne estos valores a P, Q, R *y* S conseguirá lo que nos propusimos.

Ejemplo 1.4.5. Si en la interpretación anterior suponemos que D era el conjunto de los seres humanos, entonces recuerde que en lugar de «propiedad» pudimos decir «subconjunto de los seres humanos». Por ejemplo, pudimos tomar una interpretación que asignara a P el conjunto que sólo contiene a Obama. Esto facilita nuestra labor, porque ya no tenemos que estar pensando en una propiedad que tengan unos y de la que carezcan otros. Sean los esquemas de términos con las asignaciones de valores de verdad que aparecen bajo las letras

1. $P \to S$
   $F \quad V$

2. $(P \wedge Q) \to R$
   $V \quad V \quad V$

3. $P \wedge \neg R$
   $V \quad F$

Y los objetos a, b y c
Sea $f(P) = \{b, c\}$
$f(Q) = \{b\}$
$f(R) = \{b\}$
$f(S) = \{a\}$
La interpretación $\langle \{a, b, c\}, f \rangle$ cumple con los requerimientos del lema.

Lema 1.4.6. *Un esquema universal booleano* $\mid \alpha \mid$ *es válido si y sólo si* α' *es una tautología.*

Demostración. $\Leftarrow$) Es evidente.

$\Rightarrow$) Sea D un conjunto cualquiera no vacío. Si α' no es tautología, $\neg\alpha'$ es consistente. Por el lema anterior, hay una interpretación $\langle D, f \rangle$ y un elemento de D para el que $\neg\alpha$ es verdadera y, por lo tanto, $\mid \alpha \mid$ es falsa en la interpretación $\langle D, f \rangle$. ❐

Ejemplo 1.4.7. $\mid (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)) \mid$ es válido, mientras que $\mid (P \vee Q) \to P \mid$ no lo es.

Lema 1.4.8. *La negación de un esquema universal booleano* $\neg \mid \alpha \mid$ *es válida si y sólo si* α' *es inconsistente.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si α' es inconsistente, entonces en cualquier interpretación α es falso de todo objeto. Por lo tanto, $\mid \alpha \mid$ es falsa en toda interpretación y $\neg \mid \alpha \mid$ es válida.

$\Rightarrow$) Si α' es consistente entonces, por el lema 1.4.3, hay una interpretación $\langle D, f \rangle$ tal que D contiene un solo elemento x y α es verdadera de x; por lo tanto, $\mid \alpha \mid$ es verdadera en la interpretación $\langle D, f \rangle$ y $\neg \mid \alpha \mid$ es falsa. ☐

Ejemplo 1.4.9. $\neg \mid P \wedge \neg P \mid$ es válido, en tanto que $\neg \mid P \wedge Q \mid$ no lo es.

La siguiente es una generalización del lema 1.4.6:

Lema 1.4.10. $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$ *es válido si y sólo si* α_1' *es tautología o* α_2' *es tautología o* $\ldots$ *o* α_n' *es tautología.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si α_1' es tautología, $\mid \alpha_1 \mid$ es válido, y por tanto, $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$ es válido.

$\Rightarrow$) Si ni α_1' es tautología ni α_2' es tautología ni $\ldots$ ni α_n es tautología, entonces $\neg\alpha_1'$,$\neg\alpha_2'$, $\ldots$ y $\neg\alpha_n'$ son cada uno consistente.

Por el lema 1.4.3, hay una interpretación $\langle \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, f \rangle$ tal que en ella α_1' es falsa de x_1, α_2' es falsa de x_2 $\ldots$ y α_n' es falsa de x_n.

Por tanto, en esa interpretación $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$ es falsa. ☐

Ejemplo 1.4.11. $\mid P \to Q \mid \vee \mid Q \to P \mid \vee \mid \neg(P \to Q) \mid$ no es válida

Lema 1.4.12. $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$ *es consecuencia lógica de* $\mid \beta \mid$ *si y sólo si* α_1' *es consecuencia de* β' *o* α_2' *es consecuencia de* β' *o* $\ldots$ *o* α_n' *es consecuencia de* β'.

Demostración. $\Rightarrow$) Si ni $\alpha_1{}'$ es consecuencia de β' ni $\alpha_2{}'$ es consecuencia de β', ni ... ni $\alpha_n{}'$ es consecuencia de β', entonces cada uno de los enunciados $\neg\alpha_1{}'\wedge\beta'$, $\neg\alpha_2{}'\wedge\beta'$, ... y $\neg\alpha_n{}'\wedge\beta'$, es consistente y, por el lema 1.4.3, hay una interpretación $\langle\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, f\rangle$ tal que $\neg\alpha_1 \wedge \beta$ es verdadera de x_1, $\neg\alpha_2 \wedge \beta$ es verdadera de x_2, ..., y $\neg\alpha_n \wedge \beta$ es verdadera de x_n. Por tanto, en esa interpretación ninguna de las α es verdadera de todos los objetos mientras que β es verdadera de cada uno de ellos. Por tanto $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$ es falsa en esa interpretación, en tanto que $\mid \beta \mid$ es verdadera.

$\Leftarrow$) Si $\alpha_1{}'$ es consecuencia de β', entonces en cualquier interpretación todo objeto del que β es verdadero también lo es α. Por lo tanto, si $\mid \beta \mid$ es verdadero en una interpretación, $\mid \alpha_1 \mid$ es verdadero y también lo es $\mid \alpha_1 \mid \vee \mid \alpha_2 \mid \vee \ldots \vee \mid \alpha_n \mid$. ❐

Ejemplo 1.4.13. Por el lema sabemos que

$\mid P \rightarrow Q \mid \vee \mid Q \rightarrow R \mid \vee \mid (P \wedge R) \mid$

no es consecuencia lógica de

$\mid P \rightarrow R \mid$.

Lema 1.4.14. *Una conjunción de esquemas de enunciados booleanos es válida si y sólo si cada uno de ellos es válido.*

Lema 1.4.15.

$$\mid \alpha \wedge \beta \mid \equiv (\mid \alpha \mid \wedge \mid \beta \mid)$$

Evidentemente, decir que todos los objetos tienen una propiedad y que todos los objetos tienen otra propiedad es lo mismo que decir que cualquier objeto tiene ambas propiedades.

Corolario 1.4.16. $\neg \mid \alpha \mid \vee \neg \mid \beta \mid \equiv \neg \mid \alpha \wedge \beta \mid \equiv \neg(\mid \alpha \mid \wedge \mid \beta \mid)$

Los lemas nos permiten determinar la validez de esquemas de enunciados booleanos de cualesquier formas, como veremos a continuación. Considere un esquema de enunciados booleanos y escríbalo en forma normal conjuntiva. Ahora determine la validez de cada uno de sus conyuntos por el lema 1.4.14. Cada miembro de esta conjunción será la disyunción de esquemas universales booleanos o sus negaciones.

Todas las negaciones de esquemas universales booleanos pueden reducirse a una sola utilizando el corolario 1.4.16. Entonces, tendremos alguno de los siguientes casos,

a) Una disyunción de esquemas universales booleanos.

b) La negación de un esquema universal booleano.

c) Una disyunción de uno o varios esquemas universales booleanos y la negación de un esquema universal booleano.

Para determinar la validez de un esquema de enunciados booleanos, utilizaremos el lema 1.4.10 en el caso a), el lema 1.4.8 en el caso b) y el lema 1.4.12 en el último caso pues $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n \vee \neg\beta)$ es equivalente a
$(\beta \to (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n))$.
Apliquemos nuestro método a la forma silogística Darii, es decir, al esquema
$(| \neg M \vee G | \wedge \neg | \neg P \vee \neg M |) \to \neg | \neg P \vee \neg G |$.
Primero eliminamos el condicional,
$\neg(| \neg M \vee G | \wedge \neg | \neg P \vee \neg M |) \vee \neg | \neg P \vee \neg G |$.
Por las leyes de De Morgan, esto es equivalente a
$\neg | \neg M \vee G | \vee | \neg P \vee \neg M | \vee \neg | \neg P \vee \neg G |$.
Aplicando la transformación a que nos autoriza el lema 1.4.15, obtenemos
$\neg | (\neg M \vee G) \wedge (\neg P \vee \neg G) | \vee | \neg P \vee \neg M |$.
Lo que es equivalente a
$| (\neg M \vee G) \wedge (\neg P \vee \neg G) | \to | \neg P \vee \neg M |$.
Este esquema de enunciados es válido pues,
$((\neg M \vee G) \wedge (\neg P \vee \neg G)) \to (\neg P \vee \neg M)$.
es una tautología (por el lema 1.4.12, el consecuente es consecuencia lógica del antecedente).

Aunque ya tenemos un algoritmo para determinar la validez de cualquier esquema de enunciados booleanos, el siguiente lema facilitará nuestra labor:

Lema 1.4.17.

$$(| \alpha | \wedge | \beta | \wedge | \gamma |) \to | \delta |$$

es válido si y sólo si

$$(\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma') \to \delta' \text{ es una tautología.}$$

Desde luego, el número de conyuntos del antecedente puede ser cualquier natural, pero escribimos sólo 3 por comodidad.

Demostración.

$$| \alpha | \wedge | \beta | \wedge | \gamma | \equiv | \alpha \wedge \beta \wedge \gamma | \text{ por el lema 1.4.15}$$

Por lo tanto,
$(| \alpha | \wedge | \beta | \wedge | \gamma |) \to | \delta | \equiv | \alpha \wedge \beta \wedge \gamma | \to | \delta |$

y
$| \alpha \wedge \beta \wedge \gamma | \rightarrow | \delta |$
es válido si y sólo si,
$(\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma') \rightarrow \delta'$
es una tautología por el lema 1.4.12. ❐

Corolario 1.4.18.

$$(| \alpha | \wedge | \beta | \wedge \neg | \delta |) \rightarrow \neg | \gamma |$$

es válido si y sólo si

$$(\alpha' \wedge \beta' \wedge \gamma') \rightarrow \delta' \text{ es una tautología.}$$

Ejemplo 1.4.19. Si algún M no es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Bocardo):

$$(\neg | \neg M \vee G | \wedge | \neg M \vee P |) \rightarrow \neg | \neg P \vee G |$$

es válido pues

$$((\neg P \vee G) \wedge (\neg M \vee P)) \rightarrow (\neg M \vee G)$$

es una tautología.

El siguiente es un ejemplo de Lewis Carroll,

Ejemplo 1.4.20. Concluya qué relación tienen los comedores de opio con los que usan guantes de las siguientes premisas.

1. Ninguno que vaya a la fiesta dejará de cepillar su cabello.
2. Nadie luce fascinante si está sucio.
3. Los comedores de opio no tienen auto dominio.
4. Cualquiera que haya cepillado su cabello luce fascinante.
5. Nadie usa guantes blancos excepto que vaya a la fiesta.
6. Un hombre está siempre sucio si no tiene autodominio.

Representémoslas de la siguiente forma:

1. $| P \to C |$
2. $| S \to \neg F |$
3. $| O \to \neg A |$
4. $| C \to F |$
5. $| G \to P |$
6. $| \neg A \to S |$

   De 1 y 4, por transitividad obtenemos
7. $| P \to F |$

   De 7 y 2, por contrapositiva y transitividad, tenemos
8. $| P \to \neg S |$

   De 8 y 6
9. $| P \to A |$

   De 3 y 9,
10. $| O \to \neg P |$

    De 10 y 5,
11. $| O \to \neg G |$ o «los comedores de opio no usan guantes blancos», que es la solución dada por Carroll.

Hay un par de casos en que nuestro método produce una divergencia con la teoría aristotélica. Son los casos Darapti y Felapton. Apliquemos el método a Darapti.
$(| \neg M \vee G | \wedge | \neg M \vee P |) \to \neg | \neg P \vee \neg G |$
$\neg(| \neg M \vee G | \wedge | \neg M \vee P |) \vee \neg | \neg P \vee \neg G |$
$\neg | (\neg M \vee G) \wedge (\neg M \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg G) |$
De acuerdo con el lema 1.4.8, este esquema no es válido. Lo que ocurre es que, según nuestra definición de validez, Darapti y Felapton no son válidos. Aristóteles los consideró así porque supuso implícitamente que un enunciado de la forma «todo A es B» o de la forma «ningún A es B» implica que la clase de los A no es vacía.

Ejemplo 1.4.21. Apliquemos ahora el método al argumento:
Nadie que sea amigo de Laura o de Beatriz es ahorrativo y discreto.
Todos los amigos de Beatriz son ahorrativos.
Por lo tanto, ninguna persona discreta es amiga de Beatriz.

O lo que es lo mismo, al enunciado

«Si nadie que sea amigo de Laura o de Beatriz es ahorrativo y discreto y todos los amigos de Beatriz son ahorrativos, entonces ninguna persona discreta es amiga de Beatriz».

Simbólicamente:

$(| \neg(L \vee B) \vee \neg(A \wedge D) \mid \wedge \mid \neg B \vee A \mid) \rightarrow| \neg D \vee \neg B \mid$

y como

$((\neg(L \vee B) \vee \neg(A \wedge D)) \wedge (\neg B \vee A)) \rightarrow (\neg D \vee \neg B)$

es una tautología, el argumento es correcto.

Ejemplo 1.4.22. Consideremos ahora el siguiente ejemplo de Quine.

Si todos los F que son G son H, entonces algunos F no son G.

O todos los F son G o todos los F son H.

Por lo tanto, si todos los F que son H son G, entonces algunos F que no son H son G.

Esto se puede formalizar de la siguiente manera:

$(| (F \wedge G) \rightarrow H \mid\rightarrow \neg \mid F \rightarrow G \mid)$

$(| F \rightarrow G \mid \vee \mid F \rightarrow H \mid$

Por lo tanto,

$\mid (F \wedge H) \rightarrow G \mid\rightarrow \neg \mid (F \wedge \neg H) \rightarrow \neg G \mid$

Para determinar la corrección del argumento, basta con comprobar la validez del esquema:

$[(| (F \wedge G) \rightarrow H \mid\rightarrow \neg \mid F \rightarrow G \mid) \wedge (| F \rightarrow G \mid \vee \mid F \rightarrow H \mid] \rightarrow$

$[| (F \wedge H) \rightarrow G \mid\rightarrow \neg \mid (F \wedge \neg H) \rightarrow \neg G \mid]$

Primero lo transformamos a la FNC:

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg[(| (F \wedge G) \rightarrow H \mid\rightarrow \neg \mid F \rightarrow G \mid) \wedge (| F \rightarrow G \mid \vee \mid F \rightarrow H \mid]\vee \\
&[\neg \mid (F \wedge H) \rightarrow G \mid \vee\neg \mid (F \wedge \neg H) \rightarrow \neg G \mid] \\
&\equiv [\neg(| (F \wedge G) \rightarrow H \mid\rightarrow \neg \mid F \rightarrow G \mid) \vee \neg(| F \rightarrow G \mid \vee \mid F \rightarrow H \mid]\vee \\
&[\neg \mid (F \wedge H) \rightarrow G \mid \vee\neg \mid (F \wedge \neg H) \rightarrow \neg G \mid] \\
&\equiv [(| (F \wedge G) \rightarrow H \mid \wedge \mid F \rightarrow G \mid) \vee (\neg \mid F \rightarrow G \mid \wedge\neg \mid F \rightarrow H \mid]\vee \\
&[\neg \mid (F \wedge H) \rightarrow G \mid \vee\neg \mid (F \wedge \neg H) \rightarrow \neg G \mid]
\end{aligned}$$

Aplicamos el lema 1.4.15 y el corolario 1.4.16, para encontrar el esquema equivalente

$$\equiv [(\mid ((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G) \mid) \vee (\neg \mid F \to G \mid \wedge \neg \mid F \to H \mid]$$
$$\vee [\neg \mid ((F \wedge H) \to G) \wedge ((F \wedge \neg H) \to \neg G) \mid].$$

Dejando el último disyunto intacto, aplicamos la ley distributiva a los dos primeros:

$$\equiv [(\mid ((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G) \mid \vee \neg \mid F \to G \mid) \wedge (\mid ((F \wedge G) \to H) \wedge$$
$$(F \to G) \mid \vee \neg \mid F \to H \mid)] \vee [\neg \mid ((F \wedge H) \to G) \wedge ((F \wedge \neg H) \to \neg G) \mid].$$

Ésta es una disyunción cuyo primer miembro es una conjunción. Aplicamos de nuevo la ley distributiva:

$$\equiv [(\mid ((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G) \mid \vee \neg \mid F \to G \mid) \vee [\neg \mid ((F \wedge H) \to G) \wedge$$
$$((F \wedge \neg H) \to \neg G) \mid] \wedge$$
$$\mid ((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G) \mid \vee \neg \mid F \to H \mid) \vee$$
$$[\neg \mid ((F \wedge H) \to G) \wedge ((F \wedge \neg H) \to \neg G) \mid].$$

Tenemos ya la fórmula en FNC. Aplicamos el método a cada conyunto por separado. Transformamos $\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$ en $(\beta \wedge \gamma) \to \alpha$.

Ya que tanto

$[(F \to G) \wedge ((F \wedge H) \to G) \wedge ((F \wedge \neg H) \to \neg G)] \to [((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G))]$

como

$[(F \to H) \wedge ((F \wedge H) \to G) \wedge ((F \wedge \neg H) \to \neg G)] \to [((F \wedge G) \to H) \wedge (F \to G)]$

son tautologías, concluimos que el esquema de argumento original es válido.

Ejemplo 1.4.23. Ningún acróbata es torpe

Alberto es un mesero

Todos los meseros son torpes

Por lo tanto, Alberto no es un acróbata.

Aquí tenemos el enunciado «Alberto es un mesero» que al parecer no puede representarse con nuestros medios de expresión pues contiene el término singular «Alberto». Sin embargo, podemos representar con B al predicado «ser idéntico a Alberto». En ese caso, para determinar la validez de nuestro argumento basta con aplicar el criterio de validez que hemos visto al condicional:

$(\mid A \to \neg T \mid \wedge \mid B \to M \mid \wedge \mid M \to T \mid) \to \mid B \to \neg A \mid$

que es válido pues

$((A \to \neg T) \wedge (B \to M) \wedge (M \to T)) \to (B \to \neg A)$

es una tautología.

Ejemplo 1.4.24. Si hay genios, entonces todos los grandes compositores son genios.
Si alguien es temperamental, todos los genios son temperamentales.
Alguien es un genio temperamental.
Por lo tanto, todos los grandes compositores son temperamentales.

$[(\neg \mid \neg G \mid\!\rightarrow\mid C \rightarrow G \mid) \wedge (\neg \mid \neg T \mid\!\rightarrow\mid G \rightarrow T \mid \wedge\neg \mid \neg(G \wedge T) \mid] \rightarrow [\mid C \rightarrow T \mid] \equiv$
$\neg[(\neg \mid \neg G \mid\!\rightarrow\mid C \rightarrow G \mid) \wedge (\neg \mid \neg T \mid\!\rightarrow\mid G \rightarrow T \mid \wedge\neg \mid \neg(G \wedge T) \mid] \vee [\mid C \rightarrow T \mid] \equiv$
$[(\neg \mid \neg G \mid \wedge\neg \mid C \rightarrow G \mid) \vee (\neg \mid \neg T \mid \wedge\neg \mid G \rightarrow T \mid] \vee [\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid] \equiv$
$(\neg \mid \neg G \mid \vee\neg \mid \neg T \mid) \wedge (\neg \mid C \rightarrow G \mid \vee\neg \mid \neg T \mid) \wedge (\neg \mid \neg G \mid \vee\neg \mid G \rightarrow T \mid \wedge$
$(\neg \mid C \rightarrow G \mid \vee\neg \mid G \rightarrow T \mid] \vee [\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid] \equiv$
$[(\neg \mid \neg G \wedge \neg T \mid) \wedge (\neg \mid (C \rightarrow G) \wedge \neg T \mid) \wedge (\neg \mid \neg G \wedge (G \rightarrow T) \mid \wedge$
$(\neg \mid (C \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow T) \mid] \vee [\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid] \equiv$
$[(\neg \mid \neg G \wedge \neg T \mid) \vee (\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid)] \wedge$
$[\neg \mid (C \rightarrow G) \wedge \neg T \mid) \vee (\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid)] \wedge$
$[(\neg \mid \neg G \wedge (G \rightarrow T) \mid \vee (\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid)] \wedge$
$[(\neg \mid (C \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow T) \mid \vee (\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid)] \equiv$
$[(\mid \neg G \wedge \neg T \mid) \rightarrow ((\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid))] \wedge$
$[(\mid (C \rightarrow G) \wedge \neg T \mid\!\rightarrow ((\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid))] \wedge$
$[\mid \neg G \wedge (G \rightarrow T) \mid\!\rightarrow ((\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid))] \wedge$
$[(\mid (C \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow T) \mid\!\rightarrow (\mid \neg(G \wedge T) \mid \vee \mid C \rightarrow T \mid))]$

y dado que
$(\neg G \wedge \neg T) \rightarrow \neg(G \wedge T)$,
$((C \rightarrow G) \wedge \neg T) \rightarrow \neg(G \wedge T)$,
$(\neg G \wedge (G \rightarrow T)) \rightarrow \neg(G \wedge T)$ y
$((C \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow T)) \rightarrow (C \rightarrow T)$
son tautologías, se sigue de los lemas 1.4.12 y 1.4.14 que el esquema original es válido.

Cuentan que antes junto al río se reunían los pastores a jugar hasta que aparecieron dos niños que brincaban de aquí para allá, sus ropas eran buenas, parecían extranjeros. Los pastores querían acercarse a ellos, pero se alejaban o simplemente desaparecían. Otro día, los pastores los volvieron a ver, pero parecían desvanecerse. Al llegar a casa su papá les dijo que ya no jugaran en el agua, porque «un día de estos'» podrían desaparecer con ellos. Los pastores no escucharon, hasta que llegó el día en que uno de ellos ya no salió del agua. De inmediato, el otro pastor fue a avisarle a su papá,

quien corrió despavorido a buscarlo, pero ya no lo encontró. Desde entonces, los pastores ya no se reúnen para jugar en el ró.
Así lo cuentan los mazahuas.

El lenguaje de la lógica de Frege.

Varios avances importantes en lógica aparecieron en el libro de Frege **Begriffsschrift**, publicado en 1879. Era tradicional analizar los enunciados en la forma sujeto-predicado, sea que el sujeto fuese el nombre de un individuo u objeto o el de una clase (como en los silogismos aristotélicos). Consideremos la relación entre los enunciados «Diana es madre de Luisa» y «Luisa es hija de Diana». Aunque expresan el mismo hecho, la relación entre ambos se pierde si los representamos al modo tradicional, es decir de la siguiente manera: «d es M» y «l es H».

Una vez formalizados, de uno no podríamos deducir el otro a pesar de que son sinónimos. Lo mismo ocurre con los enunciados «Holofernes ama a Judith» y «Judith es amada por Holofernes». Uno atribuye una propiedad a Holofernes y otro otra propiedad a Judith. Deseamos que al escribir un argumento en el lenguaje de la lógica (o al analizarlo con los recursos lógicos) las características que lo hacen correcto o inválido queden resaltadas, mientras que las demás se omitan. Por ejemplo, cuando analizamos un silogismo en modo Barbara,

Todos los sabios son atenienses
Todos los griegos son sabios
Todos los griegos son atenienses
Lo representamos así,
Todo A es B.
Todo C es A.
Todo C es B.

Con ello resaltamos que la palabra todo aparece en los tres enunciados y que cierto término aparece como predicado en una premisa y como sujeto en otra. En cambio, el significado del término atenienses no es relevante para determinar la corrección del argumento y entonces queda eliminado en nuestra simbolización. Por ello, analizar el argumento de Luis y Diana como lo hicimos no es correcto. Frege introdujo otra manera de analizar los enunciados. Así como en aritmética se considera que la expresión $X + 1$ representa, o denota, la función que a cada número natural como argumento le asigna como valor su sucesor, podemos considerar que
El padre de ...

es el nombre de una función que a cada individuo (como argumento) le asocia su padre (como valor correspondiente a ese argumento). Ambas son funciones unarias pues para un argumento tienen un valor.

X	X+1
1	2
23	24
999	1000
7	8

Individuo	El padre de...
Caín	Adán
Abel	Adán
Cuauhtémoc Cárdenas	Lázaro Cárdenas
Vera	Max

Por otro lado, $x + y$ es, en la aritmética, el nombre de una función binaria. A cada par de números como argumentos la función les asigna como valor su suma. Veamos ahora cómo extiende Frege esta idea.

x	y	x+y
2	2	4
58	67	125
4	1004	1008
5	2	7
61	3	64

Supongamos simplemente que los valores de verdad, VERDADERO y FALSO, son dos objetos.

Entonces «...es africano» puede verse como la expresión (más precisamente como el nombre) de una función que asocia VERDADERO a cada individuo que es africano y FALSO a los que no son africanos. Como vimos, AFRICANO se consideraba como un concepto. Por eso Frege llama conceptos a las funciones unarias que asocian con cada argumento un valor de verdad (es decir, VERDADERO o FALSO).

X	X es Africano
Nelson Mandela	VERDADERO
Nadine Gordimer	VERDADERO
Paul Robeson	FALSO
Paul Coetzee	VERDADERO
Angela Davis	FALSO

De hecho, si tomamos cualquier enunciado en que figure un nombre propio y eliminamos este último, obtenemos lo que Frege llamó un término conceptual (de primer orden). Así, de *los nazis mataron a Lindembaum* formamos el término conceptual *los nazis mataron a...*, el cual designa a un concepto que subsume a todos los individuos a los que los nazis dieron muerte. Asimismo, de *Salomé pidió a Herodes la cabeza de San Juan Bautista* formamos el término conceptual *Salomé pidió a... la cabeza del bautista* que denota un concepto bajo el que cae Herodes (y, quizás, algunos otros).

Examinemos otro ejemplo:
Tomás prometió a María llevarla a visitar a Eunice
puede considerarse como formado por el nombre Tomás y el término conceptual
...prometió a María llevarla a visitar a Eunice
o como una predicación con sujeto María y predicado
Tomás prometió a... llevarla a visitar a Eunice
o como constituido del término singular *Eunice* y el término conceptual
Tomás prometió a María llevarla a visitar a...
o de otras formas que veremos más adelante.

Extendiendo esa idea, podemos ver a
... es hermano de ...
como una función binaria que asocia a dos individuos el valor VERDADERO, si son hermanos y FALSO, si no es el caso.

x	y	x es hermano de y
Felipe Ángeles	Álvaro Obregón	FALSO
Raúl Castro	Fidel Castro	VERDADERO
Clara Zetkin	Rosa Louxemburg	FALSO

Tradicionalmente, HERMANDAD se consideraba como una relación binaria. Por eso Frege llama relaciones binarias a las funciones binarias que asocian un valor de verdad a cada par de argumentos. Entonces podemos formar un término relacional binario (es decir, el nombre de una relación binaria) eliminando de un enunciado dos nombres propios. Por ejemplo,
... salvó la vida de...
denota una relación en la que están dos individuos (en un cierto orden) si el primero salvó la vida del segundo. Llamemos «términos relacionales binarios de primer orden» a los predicados así formados y «relaciones binarias de primer orden» a las funciones correspondientes. De la misma forma se pueden formar términos relacionales terna-

rios o de mayor aridad o valencia. Por ejemplo, el enunciado
Héctor, Ariadna y Helena son hermanos de Evodio
contiene el predicado binario . . . ser hermano de. . .
Para representarlo consideraremos a la conjunción (que aquí une nombres) como un operador proposicional. Es decir, consideraremos a ese enunciado como equivalente a Juan es hermano de Evodio y Ariadna es hermana de Evodio y Helena es hermana de Evodio, lo que se simbolizará con una fórmula como
$(Hjb \wedge Hab \wedge Hhb)$
Ayeleen invitó a Dana y a Vera o a Mauricio
se representará con una fórmula como la siguiente,
$(Iad \wedge (Iav \vee Iam))$
Citlali abrazó, besó y finalmente golpeó a Santi
podrá simbolizarse con
$(Acs \wedge Bcs \wedge Gcs)$.

De igual manera, estipularemos que dos relaciones binarias serán iguales si subsumen las mismas parejas. Por ello, una relación binaria puede identificarse con un conjunto de pares ordenados. Así, la relación de *ser un número natural mayor que otro* puede identificarse con el conjunto $\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4),(3,5)\ldots\}$ Lo mismo ocurre con relaciones de aridad mayor.

Pasemos ahora a un enunciado universal, por ejemplo, *todo taiwanés es budista*. Era tradicional analizarlo como si estuviese constituido por el sujeto *taiwanés* modificado por una expresión de cantidad *todo* y el predicado *budista*.

Si esto fuese correcto, la negación de este enunciado, a semejanza del enunciado *Alí es budista*, debería ser *todo taiwanés no es budista*, pero esto es obviamente falso. Frege presenta otro análisis. Podemos concebir a *todo taiwanés es*. . . como un término funcional que denota un concepto de orden superior. En efecto, esta vez no se trata de una función que asigna a cada individuo un valor de verdad, sino de una función que asigna un valor de verdad a cada concepto (de cierto tipo). Por ejemplo, al concepto expresado por *es budista* el concepto en cuestión otorga el valor FALSO pues no todo taiwanés es budista, mientras que al concepto expresado por *es chino* la función le otorga el valor VERDADERO pues todo taiwanés es chino. Entonces *todo taiwanés es budista* puede ser considerado como formado por el término conceptual *es budista* y el término conceptual de orden superior *todo taiwanés es*. . .

Llamemos a estos predicados «términos conceptuales de segundo orden».

A	Todo taiwanés es A
CHINO	VERDADERO
CORDADO	VERDADERO
HIJO DE MAO	FALSO
ASTRÓNOMO	FALSO
ESQUIZOIDE	FALSO

En general, Frege considera a la expresión *todo...* como refiriéndose a un concepto de orden superior que asocia un valor de verdad a cada concepto de primer orden. Por ejemplo, asocia VERDADERO a los conceptos expresados por ... *es idéntico a sí mismo* y *si... es jarocho, entonces ... es veracruzano* (donde se entiende que ambos espacios deben ser llenados por el mismo término), mientras que asocia FALSO a ... *es chino* porque no todos los objetos del universo son chinos.

A	Todo es A
CHINO	FALSO
IDÉNTICO A SÍ MISMO	VERDADERO
SI TAIWANES CHINO	VERDADERO
ADMIRADOR DE ADELITA	FALSO

Podemos también considerar a los enunciados universales positivos (del tipo A) de la lógica aristotélica como formados de dos términos conceptuales y un término relacional binario. En analogía con lo recién expuesto, *Todo... es...* denota una relación que se da entre los conceptos *SER HUMANO* y *SER MORTAL* y no entre los conceptos *SER CRISTIANO* y *SER RUSO*.

La lógica contemporánea retoma parcialmente este análisis fregeano. Para Frege *todo* se refería a todos los objetos de nuestro universo. Para expresar *todo jarocho sabe bailar* usaba la paráfrasis *para todo objeto del universo, si es jarocho, entonces sabe bailar*. En cambio, en lógica contemporánea *todo* se refiere a todos los objetos de un universo predeterminado o implícito. Ya no suponemos que con *todo objeto* nos refirimos a todos los objetos del universo, sino que, en cada caso, está dado o implícito un universo de discurso (por ejemplo, el de los seres humanos, el de los números naturales o el de los seres vivos) y que los cuantificadores *todos y algunos* aluden a ese universo. Por ejemplo, podemos considerar de la misma forma a las expresiones *cada*, *hay muchos*, *existe al menos un*, *hay exactamente tres*. Si el universo está constituido de los seres humanos, el concepto HAY MÁS DE UN MILLÓN asocia falso al concepto de primer orden SABIOS y verdadero al concepto TELEVIDENTES. Si el universo sólo está formado por los monjes del Tíbet, HAY TRES asigna VERDADERO a SABIOS y FALSO a FUTBOLISTAS.

Sin más precisiones, llamaremos «cuantificadores» a todos estos conceptos y relaciones de orden superior. En la lógica aristotélica se consideran como términos lógicos los cuantificadores *todo... es* ____, *ningún... es*____, *algún... es* ____ *y algún... no es*____, así como la conjunción y el condicional.

Supongamos que agregamos a los anteriores el cuantificador *La mayoría de los...* son ____. Entonces tendríamos que considerar si un esquema de la forma,
La mayoría de los A son B.
La mayoría de los B son C.
La mayoría de los A son C.
es válido. Si así fuera, sería imposible encontrar tres predicados que al colocarse en lugar de A, de B y de C produjeran un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa. Es fácil ver que no es así, pues sean $A_{10} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}, A_9 = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}, \ldots, A_0 = \{0\}$. Entonces,

La mayoría de los A_{10} son A_9
La mayoría de los A_9 son A_8
La mayoría de los A_{10} son A_8

tiene premisas verdaderas y la conclusión tendría que ser verdadera (y lo es) pero, reiterando el argumento, llegaríamos a la conclusión falsa

La mayoría de los A_{10} son A_0.

Agreguemos ahora el cuantificador Hay un número finito de... Así, tenemos por ejemplo, el siguiente esquema

Hay un número finito de A
Hay un número finito de B
Por lo tanto, hay un número finito de $(A \wedge B)$

es válido. Mientras que

Hay un número finito de $(A \wedge B)$
Por lo tanto, hay un número finito de A

es evidentemente incorrecto. Ahora bien, de todos los cuantificadores que hemos visto, en este libro sólo trataremos con *todos* (los objetos) y de aquellos que sean susceptibles de expresarse usando *todos*, el símbolo de igualdad y los conectivos lógicos veritativo-funcionales. Claro está que, a veces, en lugar de *todo* emplearemos como sinónimos *para cualquier objeto, cada objeto*, etc. de acuerdo con lo que, en cada ocasión, parezca más idiomático. Por ejemplo, los cuantificadores aristotélicos resultan superfluos pues los enunciados que aparecen a la izquierda en la siguiente lista pueden ser parafraseados por los que les siguen a la derecha,

Todo A es B Cualquier objeto, si es A es B.
Ningún A es B Cualquier objeto, si es A no es B.
Algún A es B No cualquier objeto, si es A no es B.
Algún A no es B No cualquier objeto, si es A es B.

De la misma manera, podemos expresar: hay por lo menos un A como no es cierto

que todos los objetos no sean A.

Representemos en lo sucesivo los predicados y relaciones ordinarias (no de orden superior) con letras mayúsculas, y los nombres propios con letras minúsculas (exceptuadas las últimas del alfabeto). Agreguemos a nuestro lenguaje como variables las últimas letras del alfabeto, los símbolos para los conectivos lógicos usuales y paréntesis. Por último, añadamos los símbolos $\forall$ y $\exists$. Éstos funcionan de la siguiente manera: si A es un predicado, $(\forall x)Ax$ significa que todos los individuos (del universo que estemos considerando) tienen la propiedad que A simboliza.

En lugar de x, pudimos poner y o z para obtener
$(\forall y)Ay$
$(\forall z)Az$
que tienen el mismo significado. Las variables en cada caso corresponden a la palabra *objeto (o individuo)* y al pronombre que está en lugar del sujeto. Por ello es indiferente si usamos y o z. Por ejemplo, si A y B simbolizan *ser antropólogo* y *ser beisbolista*, entonces
$(\forall x)(Ax \wedge Bx)$
significa: Para cualquier individuo, ese individuo es antropólogo y ese individuo es beisbolista,
o, más idiomáticamente,
Para cualquier individuo, él es antropólogo y él es beisbolista.
O
Cualquier individuo es antropólogo y beisbolista.

De manera análoga,
$(\forall x)(Ax \rightarrow Bx)$
significa: Para cualquier individuo si (él) es antropólogo, entonces (él) es beisbolista.
Por otro lado,
$(\exists x)(Ax \wedge Bx)$
simboliza el enunciado
Hay (por lo menos) un individuo tal que (él) es antropólogo y (él) es beisbolista.

Desde luego, pudimos haber expresado lo mismo utilizando únicamente $\forall$ pues decir que hay un individuo con una propiedad es decir que no todos los individuos carecen de esa propiedad. Es decir $(\exists x)Ax \equiv \neg(\forall x)\neg Ax$, donde $\equiv$ significa que las expresiones colocadas en cada uno de sus extremos significan lo mismo (más adelante dotaremos a este símbolo de una significación precisa). Veamos algunos otros ejemplos de expresiones del castellano que pueden representarse simbólicamente utilizando los conectivos anteriores, el aparato de los conectivos veritativo-funcionales y

el símbolo de identidad.

1. Todo mundo vino a verme
$(\forall x)Vx$

donde Vx representa el predicado *vino a verme*.

Desde luego, también pudimos haber analizado el enunciado utilizando un predicado binario Nxy que signifique x vino a ver a y y empleando una constante, digamos b, para simbolizarme. Obtendríamos entonces: $(\forall x)Nxb$. Ambos análisis son válidos.

2. Todos los que vinieron a verme eran mexicanos
$(\forall x)(Vx \rightarrow Mx)$.

Claramente, pudimos haber usado otra letra como variable. Por ejemplo,
$(\forall y)(Vy \rightarrow My)$
es equivalente a la fórmula anterior.

3. Todos los mexicanos que vinieron a verme eran guadalupanos
$(\forall x)((Vx \wedge Mx) \rightarrow Gx)$.

4. Nadie vino a verme
$(\forall x)\neg Vx$

o, en forma equivalente
$\neg(\exists x)Vx$.

5. Ningún mexicano vino a verme
$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Vx)$

o
$\neg(\exists x)(Mx \wedge Vx)$.

6. Ningún mexicano que sea guadalupano vino a verme
$(\forall x)((Mx \wedge Gx) \rightarrow \neg Vx)$.

7. Alguien vino, pero no era mexicano
$(\exists x)(Vx \wedge \neg Mx)$.

8. Si todos vinieron, algunos no son guadalupanos
$((\forall x)Vx \rightarrow (\exists x)\neg Gx)$.

9. Hay uno que si es mexicano, no vino a verme
$(\exists x)(Mx \rightarrow \neg Vx)$.

10. Yo no vine a verme
$\neg Vb$

o
$\neg Nbb$.

11. Si alguien vino a verme, fue Julia
$(\forall x)(Vx \rightarrow x = j))$.

12. Nadie excepto Julia vino a verme
$(Vj \wedge (\forall x)(Vx \rightarrow x = j))$.

13. Sólo los Fernández vienen a verme
$(\forall x)(Vx \rightarrow Fx)$.

14. Un amigo mío vino a verme
$(\exists x)(Axb \wedge Nxb)$

,

donde Axy representa que x es amigo de y.

15. Vine a ver a un amigo mío
$(\exists x)(Axb \wedge Nbx)$.

16. Fui a ver a todos mis amigos
$(\forall x)(Axb \rightarrow Nbx)$.

17. Todos mis amigos vinieron a verme, excepto Julia.
$(\forall x)((Axb \wedge \neg x = j) \rightarrow Nxb)$.

18. Algunos de mis amigos vinieron a verme
$(\exists x)(Axb \wedge Nxb)$.

Aquí entendemos algunos como significando lo mismo que por lo menos uno.

19. Algunos vinieron a verme, pero no todos
$((\exists x)Nxb \wedge \neg(\forall x)Nxb)$.

20. Hay alguien que es mi amigo y de quien yo también soy amigo
$(\exists x)(Axb \wedge Abx)$.

En la fórmula
$(\exists x)(Nxb \wedge \neg(\forall x)Nxb)$,
diremos que x aparece, figura u ocurre cuatro veces: la primera junto al símbolo $\exists$, la segunda al lado de N, etc. Estas ocurrencias o apariciones pueden ser de dos tipos. Por ejemplo, si consideramos la expresión
$x + 7 > 10$
donde la x que representa un lugar vacío que puede ser llenado por un numeral para constituir un enunciado verdadero o falso. En este caso, diremos que la variable ocurre libre. En cambio, en la expresión
$(\exists x)x + 7 > 10$
ninguna de las dos figuraciones de x está allí para ser sustituida, sino que ambas contribuyen a expresar o simbolizar un enunciado. En este caso diremos que ambas ocurrencias de la variable están acotadas. Una variable puede ocurrir libre y acotada en una expresión. Por ejemplo, en
$(\exists x)(Nxb \wedge Nxb)$
x ocurre tres veces, siempre acotada, mientras que en
$((\exists x)Nxb) \wedge Nxb$

x figura dos veces acotada y la última libre. La segunda aparición representa un pronombre que está en aposición con una expresión de la forma «hay un individuo» (representada por $(\exists x)$). La tercera, en cambio, es un lugar vacío que igualmente podría haber sido representado por otra variable. Estas ideas serán precisadas en capítulos subsecuentes. Los enunciados que antes formalizábamos con esquemas de enunciados booleanos ahora los podemos simbolizar utilizando nuestros dos cuantificadores, los conectivos lógicos y las mismas letras para predicados. Por ejemplo,
$| (A \wedge B) \rightarrow (C \vee \neg D) |$
puede representarse con
$(\forall x)((Ax \wedge Bx) \rightarrow (Cx \vee \neg Dx))$
mientras que
$\neg | \neg A |$
será ahora simbolizado por" $(\exists x)Ax$.

Tomemos ahora un esquema silogístico (Felapton),
si ningún M es G y todo M es P, entonces algún P no es G (Felapton).
Podemos simbolizarlo así,
$(\neg(\exists x)(Mx \wedge Gx) \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow Px)) \rightarrow (\exists x)(Px \wedge \neg Gx)$
Mientras que el enunciado si ningún acróbata es torpe y Alberto es un mesero y todos los meseros son torpes, entonces Alberto no es un acróbata puede ahora simbolizarse así,
$(((\forall x)(Ax \rightarrow \neg Tx) \wedge Ma \wedge (\forall x)(Mx \rightarrow Tx)) \rightarrow \neg Aa)$.

Esta vez pudimos representar con mayor precisión la información semántica (relevante desde el punto de vista lógico) contenida en el enunciado *Alberto es un mesero*. Antes lo formalizamos como si *Alberto* fuese un predicado. Podría considerársele como *x es idéntico a Alberto* pero, con ello, no hemos dicho que sólo hay una persona idéntica a Alberto, lo cual sí está implícito en el uso del nombre propio *Alberto*.

Ahora bien, con nuestro lenguaje simbólico hay enunciados cuya validez aún no podemos determinar (con el método de los esquemas booleanos), aunque sólo contengan predicados de aridad uno. Por ejemplo, considere el esquema $(\forall x)(\exists y)((Ax \leftrightarrow By) \wedge Dc)$. Éste será válido si es verdadero para toda asignación a las constantes no lógicas de significados de acuerdo a su tipo gramatical. Más precisamente, una interpretación para el fragmento monádico de nuestro lenguaje está dada por un conjunto universo U (al que aluden las variables) y una función que asocia a las letras mayúsculas subconjuntos de ese universo (es decir, conceptos) y a cada constante un elemento de U. Desde luego, un esquema de la forma Dc será válido si lo es $(\forall z)Dz$ pues si éste fuese falso en una interpretación, querría decir que, en ella, hay un valor (de z), digamos a, que no cae bajo el concepto correspondiente a D. En consecuencia, Dc será falsa en la interpretación que es idéntica a la anterior excepto que asocia con c ese valor a. Entonces, para determinar la validez de un esquema en que aparece una constante bastará substituirla con una variable que no aparezca en la fórmula y anteceder ésta con un cuantificador universal en esa variable. Por ejemplo, el esquema $(\forall x)(\exists y)((Ax \leftrightarrow By) \wedge Dc)$ es válido si lo es

$(\forall z)\ (\forall x)\ (\exists y)\ ((Ax \leftrightarrow By) \wedge Dz)$.
Ahora bien, ¿cómo transformar éste en un esquema de enunciados booleano que sea equivalente? Supongamos que x no aparece libre en la fórmula P; entonces
$(\forall x)(P \wedge Ax)$
es equivalente a
$(P \wedge (\forall x)(Ax))$
pues decir que llueve y todos están mojados es lo mismo que decir que todos tienen la propiedad de que llueve y están mojados. Es evidente que también
$(\forall x)(Ax \wedge P)$
es equivalente a las dos fórmulas anteriores y a $((\forall x)(Ax) \wedge P)$.
Igualmente, $(\forall x)(Ax \vee P)$ es equivalente a
$((\forall x)Ax \vee P)$ (si P no contiene libre a x).
Utilizando las leyes de De Morgan, comprobamos que
$(\exists x)(P \vee Ax) \equiv \neg(\forall x)\neg(P \vee Ax) \equiv \neg(\forall x)(\neg P \wedge \neg Ax) \equiv \neg(\neg P \wedge (\forall x)\neg Ax)$
$\equiv \neg(\neg P \wedge \neg(\exists x)Ax) \equiv (P \vee (\exists x)Ax))$
De la misma forma podemos comprobar que
$(\exists x)(P \wedge Ax) \equiv (P \wedge (\exists x)Ax) \equiv (\exists x)Ax \wedge P$
y que,
$(\exists x)(P \to Ax) \equiv (P \to (\exists x)Ax)$.
$(\forall x)(P \to Ax) \equiv (P \to (\forall x)Ax)$.
En cambio,

$$\begin{aligned}(\exists x)(Ax \to P) \equiv&(\exists x)(\neg Ax \vee P)\\ \equiv&((\exists x)\neg Ax \vee P)\\ \equiv&(\neg(\forall x)Ax \vee P)\\ \equiv&((\forall x)Ax \to P),\end{aligned}$$

y
$(\forall x)(Ax \to P) \equiv ((\exists x)Ax \to P)$.
Es fácil ver que
$(\forall x)(Ax \wedge Bx) \equiv ((\forall x)Ax \wedge (\forall x)Bx)$.
Usando las leyes de De Morgan, comprobamos también que
$(\exists x)(Ax \vee Bx) \equiv ((\exists x)Ax \vee (\exists x)Bx)$.
Con estas equivalencias en mente, podemos transformar un esquema que sólo emplee predicados de aridad uno en un esquema de enunciados booleano. Por ejemplo, si deseamos encontrar un esquema de enunciados booleano equivalente al esquema
$(\forall z)(\forall x)(\exists y)((Ax \leftrightarrow By) \wedge Dz)$
sustituimos la forma
$(Ax \leftrightarrow By)$
por otra equivalente en forma normal disyuntiva
$(\forall z)(\forall x)(\exists y)(((Ax \wedge By) \vee (\neg Ax \wedge \neg By)) \wedge Dz)$
y puesto que Dz no contiene libre a y, este esquema es equivalente a

$(\forall z)(\forall x)((\exists y)((Ax \wedge By) \vee (\neg Ax \wedge \neg By) \wedge Dz)$
Distribuyendo el cuantificador existencial
$(\forall z)(\forall x)(((\exists y)(Ax \wedge By) \vee (\exists y)(\neg Ax \wedge \neg By) \wedge Dz) \equiv$
(podemos estrechar el alcance de los cuantificadores),
$(\forall z)((\forall x)((Ax \wedge (\exists y)By) \vee (\neg Ax \wedge (\exists y)\neg By)) \wedge Dz) \equiv$
$(\forall z)((\forall x)((Ax \wedge (\exists y)By) \vee (\neg Ax \wedge \neg(\forall y)By)) \wedge Dz)$
(aplicamos leyes distributivas para poder distribuir el cuantificador universal)

$$(\forall z)[(\forall x)((Ax \vee \neg Ax) \wedge (Ax \vee \neg(\forall y)By)$$
$$\wedge((\exists y)By \vee \neg Ax) \wedge ((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By)) \wedge Dz]$$

(distribuimos el cuantificador universal a través de la conjunción)

$$\equiv(\forall z)[(\forall x)(Ax \vee \neg Ax) \wedge (\forall x)$$
$$(Ax \vee \neg(\forall y)By) \wedge (\forall x)((\exists y)By \vee \neg Ax)\wedge$$
$$(\forall x)((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By) \wedge Dz]$$

(estrechamos el alcance de los cuantificadores)

$$(\forall z)[(\forall x)(Ax \vee \neg Ax) \wedge ((\forall x)Ax \vee \neg(\forall y)By) \wedge ((\exists y)By \vee (\forall x)\neg Ax)\wedge$$
$$((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By) \wedge Dz)$$
$$\equiv (\forall z)[(\forall x)(Ax \vee \neg Ax) \wedge ((\forall x)Ax \vee \neg(\forall y)By) \wedge ((\exists y)By\vee$$
$$\neg(\exists x)Ax) \wedge ((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By) \wedge Dz]$$

(estrechamos el alcance del cuantificador $(\forall z)$)

$$((\forall x)(Ax \vee \neg Ax) \wedge ((\forall x)Ax \vee \neg(\forall y)By) \wedge ((\exists y)By \vee \neg(\exists x)Ax)\wedge$$
$$((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By) \wedge (\forall z)Dz)$$
$$\equiv| A \vee \neg A \mid \wedge(\mid A \mid \vee\neg \mid B \mid) \wedge (\neg \mid \neg B \mid \vee \mid \neg A \mid)\wedge$$
$$(\neg \mid \neg B \mid \vee\neg \mid B \mid)\wedge \mid D \mid .$$

Debimos haber colocado una instancia del cuantificador universal $(\forall x)$ antes de la subfórmula $((\exists y)By \vee \neg(\forall y)By)$ pero lo suprimimos porque, al no acotar ninguna variable en la subfórmula, no agrega nada al significado de ésta. Por ejemplo, $(\forall x)(\forall y)Ay \equiv (\forall y)Ay$. Esto muestra cómo el método que vimos para determinar la validez de esquemas de enunciados booleanos puede extenderse a todo esquema de nuestra lógica en que sólo se usen predicados de valencia uno.Veamos algunos ejemplos de cómo traducir formalmente enunciados del lenguaje ordinario. Supongamos que nuestro universo de discurso son los seres humanos y que los predicados siguientes tienen la significación que se especifica a continuación:

Ixy	$x = y$
Pxy	x es padre de y
Mxy	x es madre de y
Hxy	x es hermano de y
Hx	x es varón
Mx	x es mujer
Exy	x es esposo de y
Axy	x es amigo de y
Ux	x es universitario
Ex	x es estudiante
Fx	x es flojo

y que las constantes a, b y c denotan a Alex, Benito y Cecilia respectivamente. Parafraseemos en nuestro magro lenguaje formal las siguientes oraciones:

1. Sólo los flojos van a la universidad
$(\forall x)(Ux \to Fx)$.

2. Cecilia tiene algunos hermanos muy flojos
$(\exists x)(Hcx \wedge Fx)$.

3. Los hijos de Benito son varones
$(\forall x)(Pbx \to Hx)$.

Nótese cómo empleamos Pxy para expresar la relación que tiene un hijo y con su padre x. Decir que Benito es padre de x es lo mismo que decir que x es hijo de Benito. En cambio,
$(\forall x)(Pxb \to Hx)$
significa que los padres de Benito son varones.

4. Los hermanos de Cecilia son universitarios, y ella es estudiante, a diferencia de Alex que es muy flojo.
$(\forall x)(Hxc \to Ux) \wedge Ec \wedge \neg Ea \wedge Fa$.

5. Cecilia no es amiga de nadie que sea amigo de Alex
$(\forall y)(Aya \to \neg Acy)$.

De nuevo, adviértase el orden en que aparece y.

6. Alex es padre
$(\exists x)Pax$.

7. Alex es abuelo paterno de Cecilia.

Aunque no tenemos un predicado para representar la relación de abuelo a nieto, podemos expresar nuestra proposición diciendo que Alex tiene un hijo que es padre de Cecilia, de la siguiente manera $(\exists x)(Pax \wedge Pxc)$. Diremos que la relación *binaria SER ABUELO PATERNO DE y* puede expresarse con los recursos de nuestro lenguaje, o bien, que si introdujéramos un símbolo Bxy para la relación de ser abuelo paterno, este símbolo sería superfluo. No precisaremos esta idea hasta más tarde. Lo decisivo

ahora es que una expresión E es definible o expresable en un lenguaje si, para todo contexto en que puede aparecer E, tenemos una fórmula dentro del lenguaje que dice o asevera lo mismo, es decir que hace superflua la introducción de E. Una definición será una expresión (o varias expresiones), no necesariamente del lenguaje que estamos tratando, y que es del tipo $F \equiv G$, donde G es una expresión de nuestro lenguaje y F una expresión que contiene símbolos de nuestro lenguaje, además de la expresión que está siendo definida. Lo que esa expresión indica es que la expresión E, en el contexto en que aparece en F, siempre puede reemplazarse por G. Por ejemplo, en cálculo proposicional suele darse la definición $(\alpha \wedge \delta) \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\delta)$. Ésta indica cómo eliminar el símbolo de conjunción cada vez que aparezca entre dos fórmulas. Diremos que $\wedge$ ha sido definido o que la función proposicional de conjunción ha sido definida a partir de los símbolos de conectivos $\rightarrow$ y $\neg$.

8. Alex es nieto de Cecilia
$(\exists x)(Mcx \wedge (Pxa \vee Mxa))$.

Es decir, la relación de ser nieto es expresable en nuestro lenguaje.

9. Cecilia es abuela
$(\exists y)(\exists x)(Mcx \wedge (Pxy \vee Mxy))$.

10. Los nietos de Cecilia son universitarios
$(\forall y)((\exists x)(Mcx \wedge (Pxy \vee Mxy)) \rightarrow Uy)$.

Si bien las relaciones de *Ser abuelo paterno, ser bisabuelo por línea paterna, ser tatarabuelo por línea paterna*, etc., son todas expresables en nuestro lenguaje, no podemos expresar la relación *ser ancestro por línea paterna* aunque, por el momento, no tenemos los recursos para demostrarlo.

Frege resolvió esta cuestión de la siguiente manera: primero, diremos que una propiedad es hereditaria si cada vez que un padre la tiene, la tiene también el hijo. Esto puede expresarse en nuestro lenguaje,
$HER(F) \equiv (\forall x)(\forall y)((Pxy \wedge Fx) \rightarrow Fy)$
Ahora bien, x es ancestro por línea paterna de y si y sólo si y tiene todas las propiedades hereditarias que tienen los hijos de x, es decir,
$ANCxy \equiv (\forall F)((HER(F) \wedge (\forall z)(Pxz \rightarrow Fz)) \rightarrow Fy)$.
Sin embargo, esta definición excede los recursos de nuestro lenguaje pues cuantifica sobre propiedades (o conceptos). Más adelante veremos cómo tratar estos cuantificadores.

Ejemplo 1.4.25. Formalicemos el siguiente argumento.
Si no fueran tan flojos, los hijos de Benito irían a la universidad.
Actualmente quien no va a la universidad está condenado a ser pobre, a menos que se dedique al narcotráfico.
Y cómo no veo a esos chicos jugándose el pellejo, van que vuelan para pobres.

Agreguemos los predicados,

Nx x se dedica al narcotráfico.
Jx x se juega el pellejo.
Ox x es pobre.

La primera premisa no sólo contiene un condicional, sino que afirma de manera implícita su antecedente (que los hijos de Benito son flojos).
$(\forall x)(Pbx \to (\neg Ux \wedge Fx))$
Sin embargo, aquí hay un aspecto que nuestra formalización no recoge: la alusión implícita a que Benito tiene varios hijos. Esto no es importante para la corrección de este argumento, pero en otros casos la alusión tácita a una pluralidad podría ser decisiva. La segunda premisa puede formalizarse así como
$(\forall x)((\neg Ux \wedge \neg Nx) \to Ox)$.
Una tercera premisa (o el antecedente de la conclusión) sería,
$(\forall x)(Pbx \to \neg Jx)$.
Por último, la conclusión es
$(\forall x)(Pbx \to Ox)$.
Implícita está la premisa de que los narcos se juegan el pellejo.

Ejemplo 1.4.26. Consideremos ahora el siguiente argumento.

Al menos un hermano de Cecilia está en la universidad.
Benito es hermano de Cecilia y no es universitario.
Por lo tanto, Cecilia tiene varios hermanos.

Si interpretamos la conclusión como *Cecilia tiene al menos dos hermanos* que es lo que se desprende de las premisas, entonces podemos representarla siempre y cuando contemos con un predicado binario, como Ixy, que exprese la identidad. Entonces las premisas de nuestro argumento pueden escribirse así,
$(\exists x)(Hxc \wedge Ux)$
$(Hbc \wedge \neg Ux)$,
mientras que, para la conclusión no basta con la fórmula
$(\exists x)(\exists y)(Hxc \wedge Hyc)$
porque no sabemos que x y y representen miembros distintos del universo. La expresión correcta es
$(\exists x)(\exists y)((Hxc \wedge Hyc) \wedge \neg Ixy)$.

«Ancha y verde pluma de quetzal». Decíanse estas palabras refiriéndose a un buen orador, ya fuera el rey, alguno de los nobles o algún jefe.

Ejemplo 1.4.27. Consideremos ahora el siguiente argumento.

Cecilia no tuvo más de de un hermano.
Los dueños del circo son hermanos de Cecilia.
Alexy Benito son dueños del circo.
Por lo tanto, Alex es idéntico a Benito.

¿Cómo expresamos que Cecilia no tuvo más de un hermano? Diciendo que cualesquier dos hermanos de Cecilia son idénticos,
$(\forall x)(\forall y)((Hxc \wedge Hyc) \rightarrow Ixy)$
Por lo tanto, nuestro argumento se formaliza de la siguiente manera,
$(\forall x)(\forall y)((Hxc \wedge Hyc) \rightarrow Ixy)$
$(\forall x)(Dx \rightarrow Hxc)$
$(Da \wedge Db)$
Iab.

Por ello podemos decir que los cuantificadores No hay más de dos. . . , Hay exactamente uno. . . podrían definirse en nuestro lenguaje.

Ejemplo 1.4.28. Formalicemos ahora el argumento.

Para cualesquier tres individuos si el primero es amigo del segundo y el segundo es amigo del tercero, entonces el primero es amigo del tercero
Si una persona es amiga de una segunda entonces también ésta es amiga de aquél.
No todo mundo es su propio amigo.
Por lo tanto, hay alguien que no tiene amigos.

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Axy \wedge Ayz) \rightarrow Axz)$
$(\forall x)(\forall y)(Axy \rightarrow Ayx)$
$\neg(\forall x)Axx$
$(\exists x)(\forall y)\neg Ayx$.

La rana más aplastada es la que más recio grita. Refrán popular que significa, por una parte, que quien más se queja es quien más padece. También se suele entender en el sentido de quien menos sirve es quien más lata da.

Vemos otro ejemplo.

Ejemplo 1.4.29.
En este lugar hay, cuando mucho, una persona que no es pobre.
Ningún amigo de Alex es pobre.
Hay varios universitarios.
Todos los universitarios son amigos de Axel.
Por lo tanto, Axel tiene exactamente un amigo.

¿Cómo expresamos en nuestro lenguaje la conclusión anterior? Debemos decir que Axel tiene por lo menos un amigo y no más de uno, lo que se formaliza así,
$(\exists x)Axa \wedge (\forall y)(\forall z)((Aya \wedge Aza) \rightarrow Iyz)$
o en forma equivalente:
$(\exists x)(Axa \wedge (\forall y)(Aya \rightarrow Iyx))$.
Por lo tanto, el argumento en cuestión se expresa así en nuestro lenguaje formal,
$(\forall x)(\forall y)((\neg Px \wedge \neg Py) \rightarrow Ixy)$
$(\forall z)(Aza \rightarrow \neg Pz)$
$(\exists x)Ux$
$(\forall z)(Uz \rightarrow Aza)$
$(\exists x)((Axa \wedge (\forall y)(Aya \rightarrow Iyx))$.

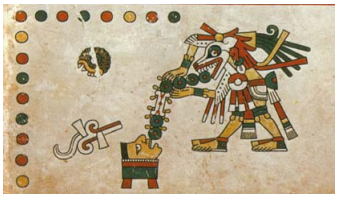
Ejemplo 1.4.30. La misma idea se puede aplicar para expresar que Alex tiene exactamente dos amigos:
$(\exists x)(\exists y)((Axa \wedge Aya \wedge \neg Ixy \wedge (\forall z)(Aza \rightarrow (Izx \vee Izy))$.

Ejemplo 1.4.31. Expresemos que si una persona tiene exactamente dos amigos, entonces es muy solitaria. Digamos primero lo mismo de Alex,
$((\exists x)(\exists y)((Axa \wedge Aya \wedge \neg Ixy \wedge (\forall z)(Aza \rightarrow (Izx \vee Izy)) \rightarrow Sa)$.

Ejemplo 1.4.32. Ahora aseverémoslo de cualquier individuo,
$(\forall u)((\exists x)(\exists y)((Axu \wedge Ayu \wedge \neg Ixy \wedge (\forall z)(Azu \rightarrow (Izx \vee Izy)) \rightarrow Su)$.

¿Qué cosa es que trae un huipil apretado? El tomate.

Que w es (instancia de sustitución de) un axioma podemos expresarlo fácilmente,
$AX1w \equiv (\exists x)(\exists y)Iwfxfyx$
$AX2w \equiv (\exists x)(\exists y)(\exists z)Iwffxfyzffxyfxz$
$AX3w \equiv (\exists x)(\exists y)Iwffxyfgygx$
$AXw \equiv AX1w \vee AX2w \vee AX3w$,
que w se obtiene por modus ponens de x y z puede definirse así,
$MPxzw \equiv Izfxw$,
que v es un teorema una de cuyas pruebas tiene a lo sumo dos líneas puede definirse así:
$TEO2v \equiv AXw \vee (\exists x)(\exists y)((AXx \wedge AXy) \wedge MPxyw)$.
Pero que z es teorema no puede expresarse con los recursos a nuestra disposición (por las mismas razones que no puede definirse ser ancestro *paterno*[1] a partir de de ser padre).



Tlacuache mandaba a los demás animalitos. Un día vinieron a reclamarle. «Señor Ntlacuach, se pelearon Zorrillo y Mapache, y tu no pusiste paz. No te diste cuenta»... Luego se trenzaron Conejo y Venado, y Tlacuache tampoco puso paz. Y otra vez, fueron Venado y Zorrillo. Y otra, Zorrillo y Conejo. Y el señor Tlacuache como si nada... Había mucho disgusto entre los animales. Hasta muertes, porque no se respetaban. Eran como si no tuvieran dueño.

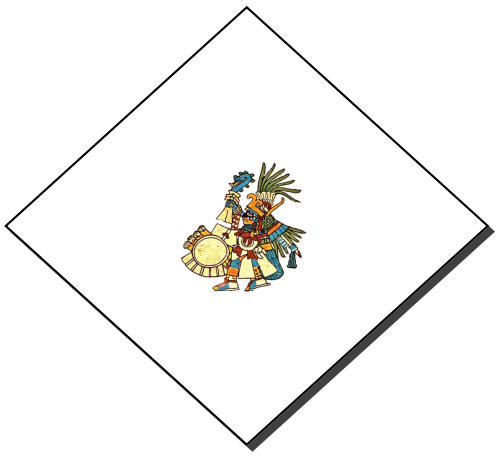
Leyenda mazahua

Tras el robo del fuego, la tlacuacha es destruida y vuelve a unir sus partes:

Corrieron hacia ella. Treparon y la alcanzaron. La despedazaron en mil pedacitos una parte para un lado, otra parte para el otro. Le quitaron cuanto tenía en las manos. Se la volvieron a llevar. Y bajaron, dejándola ahí. Allí esta tirada, muerta. Le habían quitado la vida, le habían quitado el fuego de su mano. Le habían quitado todo. Muerta.

Bueno, después de un rato reflexiona. Empieza a reflexionar en esto. Empieza a levantarse, a recoger sus pedacitos. De piel, de cabello, de corazón, de todo. De sandalias, de manos, de mollera, eso que es llamado la corona de la cabeza. De sesos, de todo. Puso todo otra vez en su lugar. Una vez que revivió, se sintió mejor. Todo estaba muy bien. Se puso feliz. Y dijo: «Ah ¿a poco se llevaron ese pedacito que me eché dentro de la bolsa. Ese pedacito que florecía de Tatewarí? ¿No se lo llevarían?». Buscó. Ahí estaba el pedacito. Lo sacó y comenzó a soplarle.

Leyenda huichol



1.5 Ejercicios

1. Pruebe el corolario 1.4.16.
2. Tome las siguientes interpretaciones:
   - El dominio de discurso es $\{x : x \text{ es humano}\}$.
   - m significa Sócrates.
   - n significa Platón.
   - F significa sabio.
   - G significa es – un filósofo.
   - L significa – ama a –.

   Traduzca las siguientes fórmulas:

   a) $Fn \to (\exists\, x)Fx$
   b) $(\exists\, y)(Gy \wedge Fy)$
   c) $(\exists\, x)(Gx \wedge Lmx)$
   d) $(\forall\, x)(Gx \wedge Lmx)$
   e) $(\forall\, x)(Gx \to Lmx)$
   f) $(\exists\, x)\neg(Fx \wedge Lxn)$
   g) $\neg(\exists\, x)(Fx \wedge Lxn)$

h) $(Fn \wedge (\forall x)Lxn)$
i) $(\exists y)(Fy \wedge (\forall x)Lxy)$
j) $(\forall z)(Lzm \leftrightarrow Lnz)$
k) $(Gn \rightarrow (\exists z)Lnz)$
l) $(Gn \rightarrow (\exists z)(Lnz \wedge Fz))$
m) $(\forall y)(Gy \rightarrow (\exists z)(Lyz \wedge Fz))$
n) $(\exists z)(Fz \wedge (\forall y)(Gy \rightarrow Lyz))$

3. Suponga que m significa Sócrates, n Platón, o significa Aristóteles, Fx x es un filósofo, Gx x es sabio, Mxy x enseña y. Considere como dominio de discurso a los seres humanos. Traduzca la siguiente información al lenguaje simbólico.

   a) Sócrates enseña a Platón y Platón a Aristóteles.
   b) Aristóteles no enseña a Sócrates ni a Platón.
   c) Platón enseña a alguien.
   d) Algunos filósofos son sabios.
   e) Algunos humanos sabios no son filósofos.
   f) Nadie enseña a Sócrates.
   g) Si Sócrates enseña a Platón, entonces alguien enseña a Platón.
   h) Ningún filósofo sabio recibe enseñanzas de Aristóteles.

4. ¿Cuáles de las siguientes parejas de fórmulas son equivalentes? En caso de no serlo, proporcione una interpretación que lo demuestre.

   a) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)Ryxz$ y $(\exists z)(\forall y)(\exists x)Ryzx$
   b) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)Ryxz$ y $(\exists z)(\forall x)(\exists y)Rxyz$
   c) $(\forall x)Fx \rightarrow Fn$ y $(\forall z)Fz \rightarrow Fn$
   d) $(\exists x)(\exists y)Lxy$ y $(\exists y)(\exists x)Lxy$
   e) $(\forall x)(\forall y)Lxy$ y $(\forall y)(\forall x)Lxy$
   f) $(\forall x)(Fx \wedge Gx)$ y $((\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx)$

In icuac aca acuchoa quitoaya in ye huecauh: «Aquin nechitoa, aquin nechtenehua». Anoce quitoaya: «Aquin nechicoitoa». Anoce quitoa: «Aquique in noca mononotza». Quil yehuatl quinezcayotiaya, yehuatlic quimatia, in icuac acuchoa in aca, canapa, hueca quintenehua.

Antiguamente se decía cuando alguno estornudaba: «Alguien habla de mí, alguien me mienta». O quizá decía: «Alguien habla de mí». O quizá decía: «Algunos discuten acerca de mí». Dizque cuando estornudaban esto les demostraba, esto les daba a conocer que alguno, en lugar lejano, los mentaba.

Códice Florentino, libro V, capítulos 4, 5

2

Lógica de predicados

En cierto tiempo que ya nadie puede contar,
del que ya nadie puede ahora bien acordarse,
quienes aquí vinieron a sembrar
a los abuelos, a las abuelas,
éstos, se dice,
llegaron, vinieron,
siguieron el camino,
vinieron a barrerlo,
vinieron a terminarlo,
vinieron a gobernar aquí en esta tierra,
que con un solo nombre era mencionada,
como si se hubiera hecho esto un mundo pequeño.
Códice Martinense

2.1 Introducción

Iniciamos el estudio detallado de la lógica de primer orden, por lo que debemos ocuparnos de estudiar lenguajes formales en su forma más general, aunque siempre recurriremos a ejemplos específicos de lenguajes formales para ilustrar o motivar las nociones por investigar. Es importante recalcar que bien haría el lector en revisar cuidadosamente el capítulo inicial, pues en él aparecen fundamentadas las nociones, objetivos, técnicas y demás asuntos relacionados a la lógica matemática que desarrollaremos en el resto de los dos volumenes.

Una de las labores fundamentales de la matemática es estudiar, investigar, analizar conjuntos equipados con operaciones de muy diversa naturaleza. El matemático analiza ciertas propiedades de las estructuras y trata de averiguar si estas propiedades se cumplen en otras, o qué propiedades caracterizan completamente una estructura.

La lógica de primer orden, o el cálculo de predicados, como también se le conoce,

pretende, en primera instancia, ser el vehículo adecuado para expresar estas propiedades de tal suerte que tenga sentido preguntarse sobre su validez en estructuras de la más diversa índole, es decir, proveer de un lenguaje adecuado para expresar estos atributos. También tiene como fin definir lo que significa que cierta estructura satisfaga una afirmación. El lenguaje debe ser lo bastante poderoso para expresar las características «matemáticas» usuales y suficientemente flexible para que estructuras diversas sean capaces de interpretar este lenguaje. Por ello, no tendremos un único alfabeto sino alfabetos apropiados, de los cuales se puede elegir el más conveniente para cierta clase de estructuras. Tendremos lenguajes diversos, por ejemplo el de la aritmética, el de la teoría de módulos, el de la teoría de gráficas, etc. Todos ellos son lenguajes formales. Ocurrirá con frecuencia que un lenguaje presente ventajas y desventajas para tratar ciertas estructuras. Es decisión del usuario elegir el lenguaje más apropiado para el fin previsto.

Sin embargo, hay ciertos símbolos comunes o necesarios en todo lenguaje formal, a los que nos referiremos como los símbolos lógicos, mientras que el resto, aquellos que dependen de la aplicación particular, serán los símbolos no lógicos.

Las estructuras a considerar deben representar a una amplia gama de universos matemáticos, por ello se definen en forma general, y deben contar con un universo (el universo de discurso), donde interpretar los símbolos del lenguaje formal en uso.

Es conveniente abundar más en lo previamente expuesto y describir con mayor precisión los motivos, métodos y técnicas de la lógica matemática. Una definición de lógica que puede encontrarse con frecuencia es que se encarga de analizar los métodos de razonamiento. En particular, la lógica matemática tendría como encomienda analizar los métodos de razonamiento en matemáticas, pero no es el caso. A continuación haremos una descripción más detallada de los motivos de la lógica matemática. No se trata de dar una aburrida reseña histórica, o desarrollar ingeniosos acertijos matematicos que por más divertidos que puedan sonar, desvirtúan en buena medida los objetivos de la lógica matemática. Al alumno le debe quedar muy claro cuál será el fundamento del texto y los posibles alcances del mismo. De otra forma, fácilmente se perderá o carecerá de la motivación mínima requerida para enfrentar exitosamente esta materia. Más aún, conforme el capítulo avance (de hecho esto aplica para el resto de capítulos y el segundo volumen), las demostraciones se harán más breves, dejando el llenado de los detalles apropiados al lector. Incluso, en ciertos pasajes seremos ciertamente informales, cuando hayamos expuesto formalmente el material, y consideremos tarea del lector precisar los sucesos.

Considere los siguientes hechos.

- Durante el invierno las ardillas guardan nueces.
- Igor es una ardilla

Seguramente el lector seguirá la tradición y concluirá que Igor guarda nueces durante el invierno.

Otro ejemplo,

- El área de un cuadrado de lado x se calcula como x^2

- La figura Y se conforma de dos cuadrados: uno de lado x y otro de lado y.

Podemos entonces concluir que el área de la figura Y es $x^2 + y^2$. No obstante, esto puede no ser cierto, si, por ejemplo, los cuadros se traslapan, en cuyo caso, la suma de las áreas no corresponde al área total de la figura.

- El área de la figura llamada Zorro, de lado x, se calcula como $5x^2 - 1$.
- La figura Y consiste en la unión de n Zorros cada uno de lado x.
- Los n Zorros no se traslapan entre sí.

De la información dada se deduce que el área de la figura Y es $n \cdot (5x^2 - 1)$. Note que la información contiene datos que evitan ambigüedad como en el ejemplo previo. Además, para elaborar la conclusión no requerimos saber que clase de figura es un Zorro.

- El área de la figura epsilon, de característica c, se calcula como $3c^3 - \sqrt{c}$.
- La figura delta está formada por dos cuadrados de lado x, z, respectivamente, junto con m epsilon.
- Ninguna de estas figuras se traslapa.
- $m - 2$ epsilon tienen característica c y las dos restantes tienen característica d.

Entonces, el área de delta es $x^2 + z^2 + (m-2)(3c^3 - \sqrt{c}) + 2 \cdot (3d^3 - \sqrt{d})$. Esta vez, tuvimos que recurrir a información previa para llevar a buen término nuestra información.

En el caso de las figuras Zorro y epsilon, no tenemos idea sobre qué nos están hablando, pero es suficiente con la información que se nos proporcionó para elaborar la conclusión dada en cada caso. No estamos en posibilidad de juzgar la veracidad de la información dada, pero si podemos establecer el área en cada caso.

- El área de la figura gama, de lado y, se calcula como $3y^3 - \sqrt{y}$.
- La figura delta está formada por cuatro cuadros de lado z, u, respectivamente, junto con l figuras gama.
- Ninguna de estas figuras se traslapa
- $l - 5$ gama tienen lado y, las cinco restantes tienen lado k.

Suponga que alguién concluye que el área no se puede calcular, porque no se sabe que es gama o delta. Por supuesto, cualquier estudiante replicaría de inmediato que no se requiere saber que es gama o delta para poder determinar el área de delta. Simplemente se sigue el razonamiento previo con la información dada. Quizá, incluso,

alguién podría exclamar que es «ilógico» decir que no se puede calcular el área. Aquí empieza a aparecer uno de los objetivos de la lógica matemática.

La lógica matemática trata de establecer si las conclusiones que se obtienen a partir de información dada siguen el mismo esquema siempre o si hubo algo que cambió. Es decir, para calcular el área de las figuras previas, seguimos un cierto esquema de razonamiento. En el último ejemplo podríamos haber seguido el mismo esquema, pero no fue así (dijimos que no se podía calcular el área). La lógica matemática simplemente llama la atención a este hecho, hace notar que no se siguió el mismo patrón de razonamiento.

En general, no se juzga la veracidad de la información dada, tampoco la validez de la conclusión. Incluso, no se objeta la forma en que se obtuvo la conclusión. Lo que se cuida, exclusivamente, es que el razonamiento siempre siga el mismo patrón, las mismas reglas.

Puesto que no se cuestiona la forma en la que se efectúa el razonamiento, sino que sólo se cuida que siempre se respeten las reglas, cualquier ser pensante podría establecer sus reglas de razonamiento, lo cual sería poco aconsejable. Por otro lado, no habría justificación suficiente para privilegira la forma de razonar de un ser humano por sobre la de otro. Para evitar conflicos, en realidad para evitar ambigüedades, la lógica matemática propone reglas de razonamiento, de deducción, de inferencia, que se deben respetar al desarrollar las matemáticas. Otra vez, la lógica matemática no juzga la veracidad o falsedad de la información dada, sólo establece de antemano cómo se pueden elaborar conclusiones a partir de hechos conocidos, y con estas conclusiones y posiblemente más hechos, se sigan elaborando nuevas y nuevas deducciones.

Pero éste no es el único papel de la lógica matemática. También se encarga de desarrollar herramientas para estudiar diversas estructuras de interés en Matemáticas; examinarlas desde una perspectiva general. Por ejemplo, no estudiamos un grupo en particular, sino una familia, una clase, de grupos que tienen caractersíticas similares. Para establecer con formalidad qué se entiende por características similares, debemos desarrollar un lenguaje libre de ambigüedades, que nos permite describir con exactitud ciertas propiedades de ciertos grupos. Una vez que aislemos estos grupos, podemos proceder a estudiarlos para extraer más y más propiedades que tengan en común, o encontrar algo que distinga a algunos de estos grupos, para entonces formar una nueva subclase. Los mismo puede hacerse con anillo, R-módulos, gráficas, espacios topológicos, espacios de Sobolev, espacios de Banach, etc.

Como otro ejemplo, podemos distinguir a la clase de los grupos abelianos, a la clase de los grupos cíclicos, de los grupos normales, etc. Existen muchas propiedades de grupos que son fácilmente expresables con algunas pocas frases, pero es trabajo para la lógica matemática hallar un lenguaje apropiado para expresar formalmente estas propiedades. Veamos algunos ejemplos concretos; en todos ellos trataremos de ilustrar diversas facetas que involucrará nuestro estudio, y no sólo eso. Aparecerán figuras de inmediato que, como después veremos, exhiben carencias de la lógica matemática de primer orden.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos a los números reales. Existen muchas, pero muchas propiedades importantes en este conjunto que es fundamental en todo el análisis matemático. Lo podemos estudiar desde muchas perspectivas y no es papel de la lógica privilegiar a alguna de ellas. Una posibilidad es considerarlo como grupo abeliano. Esto es, respecto a la suma usual entre números reales sabemos que éstos forman un grupo abeliano, donde la identidad aditiva es el cero. Queremos escribir formalmente las propiedades de grupo abeliano de los números reales. Por supuesto, podríamos encontrar una infinidad de formas posibles de realizar esto, pero una de las virtudes de la lógica matemática es que nos sugiere cómo hacerlo de tal forma que cualquiera que lea nuestras expresiones sea capaz de entender lo que queremos expresar. En concreto, necesitamos símbolos para referirnos a números reales, y este papel lo desempeñan las variables, digamos $x, y, z, ...$ Dado que queremos decir qué es un grupo abeliano, requerimos un símbolo para hablar de la suma, y escogemos, como es natural $+$. La noción de grupo abeliano involucra, como ya dijimos, la existencia de una identidad aditiva. Este elemento no es un número real cualquiera, sino uno muy especial que llamamos cero y que denotamos como 0; es un número real, no uno cualquiera, siempre juega el mismo papel y es destacado: por ello lo llamamos una constante. Ahora, con estos símbolos debemos expresar que los números reales, $\mathbb{R}$, conforman un grupo abeliano. Del curso de álgebra sabemos que esto se expresa mediante cuatro propiedades.

① La operación de suma es asociativa.

② Si a un número le sumamos el cero, el resultado es el mismo número.

③ Para cualquier número existe un inverso aditivo.

④ La suma es una operación conmutativa.

Varias cosas deben ser aparentes de esta formulación. Primero, debemos tener claro que el universo del discurso son los números reales. Esto es, cuando hablamos de número, nos estamos refiriendo a números reales. Tampoco se ha especificado con claridad que es la suma, cuántos números intervienen en la suma, etc. No hemos dicho con precisión qué es un inverso aditivo o que significa que la suma sea conmutativa. Este tipo de ambigüedades es lo que debemos de evitar y para ello la lógica matemática se construye cuidadosamente. Por otro lado, sería terriblemente ineficiente tener que escribir todo esto con precisión para los números reales, y luego cambiar todo para referirnos a los enteros, o a los racionales, o a los complejos. Todas estas estructuras tienen en común, entre otras cosas, que conforman grupos abelianos con las operaciones usuales. Debemos de encontrar una lenguaje, lo más sencillo posible que nos permita expresar todo sin ambigüedades. De inicio tenemos dos situaciones a considerar. Queremos expresar estas propiedades de manera que no tengamos que

cambiar nada si nos referimos a reales o a racionales o a enteros, etc. Por otro lado, una vez que hayamos decidido trabajar en uno de estos conjuntos, las expresiones deben tener un significado natural y que sea el que pretendemos. Tenemos que ser capaces de «interpretar» apropiadamente las expresiones en el universo que hayamos elegido.

Algo que debemos evitar a toda costa es emplear palabras propias de un idioma en particular, español o inglés o nahuatl, porque eso posibilitaría malas interpretaciones. Debemos usar exclusivamente símbolos que no se presten a ningún tipo de ambigüedad. Por eso, una de las primeras tareas de la lógica matemática es introducir un alfabeto apropiado. Habrá partes de ese vocabulario que sean comunes a cualquier situación (estructura matemática) y otras que estén expresamente diseñadas para cierto tipo de estructuras. En nuestro caso concreto, requerimos un símbolo para la suma, digamos $+$, un símbolo para la identidad aditiva 0 y símbolos para representar a los números (reales). Para no alargar más el proceso, escribamos formalmente lo que queremos expresar.

① $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$.

② $\forall x (x + 0 = x)$.

③ $\forall x \exists y (x + y = 0)$

④ $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Hemos empleado varios símbolos que posiblemente no requieran explicación para un matemático, pero es mejor, dejar todo claro. Para empezar, las letras x, y, z son variables y su función es que podamos referirnos a números «genéricos», es decir números arbitrarios. El cero es un número real, pero no es cualquiera, tiene propiedades muy especiales, por eso lo denotamos mediante un símbolo distinguido 0, un símbolo de constante. La operación involucrada es la suma y ya dijimos que se denota mediante $+$. Las expresiones hacen evidente que se trata de sumar dos números y que el resultado es un número, que posiblemente se pueda sumar a otro, etc. Se utilizaron los «cuantificadores» $\forall, \exists$ que se leen «...para todo» y «...existe», respectivamente. Además, aparece el símbolo de igualdad, que establece una relación entre números. A saber, si son o no iguales. Por cierto, también usamos paréntesis para que las expresiones se lean sin ambigüedades.

Note que si nos «paramos» en los números enteros o los racionales o los complejos, e interpretamos todo en esos conjuntos, las expresiones siguen afirmando que tal conjunto es un grupo abeliano. Si trabajamos en los naturales, vemos que no todas son ciertas. Por lo anterior, tales expresiones no pueden hacer referencia a conjuntos particulares, pues ya no podríamos trasladarlas a otros conjuntos. Así, una cosa es expresar la propiedad y otra decidir donde la analizaremos.

Algo que también debemos destacar es que hemos introducido un lenguaje para analizar a los reales como grupo abeliano. Pero los reales son una estructura más compleja, son un campo y tienen un orden. Nuestros lenguajes deben ser suceptibles

de expandirse e incorporar nuevos símbolos que nos permitan examinar a los reales como anillo, campo, conjunto ordenado, etc.

En este ejemplo, que parece muy trivial, aparecen reflejadas numerosas figuras que conforman la lógica matemática de primer orden, que pronto destacaremos.

Ejemplo 2.1.2. Una de las estructuras más simples que se conocen desde temprana edad es la de los números naturales, porque nos sirve, entre otras muchas cosas, para contar. Ya los mayas sabían de la importancia de incorporar al cero entre los números. Una propiedad que no es tan conocida y que a veces no se acaba de entender a cabalidad, es que los números naturales conforman un conjunto bien ordenado. Es decir, para empezar, tiene un elemento que es más chiquito que cualquier otro número natural. Más aún, cualquier conjunto no vacío de números naturales tiene un menor elemento. Si el universo es precisamente los naturales, señalar que está bien ordenado es tanto como decir que cualquier subconjunto no vacío tiene menor elemento. Para expresar estas propiedades requerimos menos símbolos que en el ejemplo de los reales. En efecto, propiamente sólo requerimos hablar del orden, para lo cual necesitamos un símbolo que relacione dos elementos, y elegimos $<$.

- $\exists z \forall y (z = y \vee z < y)$.
- Para todo subconjunto $X \neq \varnothing$, $\exists z \forall y (y \in X \to (z = y \vee z < y))$.

Varios asuntos requieren nuestra atención. Usamos el símbolo $\varnothing$ para denotar al conjunto vacío. Una de dos, o lo introducimos como un conjunto distinguido, algo similar a lo que hicimos con el cero, o lo «definimos» pero no con los pocos símbolos que tenemos, sino añadiendo uno más: el símbolo de pertenencia entre conjuntos $\in$. Así,

$$\exists w \forall y (y \notin w).$$

en cuyo caso, w representa al conjunto vacío, pues estamos diciendo que para cualquier natural y, y no pertenece a w, por lo que w debe ser vacío. Esta «definición» debe añadirse antes de las dos expresiones previas, en las que se sustituye $\varnothing$ por este w. Formalmente, nuestra elección de definir que los naturales conforman un conjunto bien ordenado es la siguiente.

❶ $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

❷ $\forall x (x \not< x)$.

❸ $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z)$.

❹ $\exists z \forall y (z = y \vee z < y)$.

❺ $\exists w \forall y(y \notin w)$ y para todo subconjunto $X \neq w$, $\exists z \forall y(y \in X \to (z = y \vee z < y))$.

Hemos supuesto que el conjunto vacío es único.

Observación 2.1.3.

1. Usamos varios «conectivos» lógicos: $\vee$ que se lee «**o**»; $\wedge$, que se lee «**y**»; $\to$ que se lee «implica».

2. También empleamos la relación de igualdad y la de pertenencia.

3. El símbolo $\not<$ se lee «no es menor que», que no es un conectivo lógico. Más bien, $x \not< y$ es una abreviación de la expresión «no es cierto que $x < y$». No la usamos, pero después lo haremos: la negación de una expresión se simboliza mediante el conectivo lógico $\neg$. Así, $x \not< y$ abrevia $\neg x < y$.

4. Los tres primeros enunciados expresan el hecho de que el orden $<$ es total, cualesquier dos elementos son comparables, es antireflexivo, es decir no puede ocurrir que un elemento sea menor que sí mismo, y que $<$ es transitivo.

5. No pudimos evitar el uso de palabras en español en el último enunciado y la razón será presentada en breve.

El lector no debe temer, si algo de lo recién mencionado ha quedado un tanto oscuro. El libro tratará, precisamente, de desarrollar con todo detalle todos estos asuntos. Pero es importante ir introduciendo algunas facetas de nuestra materia para motivar su desarrollo y señalar sus deficiencias.

Uno de los adjetivos que colocamos a lógica matemática fue de primer orden. Ahora podemos explicar de qué se trata. En los ejemplos previos hemos empleado variables que se refieren a individuos del universo. El universo puede cambiar, podemos suponer que son los reales, los racionales, los naturales, etc. Pero las variables siempre representan a elementos del universo. En cambio, en el último ejemplo, hicimos énfasis en que no pudimos prescindir de algunas palabras en español para expresar que todo subconjunto no vacío tiene menor elemento.

Una posible formalización simbólica de esto último sería:

$$\exists w \forall y(y \notin w) \wedge \forall X(X \neq w \to \exists z \forall y(y \in X \to (z = y \vee z < y))).$$

Notemos que aparece $\forall X$... que se lee igual que siempre para todo X, pero esta vez, ocurre la mayúscula X, no minúscula. Esto significa que X es una variable pero de otra naturaleza, no es un elemento del universo, sino un **subconjunto** del universo; si estamos parados en los naturales, los subconjuntos **no son** elementos del universo, pues en él sólo viven números naturales. En este caso decimos que la variable X es una variable de segundo orden, porque se refiere a subconjuntos del universo.

En nuestro texto, esto no estará permitido (excepto cuando tratemos con extensiones de la lógica de primer orden), sólo podemos tratar con variables de primer orden, de ahí el nombre: lógica de primer orden. En el caso en que se permita el uso de variables de segundo orden, se llama lógica de segundo orden, o a algún nombre que que

llame la atención a que salimos de primer orden. Como veremos después, la lógica de primer orden no puede expresar la noción de conjunto bien ordenado.

Otra figura relevante es que cuando empleamos conectivos lógicos tales como la disyunción $\vee$ o la conjunción $\wedge$ estos sólo se pueden aplicar a dos expresiones o en el mejor de los casos, a una cantidad finita de ellas. Igualmente, los cuantificadores existencial $\exists$ y universal $\forall$ sólo operan sobre una cantidad finita de variable.

Para hacer más expresiva a la lógica, que podamos expresar más propiedades, existen extensiones de la lógica de primer orden que permiten conjunciones/disyunciones de una cantidad **infinita** de expresiones o que se pueda cuantificar sobre una cantidad infinita de variables. Tales lógicas se llaman infinitarias. Una pregunta inmediata es: si la lógica de primer orden tiene algunos problemas de expresividad y existen otras lógicas más expresivas, ¿porqué no estudiar de una vez esas lógicas? Todas esas lógicas están basadas en la de primer orden, es decir, hacen usos de todos los recursos (nos referimos a la sintaxis y semántica) de la lógica de primer orden y añaden nuevas posibilidades, pero también habrá pérdidas grandes. De tal suerte que quien quiera estudiar esas lógicas más poderosas debe conocer muy bien la lógica de primer orden.

Hemos reseñado algunos de los objetivos de la lógica matemática: crear un lenguaje adecuado para expresar propiedades o características de diversas estructuras sin ambigüedades. Esto es lo que puede llamarse la parte de teoría de modelos de nuestra materia. La otra parte se llama teoría de la demostración y es la que se encarga de formalizar la noción de demostración (o prueba formal), tan importante en todas las ramas de las matemáticas.

Los relatos cosmogónicos nahuas refieren que una pareja divina le dio origen al mundo: Tonacatecutli y Tonacíuatl, un desdoblamiento de su dios principal, Ometéotl. A semejanza de Ometéotl, esta pareja es autocreada, eterna y la fuente original de la vida. Moraba en el lugar más alto del cielo, en el decimotercer piso, donde dio origen a cuatro deidades, cada una identificada por un color: Tezcatlipoca (rojo),Tezcatlipoca (negro), Quetzalcóatl (blanco) y Huitzilopochtli (Azul).

Después de 600 años de inactividad, Quetzacóatl y Huitzilopochtli comenzaron la creación del mundo. Crearon el fuego y el sol, aunque no un sol entero, sino apenas un medio sol que alumbraba poco. Crearon también a un hombre y a una mujer: al hombre le encomendaron que cultivase la tierra y a ella que hilase y tejiese. De Oxomuco y Cipactonal, la primera pareja humana, nació la generación de maceuales, a quienes los dioses debían vigilar para que no dejaran de trabajar. Simultáneamente crearon el inframundo, con sus dioses Mictlantecutli y Mictecacíuatl, y también los cielos y el agua, en la cual había una especie de lagarto, Cipactli, del que surgió la tierra. Crearon asimismo el dios del agua, Tláloc y su pareja Chalchiutlicue, junto con los numerosos tlaloques, diosecillos que lo ayudaban a volcar las aguas sobre la tierra.

La primera creación del universo se hizo junto y sin diferencia de tiempo, cuando aún no había cuenta del tiempo, ni días, años o edades. A partir de ese momento comienza la era de los soles, la época gobernada por diversas fuerzas que crean el movimiento y le imponen un origen y un final a las sucesivas creaciones del cosmos.

2.2 El lenguaje de la lógica de predicados

Considere el enunciado Todo estudiante es más joven que algún profesor. En lógica proposicional podemos identificar todo el enunciado con una variable, digamos P. Sin embargo, esto no captura realmente todo lo que el enunciado expresa. Por ejemplo, el enunciado Existe un estudiante que es más viejo que un profesor, está estrechamente relacionado con el previo, pero no podemos expresarlo a partir de P. La lógica de primer orden involucra predicados, objetos que expresan propiedades tales como x es estudiante, y es profesor x es más joven que y, y más aún expresar situaciones como para todo y existe, que proporcionan la sutilieza necesaria para describir la información disponible

En Matemáticas encontramos con frecuencia aseveraciones existenciales del estilo la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una raíz real. Podemos rescribir esta expresión como existe un número real x tal que $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Otro ejemplo: $\sqrt{2}$ es racional, que también es una afirmación existencial, aunque está vez no es tan evidente; no obstante, podemos escribirlo como existen números naturales p y q tales que $\sqrt{2} = p/q$.

El primer ejemplo es cierto (tome $a = -1$), mientras que el segundo es falso. El segundo es ilustrativo de muchas afirmaciones en matemáticas que en primera instancia no parecen ser de naturaleza existencial. Pero lo importante aquí es que debe ser claro para el lector que no podemos elaborar fórmulas proposicionales que expresen estas situaciones. Debemos ocuparnos de estudiar lenguajes formales en su forma más general.

Es seguro que el lector ha trabajado con «modelos matemáticos» en diversas ocasiones. Por ejemplo, en álgebra lineal se trabaja con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ como ejemplos de espacios vectoriales. En geometría se aprende que el plano es un «modelo» de los axiomas de Euclides. En álgebra abstracta se consideran ejemplos de grupos: los enteros respecto a la suma; grupos de permutaciones, grupos de matrices invertibles con la multiplicación son modelos de los axiomas de la teoría de grupos. Todos estos son ejemplos de estructuras matemáticas o modelos matemáticos; estructuras diferentes se emplean para propósitos diversos.

Una de las labores fundamentales de la matemática es estudiar, investigar, analizar conjuntos equipados con operaciones de muy diversa naturaleza. El matemático examina ciertas propiedades de las estructuras y trata de averiguar si estas propiedades se cumplen en otras, o qué propiedades caracterizan completamente una estructura. El papel de la lógica matemática se podría describir mediante la siguiente ecuación.

Matemáticas = Teoría de conjuntos + Lógica de primer orden

No obstante, puede haber algunos cusestionamientos al respecto. Más aún, la teoría de conjuntos y la lógica matemática se necesitan mutuamente para desarrollarse. Suponga que consideramos una estructura matemática particular, por ejemplo, pensamos en los enteros $\mathbb{N}$ con la suma. Si intentamos examinar ésta como un grupo, fracasamos, pues, por ejemplo, el 10 no tiene inverso aditivo. En cambio, si tratamos de hacer aritmética en esta estructura, todo transcurre sin tropiezos.

Si consideramos $\mathbb{R}^3$ y los axiomas de un espacio vectorial, todo funciona correctamente. Decimos que la estructura $\langle N, + \rangle$ es un modelo de los axiomas de la aritmética, mejor conocidos como los axiomas de Peano. De la misma forma, $\mathbb{R}^3$ es un modelo de los axiomas de un espacio vectorial real.

Estas observaciones breves dejan traslucir que nos preocupan dos tipos de cosas. Primero, estructuras o modelos matemáticos, digamos $\mathbb{R}^3$, los números naturales, etc. También incorporamos axiomas de divesas «teorías», la teoría de grupos, de Peano, etc.

Considere las siguientes expresiones

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$
$$\forall x (x + 0 = x).$$

En forma intuitiva, de inmediato se piensa en la suma como la suma entre números, y en el cero como la identidad aditiva. Estas expresiones indican que todo elemento x tiene un inverso respecto a la operación $+$, y que el 0 es el neutro respecto a la operación $+$. De hecho, son parte de los axiomas de la teoría de grupos. Si pensamos en $\mathbb{R}^3$ con la suma coordenada a coordenada, resulta que esta estructura satisface estas dos expresiones, pues es un grupo. No obstante, el 0 no es el número cero, sino el vector $(0, 0, 0)$. El símbolo $+$, representa la suma «usual», pero coordenada a coordenada.

Así, debemos ser capaces de considerar algunos símbolos de un «lenguaje» particular en forma distinta cuando cambiamos de estructura matemática. Estas interpretaciones diferentes pueden conducir a situaciones contrarias. Pensemos en $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial con $+$ interpretado como la suma de vectores. Resulta que esta operación así interpretada es conmutativa. En cambio, si interpretamos $+$ como el producto cruz entre vectores, concluimos que $+$ no es conmutativa.

En resumen, nuestro propósito es introducir lenguajes formales para establecer formalmente estructuras matemáticas y examinar la veracidad de ciertas expresiones (axiomas, fórmulas) en dichas estructuras.

Definición 2.2.1. En general, un lenguaje formal consiste en lo siguiente.

- Variables $x, y, z, \ldots$ una cantidad infinita (numerable) de ellas.
- Conectivos lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Símbolos de constante $a, b, c, \ldots$
- Símbolos de función $f, g, h, \ldots$
- Símbolos de relación o predicado P, Q, R, S
- Cuantificadores $\forall, \exists$

Utilizaremos paréntesis (,) para hacer más legibles las fórmulas y seguiremos la convención de que el conectivo más fuerte es $\neg$, seguido de $\wedge, \vee$, y después $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Además, $\exists\, x$ y $\forall\, x$ tienen mayor jerarquía que los conectivos. Los conjuntos de símbolos de predicado, función o constante pueden ser finitos o infinitos (numerables o innumerables), y estos conjuntos se denotarán generalmente mediante $\mathcal{R}, \mathcal{F}$, y $\mathcal{C}$, respectivamente.

Los símbolos $\forall$, $\exists$ son cuantificadores.
El cuantificador $\forall$ se lee «para todo ...» y es el cuantificador universal.
El cuantificador $\exists$ se lee « existe ...» y es el cuantificador existencial.

En cualquier fórmula de primer orden, al cuantificador le sigue inmediatamente una variable:

$\exists x$ existe x tal que ...
$\forall x$ para toda x se cumple que ...

En cualquier lenguaje formal aparecen las variables y los conectivos lógicos, los cuantificadores, y se usan el paréntesis y la coma para hacer más legibles las fórmulas. Estos símbolos se llaman símbolos lógicos. En cambio, los símbolos no lógicos de un lenguaje formal son los de constante, de relación y de función. La presencia de éstos en los lenguajes formales los distingue entre sí. Por ello hablamos de lenguajes y no de un lenguaje. Otra cuestión importante es que para definir un lenguaje formal particular se debe especificar qué símbolos no lógicos aparecen en él; más aún, en caso de que aparezcan símbolos de función o relación se debe especificar de qué tipo se trata; es decir, si R es un símbolo de relación o si f es un símbolo de función, debemos aclarar cuantas variables admite; esto es, se establece que se trata de un símbolo de n-relación o de m-función cuando se trata de una relación con n variables o de una función de m variables, donde $m, n > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. Llamamos valencia del símbolo de función f o de relación R al número de variables que incluye. En este sentido, los símbolos de constante se pueden considerar (y suele emplearse este recurso, aunque nosotros rara vez lo haremos) como símbolos de 0-función, pues siempre arrojan el mismo valor.

Puesto que un lenguaje formal está bien definido una vez que se señalan sus símbolos no lógicos, con frecuencia escribiremos frases tales como «sea $\boldsymbol{\mathcal{L}} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un lenguaje...», indicando sólo dichos símbolos.

Ejemplo 2.2.2. Un buen ejemplo del uso de los símbolos de constante. En análisis complejo, no existe un número real cuyo cuadrado sea -1, por lo que se introduce el símbolo de constante i para nombrar a la entidad que tiene la propiedad $i^2 = -1$ (junto con algunas otras características simples). Por supuesto, el mero hecho de darle un nombre no asegura su existencia, pero una de las motivaciones para introducir objetos en lógica matemática es que no generen contradicciones.

A continuación se presentan algunos ejemplos de lenguajes formales:

- ✧ El lenguaje de la teoría de grupos

  $\{e, *\}$ o $\{e, *, ^{-1}\}$, que consiste en un símbolo de constante e (para la identidad del grupo), un símbolo de 2-función $*$ (para la operación del grupo) y puede o no incluir un símbolo de 1-función $^{-1}$ para la operación inverso. Después veremos qué diferencia hay entre usar uno u otro.

- ✧ Un lenguaje para la aritmética

  $\{0, 1, +, \cdot\}$, que consiste en dos símbolos de constante 0,1 (cuyo propósito es evidente: fungir como el cero y el uno de los naturales), dos símbolos de 2-función $+, \cdot$ para representar a la suma y multiplicación.

- ✧ El lenguaje de las relaciones de equivalencia

  $\{R\}$, que consta simplemente de un símbolo de 2-relación R.

- ✧ El lenguaje de la teoría de los espacios vectoriales sobre un campo F

  $\{0, 1, +, \{f : f \in F\}\}$, que consiste en dos símbolos de constante 0,1 asociados a las identidades en el grupo abeliano (aditiva) del espacio vectorial y en el campo F (multiplicativa). La multiplicación de un elemento g del grupo abeliano por un elemento del campo F, es decir, la multiplicación escalar, se representa mediante 1-funciones f, una para cada $f \in F$. Después daremos más detalles de esta situación.

Algunos ejemplos de fórmulas son los siguientes:

$$\forall y \exists x \forall z R(x, y, z)$$
$$\forall y \forall z \exists x R(f(x, y), g(z))$$

Puesto que la igualdad ocurre con frecuencia en matemáticas, añadimos «=» a nuestra lista de símbolos. Los axiomas que rigen este predicado deben reflejar las características que son de esperarse para la igualdad. En breve presentamos estos axiomas, y en lo sucesivo siempre supondremos que $=$ está entre los símbolos de relación, a menos que se especifique lo contrario.

He aquí otro ejemplo de fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z \ (x = y \vee \neg x = y \vee x = z)$$

¡Cuidado! No hemos definido de manera formal cómo se construyen las fórmulas. Éste es el motivo de la siguiente sección.

Naui Océlotl. Sol de Tierra. Al terminar la creación del universo, los cuatro dioses creadores vieron que este sol estaba como inerte y sólo era alumbrado por una luz crepuscular.

Discurrieron entonces que uno de ellos se transformara en sol y lo pusiera en movimiento. Tezcatlipoca, el que se disfraza de jaguar, fue el primer dios que se hizo sol y de esta manera dio comienzo a las eras del mundo, pues a partir de este primer sol empezaron a contarse los años. Los seres de esa época eran gigantes que arrancaban árboles enormes con las manos, pero no sabían cultivar la tierra. Se mantenían de bellotas y de frutos y raíces silvestres. Este sol terminó abruptamente cuando los gigantes fueron devorados por jaguares feroces y el sol desapareció. Esto ocurrió en el día llamado 4 jaguar. Duró este primer sol 676 años.

2.3 Sintaxis

Para el lector que conoce la lógica proposicional (véase por ejemplo [FeVi09]) puede notar que la definición de fórmula en la lógica de primer orden es análoga a la de la lógica proposicional, pero por supuesto tiene características especiales.

El caso que ahora nos ocupa requiere definir, antes que nada, partes de la fórmula que se refieren a los individuos con los que trataremos. Este es el propósito de los términos; ellos son los que nos permitirán referirnos a ciertos elementos del universo.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden.[1]

- Toda variable y todo símbolo de constante es un término.
- Si f es un símbolo de m- función y $t_1, \ldots, t_m$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_m)$ es un término.

Si tenemos un lenguaje formal con un símbolo de 1-función f, resulta que$f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, ... son términos, que con frecuencia escribiremos simplemente como $f(x)$, $ff(x)$, $fff(x)$, ...

Ejemplos de términos:

- En el lenguaje de la teoría de grupos,

  $e, x, x \cdot y, e \cdot e, x^{-1}$.

[1] En lo sucesivo entenderemos por lenguaje de primer orden cualquier lenguaje formal.

- En el lenguaje para la aritmética,
  $x + y$, $x + (y \cdot z)$, $0 + 1$, $0 \cdot 1$.
- En el lenguaje de las relaciones de equivalencia,
  x, y, z.

Para obtener una definición más precisa de *término*, procedemos como a continuación:

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal. El conjunto $Tm(\mathcal{L})$ de términos del lenguaje $\mathcal{L}$ es el menor subconjunto de las cadenas finitas en $\mathcal{L}$ tal que

(i) contiene las variables y los símbolos de constante.

(ii) es cerrado respecto a la operación

$$(m_1, \ldots, m_n) \mapsto f(m_1, \ldots, m_n)$$

para todo natural $n \geq 1$ y todo símbolo de n-función f de $\mathcal{L}$.

Sea Var el conjunto de variables, $Var = \{x, y, z, \ldots\}$.

Definición 2.3.2.

$$\begin{aligned} Tm_0(\mathcal{L}) &= Var \cup \mathcal{C} \\ Tm_{k+1}(\mathcal{L}) &= Tm_k(\mathcal{L}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F} \text{ de valencia } n, t_1, \ldots, t_n \in Tm_k(\mathcal{L})\} \\ \overline{Tm}(\mathcal{L}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Tm_n(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

Ahora comprobaremos que ambas definiciones $Tm(\mathcal{L})$ y $\overline{Tm}(\mathcal{L})$ son iguales.

Lema 2.3.3.

$$Tm(\mathcal{L}) = \overline{Tm}(\mathcal{L}).$$

Demostración. $\subseteq$) Si verificamos que $\overline{Tm}(\mathcal{L})$ cumple las propiedades (i) y (ii) de la definición 2.3.1, puesto que $Tm(\mathcal{L})$ es el menor posible que las cumple habremos mostrado que $Tm(\mathcal{L}) \subseteq \overline{Tm}(\mathcal{L})$. Ya que las variables y constantes están en $Tm_0(\mathcal{L})$ cumple con (i).

Supongamos que $m_1, \ldots, m_n \in \overline{Tm}(\mathcal{L})$. Debemos comprobar que $f(m_1, \ldots, m_n) \in \overline{Tm}(\mathcal{L})$. Por definición de $\overline{Tm}(\mathcal{L})$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_1, \ldots, m_n \in Tm_k(\mathcal{L})$. En consecuencia, $f(m_1, \ldots, m_n) \in Tm_{k+1}(\mathcal{L}) \subseteq \overline{Tm}(\mathcal{L})$.

$\supseteq$) Probaremos que $Tm_k(\mathcal{L}) \subseteq Tm(\mathcal{L})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ lo que da lugar a $\overline{Tm}(\mathcal{L}) \subseteq Tm(\mathcal{L})$. Procedemos por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$, por (i) $Tm_0(\mathcal{L}) \subseteq Tm(\mathcal{L})$. Suponga cierta la afirmación para k y probémosla para $k + 1$. Sea $t \in Tm_{k+1}(\mathcal{L})$; si $t \in Tm_k(\mathcal{L})$, la conclusión se sigue de la hipótesis de inducción. Si $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ con $t_1, \ldots, t_m \in Tm_k(\mathcal{L}) \subseteq Tm(\mathcal{L})$, por (ii) $t = f(t_1, \ldots, t_m) \in Tm(\mathcal{L})$, confirmando nuestra afirmación. ∎

Definición 2.3.4. La altura de un término $t \in Tm(\mathcal{L})$ es el menor k tal que $t \in Tm_k(\mathcal{L})$.

Siempre tenemos $\mathcal{L}$-términos de altura 0, pues siempre hay variables en $\mathcal{L}$. Sin embargo, no necesariamente tenemos símbolos de función o constante, por lo que puede no haber términos de altura $n > 0$.

¿Qué cosa es, que está parada en el camino con las costillas de fuera? El huacal.

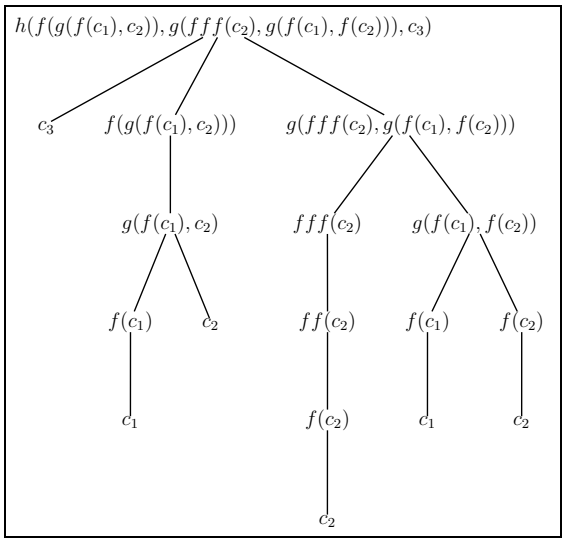
Ejemplo 2.3.5. Supongamos que tenemos el lenguaje $\mathcal{L} = \{f, g, h, c_1, c_2, c_3, R, P, Q\}$, donde

- f es un símbolo de 1-función.
- g es un símbolo de 2-función.
- h es un símbolo de 3-función.
- c_1, c_2, c_3 son símbolos de constante.
- R, P, Q son símbolos de 1-predicado.

Los siguientes son términos de $\mathcal{L}$:

- c_1
- c_2
- c_3
- $f(c_1)$
- $f(f(x))$
- $g(f(c_1), f(c_2))$
- $h(c_1, f(g(x, y)), h(c_1, c_3, g(u, v))$

Considere el siguiente término y su árbol de formación, es decir, una representación como árbol binario de cómo se construye el término a partir sus componentes más simples (símbolos de constante o variable).



Este término tiene altura 5.

Ya que tenemos términos con los cuales podemos referirnos a individuos, requerimos expresar relaciones entre estas entidades. Para ello están destinadas las fórmulas, de las cuales, las más sencillas son las atómicas o primitivas.

Definición 2.3.6. Una fórmula atómica es una fórmula que tiene la forma $t_1 = t_2$ o $R(t_1, \ldots, t_n)$, donde R es un símbolo de n-relación y $t_1, \ldots, t_n$ son términos.

He aquí algunos ejemplos de fórmulas atómicas:

- En la teoría de grupos,

  $x \cdot y = e, e \cdot e = e.$

- En la aritmética,

  $x + y = z \cdot z$, $x + 1 = x$, $0 + 1 = x$, $0 \cdot 1 = 0$.

- En las relaciones de equivalencia,

  $R(x, y), R(x, x)$.

A partir de las fórmulas atómicas se construyen fórmulas más complicadas que expresen relaciones complejas entre los individuos (términos).

Cada fórmula de la lógica de primer orden se construye con fórmulas atómicas y con la aplicación de las siguientes reglas. Al igual que en la lógica proposicional, se consideran algunos símbolos fijos como primitivos. Los otros símbolos se definen en términos de los primitivos. Tomamos $\neg$, $\wedge$ y $\exists$ como primitivos, pero esto cambiará constantemente, por lo que el lector debe tener presente como se expresa un conectivo en términos de otros.

(R1) Si φ es una fórmula, también lo es $\neg\varphi$.

(R2) Si φ y ψ son fórmulas, también lo es $\varphi \wedge \psi$.

(R3) Si φ es una fórmula y x una variable, $\exists x\ \varphi$ es una fórmula.

Definición 2.3.7. Una cadena de símbolos es una fórmula de la lógica de primer orden si y sólo si se construye con fórmulas atómicas mediante la aplicación de las reglas $(R1)$, $(R2)$ y $(R3)$.

La definición de $\vee$, $\longrightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \to \psi &\equiv \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \\ \forall x\varphi &\equiv \neg\exists x\neg\varphi \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.8. Las siguientes son fórmulas:

$$\begin{aligned} &\forall y P(x,y) \to \exists x Q(z) \\ &\forall y \forall z R(x,x,z) \to R(x,z,z) \\ &\forall y \forall z (\neg R(x,y,z) \leftrightarrow \neg R(z,y,x)) \end{aligned}$$

No son fórmulas:

$$\begin{aligned} &\exists \forall y (P(x,y,z) \vee R(x,y)) \\ &\neg R(x,y) P(x,y) \to x_1 = x_2 \end{aligned}$$

«El negro y el rojo de los antiguos». Estas palabras se decían de las instituciones de los antiguos, de la forma de vida que ellos nos dejaron; unos viven de acuerdo con ella, otros no; por eso se decía: que no se pierda el negro, el rojo de los antiguos, es decir, las costumbres.

Ejemplo 2.3.9.

❋ $P(x), Q(x,y), R(x,y,z)$, $x = y$, y $x \in y$ son fórmulas atómicas o primitivas en un lenguaje que contiene los símbolos: de 1-predicado P, 2-predicado $Q, \in, =$ y 3-predicado R.

❄ $P(x) \vee Q(x), P(x) \wedge \neg P(x), R(x,y) \to R(y,x)$ son fórmulas en un lenguaje que contiene los símbolos: de 1-relación P, 1-relación Q y de 2-relación R.

❄ $\forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)), \exists z(R(x,z) \vee R(x,x) \vee R(z,x))$ son fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L} = \{P, R\}$, donde P y R son 2-predicados.

Ejemplo 2.3.10. En el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot, \}$ tenemos los siguientes ejemplos de fórmulas, donde s es una 1-función, que se pretende represente la operación sucesor, es decir $n + 1 = s(n)$.

1. $\forall x \neg(s(x) = 0)$.
2. $\forall x \forall y(s(x) = s(y) \to x = y)$.
3. $\forall \bar{z}(\varphi(0, \bar{z}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{z}) \to \varphi(s(x), \bar{z})) \to \forall x \varphi(x, \bar{z}))$ para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ.
4. $\forall\, x(x + 0 = x)$.
5. $\forall\, x \forall\, y(x + s(y) = s(x + y))$.
6. $\forall\, x(x \cdot 0 = 0)$.
7. $\forall\, x \forall\, y(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$.

Estas fórmulas se conocen como los axiomas de la aritmética de Peano de primer orden.

Si escogemos el lenguaje $\{0, s, +, =\}$ (donde s es la función sucesor) podemos expresar propiedades de los números naturales. En este lenguaje, un número natural n se representa como el n-ésimo sucesor del 0, usando, por supuesto, la función s. En lugar de emplear este lenguaje, podemos, por ejemplo, introducir un símbolo de constante $\dot{n}$ para cada número natural n, lo que da lugar a una cantidad infinita de símbolos de constante; también podemos incluir 1 como nuevo símbolo de constante. En ambos casos, evadimos el uso del símbolo de función s. Si añadimos la constante 1, cualquier natural se obtiene sumando unos $1 + 1 + \cdots + 1$. No existe un «mejor» lenguaje para trabajar con $\mathbb{N}$; se debe elegir aquel que sea más conveniente para la situación particular que se quiere examinar

Otro lenguaje para trabajar con $\mathbb{N}$ es $\{0, 1, +, \cdot, =, <\}$. Otra vez, desaparece s, pero tenemos símbolos de constante $0, 1$ y funciones $\cdot, +$. Además, el símbolo de relación $<$. Los términos más simples en este lenguaje son $0, 1$ y las variables. Si usamos $+$ y $\cdot$ logramos téminos más complejos $1 + 1$, $0 \cdot 1$, $x + 0$, $x \cdot x$, $(1 + 1) \cdot (1 + 1)$, etc. Como fórmulas, aparecen $x < 1$, $x = x$, $x \cdot 1 = x$, etc.

En el lenguaje $\{0, s, +, \cdot, =\}$ expresamos los siguientes axiomas, debidos a A. Robinson.

❶ $\forall x \neg(s(x) = 0)$.

❷ $\forall x, y(s(x) = s(y) \to x = y)$

❸ $\forall x(x = 0 \vee \exists y(s(y) = x))$

❹ $\forall x(x + 0 = x)$

❺ $\forall x, y(x + s(y) = s(x + y))$

❻ $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

❼ $\forall x, y(x \cdot (s(y)) = x \cdot y + x)$

Estos axiomas conforman lo que se conoce como la aritmética de Robinson. Si añadimos el siguiente axioma, para cada fórmula φ del lenguaje, obtenemos una teoría equivalente a la aritmética de Peano,

❽ $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s(x)))) \to \forall x \varphi(x)$.

Ejemplo 2.3.11. En la teoría de grupos, las siguientes son fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L} = \{*, e\}$:

❋ $\forall x \forall y \forall z (x * y) * z = x * (y * z)$.

❋ $\forall x(x * e = x = e * x)$.

❋ $\forall x \exists y(x * y = e = y * x)$,

que son los axiomas de la teoría de grupos. Si añadimos la fórmula

❋ $\forall x \forall y(x * y = y * x)$,

obtenemos los axiomas de la teoría de grupos abelianos. En los incisos segundo y tercero hemos abusado de la notación y escribimos una sola fórmula cuando en realidad son dos o tres.

Ejemplo 2.3.12. El lenguaje de la teoría de anillos con 1

$$\mathcal{L} = \{\cdot, +, 0, 1\},$$

donde $\cdot$, $+$ son 2-funciones, 0 y 1 son símbolos de constante.

Los axiomas de las teoría de anillos son los siguientes

✶ $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

- $\forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z))$
- $\forall x(x+0 = x)$
- $\forall x \exists y(x+y = 0)$
- $\forall x \forall y(x+y = y+x)$
- $\forall x(x \cdot 1 = x = 1 \cdot x)$
- $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$
- $\forall x \forall y \forall z((x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$

Si añadimos

- $\forall x \exists y(x \cdot y \cdot x = x)$,

obtenemos los anillos de Von Neumann.

Si a los axiomas de la teoría de anillos adjuntamos

- $\forall x \forall y(xy = yx)$,
- $0 \neq 1$, y
- $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$, obtenemos los axiomas de un campo.

Con frecuencia escribiremos la fórmula $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ también en forma abreviada como $\forall x_1, x_2, \cdots x_n \varphi(x_1 \ldots, x_n)$, así como $\exists x_1, \ldots, x_s \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en lugar de $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_s \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 2.3.13. En este ejemplo queremos describir un lenguaje formal apropiado para trabajar con R-módulos. Desde un punto de vista puramente algebraico, un R-módulo M no es otra cosa que un grupo abeliano M y un anillo R entre los que está definida una operación extra. A saber, multiplicación por entidades extrañas a M, elementos del anillo R; el resultado de esta operación es un elemento del grupo abeliano M. Antes apareció ya este problema, cuando tratamos el lenguaje para los espacios vectoriales; prometimos aclarar la situación y ahora es el momento. Por cierto, saber un poco de álgebra, sí que ayudará al lector.

Informalmente podemos escribir los axiomas de un R-módulo M como sigue. Suponemos que el anillo tiene 1, aunque esto no ocurre en todos los anillos, en teoría de módulos casi siempres se presupone, y nosotros tendremos siempre esta condición presente. Primero, establecemos que M es un grupo abeliano. Para cualesquier $x, y, z \in M$

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

Para cada $x \in M$,

$$x + 0 = x$$

Para toda $x \in M$, existe $y \in M$ tal que

$$x + y = 0.$$

Para cualesquier $x, y \in M$, se cumple que

$$x + y = y + x.$$

Después, expresamos la operación entre elementos del anillo R y los del grupo abeliano M. Aquí es importante recordar que se debe especificar en que lado del producto aparecen los elementos del anillo, si a la derecha (R-módulo derecho) o a la izquierda (R-módulo izquierdo). Trataremos módulos izquierdos; cambiar a R-módulos derechos es trivial, en lo que a su expresión en nuestro lenguaje se refiere. Para cualesquier $r, s \in R, x, y \in M$,

$$\begin{aligned} r(x + y) &= rx + ry \\ (r + s)x &= rx + sy \\ r(sx) &= (rs)x \\ 1x &= x. \end{aligned}$$

Nuestra intención es diseñar un lenguaje formal $\mathcal{L}$ que nos permita escribir estos axiomas como $\mathcal{L}$-enunciados.

El problema radica en los cuatro últimos axiomas. Por un lado «cuantificamos» sobre los elementos del grupo abeliano y por otro, sobre los elementos del anillo. Tenemos dos tipos de variables y en la mayoría de los casos, el grupo abeliano no comparte elemento alguno con el anillo. Aunque lo hiciera, requerimos distinguir en la cuantificación qué tipo de elementos tenemos en mente. Una solución es recurrir a lenguajes polifacéticos que admiten variables de distinto tipo. No obstante, este camino involucra dificultades adicionales, que ahora mismo preferimos evadir. Más aún, en la teoría de modelos de módulos se privilegia la variante que ahora describimos.

Si $r \in R$, rx es un elemento de M, lo mismo que ry, rz, etc. para cualesquier $x, y, z \in M$. Propiamente, r describe una operación que recibe un elemento de M y regresa un elemento de M, esto es f_r es una 1-función $f_r : M \longrightarrow M$. En consecuencia, introducimos un símbolo f_r de 1-función para cada $r \in R$. Nuestro lenguaje es,

$$\mathcal{L} = \{+, 0, \{f_r : r \in R\}\},$$

o smplemente,

$$\mathcal{L} = \{+, 0, \{r : r \in R\}\}.$$

En la práctica, se escribe rx en lugar de la notación funcional $r(x)$.

Los axiomas de la teoría de los R-módulos izquierdos son los siguientes. ¡Cuidado!

no podemos cuantificar sobre elementos del anillo.

- ✻ $\forall x,y,z((x+y)+z=x+(y+z))$.
- ✻ $\forall x(x+0=x)$.
- ✻ $\forall x\exists y(x+y=0)$.
- ✻ $\forall x,y(x+y=y+x)$.
- ✻ $\{\forall x,y(r(x+y)=rx+ry) : r\in R\}$.
- ✻ $\{\forall x((r+s)x=rx+sx) : r,s\in R\}$.
- ✻ $\{\forall x((rs)x=r(sx)) : r,s\in R\}$.

Si el anillo tiene uno (=1) y se trata de un R-módulo unitario agregamos

- ✻ $\forall x(1x=x)$

Algunos de estos axiomas son propiamente conjuntos (esquemas) de axiomas, porque no podemos cuantificar sobre elementos del anillo y debemos expresar la propiedad para cada símbolo de función que represente a un elemento de R.

Como mencionamos, si queremos describir un espacio vectorial sobre un campo K, aparece la misma dificultad y recurrimos a la misma solución.

«Se estima, se respeta». Estas palabras se decían del que no era nunca demasiado familiar en sus palabras, que amaba mucho su palabra, no se ponía en vergüenza delante de nadie riéndose o diciendo bromas; por eso se decía: mucho se estima, mucho se respeta.

Ejemplo 2.3.14. Para la teoría de los órdenes lineales requerimos el lenguaje $\{<\}$, donde $<$ es un símbolo de 2-relación. Los axiomas son como sigue:

- ✺ $\forall x\neg(x<x)$
- ✺ $\forall x,y(x=y\vee x<y\vee y<x)$
- ✺ $\forall x,y,z(x<y\wedge y<z\to x<z)$

Si queremos hablar de los órdenes lineales densos sin extremos, añadimos:

- ✺ $\forall x,y(x<y\to\exists z(x<z\wedge z<y))$
- ✺ $\forall x\exists z(z<x)$

✺ $\forall x \exists z(x < z)$

Vale la pena detenerse un poco más en el proceso de construcción de fórmulas y formalizar la definición 2.3.7.

Definición 2.3.15. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $W(\mathcal{L})$ el conjunto de cadenas finitas de símbolos de $\mathcal{L}$. El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas de primer orden $Fml(\mathcal{L})$ es el menor subconjunto de $W(\mathcal{L})$ tal que

- ✧ Contiene todas las fórmulas atómicas.
- ✧ Si contiene dos cadenas φ, ψ, también contiene las cadenas $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ y las cadenas $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$.

Mediante $At(\mathcal{L})$ o $Atm(\mathcal{L})$ denotamos las $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas.

Lema 2.3.16. *Sean*

$$\begin{aligned} Fml_0(\mathcal{L}) =& At(\mathcal{L}) \\ Fml_{n+1}(\mathcal{L}) =& Fml_n(\mathcal{L}) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in Fml_n(\mathcal{L})\} \\ & \cup \{(\varphi \diamond \psi) : \varphi, \psi \in Fml_n(\mathcal{L}), \diamond \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}\} \\ & \cup \{\forall x\varphi : \varphi \in Fml_n(\mathcal{L})\} \\ & \cup \{\exists x\varphi : \varphi \in Fml_n(\mathcal{L})\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$Fml(\mathcal{L}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fml_n(\mathcal{L}).$$

Demostración. Nuestra definición de $Fml(\mathcal{L})$ es la de la definición 2.3.15. Sea

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Fml_n(\mathcal{L}).$$

Debemos comprobar que $F = Fml(\mathcal{L})$. Para probar que $F \subseteq Fml(\mathcal{L})$, mostramos que $Fml_n(\mathcal{L}) \subseteq Fml(\mathcal{L})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, $Fml_0(\mathcal{L}) = At(\mathcal{L})$ y de la definición 2.3.15 sabemos que $At(\mathcal{L}) \subseteq Fml(\mathcal{L})$.

Supongamos que $Fml_n(\mathcal{L}) \subseteq Fml(\mathcal{L})$. Si $\varphi \in Fml_{n+1}(\mathcal{L})$, tenemos varias posibilidades por considerar:

$$\begin{aligned} \varphi \equiv& \varphi_1 \diamond \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in Fml_n(\mathcal{L}), \diamond \in \{\to, \leftrightarrow, \vee, \wedge\} \\ \varphi \equiv& \neg\varphi_1, \quad \varphi_1 \in Fml_n(\mathcal{L}) \\ \varphi \equiv& \forall v_k \varphi_1, \quad \varphi_1 \in Fml_n(\mathcal{L}) \\ \varphi \equiv& \exists v_k \varphi_1, \quad \varphi_1 \in Fml_n(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, de la definición 2.3.15 se sigue que en cualquiera de los casos $\varphi \in Fml(\mathcal{L})$, por lo que $F \subseteq Fml(\mathcal{L})$.

Para probar que $Fml(\mathcal{L}) \subseteq F$ basta mostrar que F cumple con los incisos de la definición 2.3.15, lo cual es inmediato. Como $Fml(\mathcal{L})$ es el más pequeño que los satisface, deducimos $Fml(\mathcal{L}) \subseteq F$. ❐

Si $\varphi \in Fml(\mathcal{L})$, definimos el rango $rg(\varphi)$ como el menor entero k tal que $\varphi \in Fml_k(\mathcal{L})$.

En múltiples ocasiones usaremos, durante una demostración, la forma «procedemos por inducción en la construcción de la fórmula φ», lo cual significa, en realidad, que efectuamos inducción sobre $rg(\varphi)$, que es un número natural.

Así, el caso base $n = 0$ corresponde a las fórmulas atómicas $\varphi \in At(\mathcal{L})$. Si suponemos cierta la afirmación para $\varphi_1, \varphi_2 \in Fml_n(\mathcal{L})$ y la probamos para $\varphi \equiv \varphi_1 \diamond \varphi_2$ ($\diamond \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$) o $\varphi \equiv Qv_k\varphi_1$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$) o $\varphi \equiv \neg\varphi_1$, esto significa que aceptamos la afirmación para $rg(\varphi_1) = rg(\varphi_2) \leq n$ y la probamos para $rg(\varphi) = n + 1$.

En el resto de libro usaremos la notación $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ para abreviar $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$; en forma correspondiente se define $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Traducción

A continuación presentamos varios ejemplos de traducción a un lenguaje formal. En cada ejemplo el lenguaje formal utilizado es claro por el contexto o se puede deducir de los símbolos utilizados.

Ejemplo 2.3.17. Traduzca las siguientes afirmaciones: Todo entero tiene al menos un inverso aditivo. Ninguna pareja de enteros distintos tiene el mismo inverso aditivo. Si un entero tiene a x como su inverso aditivo y otro entero tiene a $-x$ como su inverso aditivo, la suma de ambos enteros es cero para todo entero x.

Traducción: (suponemos que las variables representan enteros)

① $\forall x \exists y(x + y = 0)$

② $\forall x \forall y \forall z(\neg(x = y) \wedge x + z = 0 \rightarrow \neg(y + z = 0))$

③ $\forall x \forall z \forall y \forall u(u + x = 0 \wedge z + y = 0 \wedge y + x = 0 \rightarrow u + z = 0)$

«Corazón y sangre». Decíase esta palabra del cacao, pues era algo precioso, que no se veía por ningún lado en la antigüedad, algo que no bebían los macehuales ni la gente pobre; sólo gente de cuenta se bebía el cacao.

Ejemplo 2.3.18. Traduzca la información a continuación: Todo entero es múltiplo de algún entero. Existe un entero que no es múltiplo de un entero excepto de sí mismo. Todo entero es múltiplo de sí mismo.

Traducción: (suponemos que las variables representan enteros)

① $\forall x \exists y \exists z (x = y \cdot z)$

② $\exists x \forall y \forall z \exists u (x = x \cdot u \wedge (x = y \cdot z) \rightarrow (x = z \vee x = y))$

③ $\forall x \exists y (x = y \cdot x)$

Ejemplo 2.3.19. Cualquier profesor que realiza investigación debe impartir un curso. Eloísa es una profesora que no debe impartir cursos. Existen profesores que no realizan investigación. Usamos la siguiente nomenclatura:

- ☆ $P(x) \equiv x$ es profesor.
- ☆ $I(x) \equiv x$ realiza investigación.
- ☆ $C(x) \equiv x$ imparte cursos.
- ☆ $e \equiv$ Eloísa.

Traducción:

① $\forall x (P(x) \wedge I(x) \rightarrow C(x))$

② $P(e) \wedge \neg C(e)$

③ $\exists x (P(x) \wedge \neg I(x))$

Ejemplo 2.3.20. Exprese las siguientes propiedades de los enteros.

① La ley conmutativa de la suma.

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

② Algunos enteros son múltiplos de 3.

$$\exists z \exists u (z = (1 + 1 + 1) \cdot u)$$

③ 10 es un múltiplo positivo de algún entero. Usamos 10 como abreviatura de $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ y $x > 0$ como abreviación de $0 \leq x \wedge \neg(0 = x)$.

$$\exists z (z = 10 \wedge \exists x \exists y (y > 0 \wedge x > 0 \wedge z = x \cdot y)$$

④ Existe un entero positivo impar más pequeño.

$$\exists x \exists y (x = y + y + 1 \wedge \forall z (z < x \rightarrow \neg \exists u (z = u + u + 1))$$

⑤ No todo entero distinto de cero tiene inverso multiplicativo.

$$\exists x (\neg(x = 0) \wedge \neg \exists y (x \cdot y = 1))$$

⑥ Algún entero impar es factor de todo entero impar. Usamos $2z$ como abreviatura de $z + z$.

$$\exists x \exists z (x = 2z + 1 \wedge \forall y \forall u (y = 2u + 1 \rightarrow \exists v (y = x \cdot v))$$

De cualquier sapo hace mole. Dícese de aquel a quien no se encomiendan cosas difíciles y a él le parecen difíciles en extremo.

Ejemplo 2.3.21. Algunos estudiantes prefieren matemáticas en lugar de física. Algunos estudiantes reprueban lógica. Todo estudiante de computación debe cursar la materia A con el profesor B. Si un estudiante cursa la materia A con el profesor C, entonces prefiere lógica en lugar de química.

Usamos la notación que sigue:

- $q \equiv$ química.
- $l \equiv$ lógica.
- $m \equiv$ matemáticas.

- $f \equiv$ física.
- $a \equiv$ materia A.
- $b \equiv$ Profesor B.
- $c \equiv$ Profesor C.
- $P(x, y, z) \equiv x$ prefiere y en lugar de z.
- $L(x) \equiv x$ aprueba lógica.
- $E(x) \equiv x$ es estudiante.
- $C(x) \equiv x$ estudia computación.
- $M(x, y, z) \equiv x$ cursa y con z.

Traducción:

① $\exists\, x(E(x) \wedge P(x, m, f))$

② $\exists\, x(E(x) \wedge \neg L(x))$

③ $\forall\, x(C(x) \rightarrow M(x, a, b))$

④ $\forall\, x(E(x) \wedge M(x, a, c) \rightarrow P(x, l, q)))$

Ejemplo 2.3.22. Tanto el personal administrativo como el de limpieza asistieron a la marcha. Ningún obrero que asistió a la marcha estuvo acompañado por un administrativo. Algunos padres de obreros no asistieron a la marcha. Si todo el personal de limpieza asistió a la marcha, entonces algún obrero asistió acompañado por alguien de limpieza. Pilar Gómez y Alma Maricela asistieron a la marcha pero no estuvieron acompañadas por obreros. Si Pilar y Alma asistieron sin compañía, entonces ningún obrero asistió a la marcha.

Usamos la siguiente notación:

- $A(x) \equiv x$ es administrativo.
- $L(x) \equiv x$ es de limpieza.
- $O(x) \equiv x$ es obrero.
- $M(x) \equiv x$ asistió a la marcha.
- $C(x, y) \equiv y$ acompaña a x a la marcha.

❄ $P(x,y) \equiv x$ es padre de y.

❄ $e \equiv$ Pilar Gómez.

❄ $a \equiv$ Alma Maricela.

Traducción:

① $\forall x((A(x) \to M(x)) \wedge (L(x) \to M(x))$

② $\forall x((O(x) \wedge M(x) \wedge \exists y C(x,y) \to \neg A(y))$

③ $\exists z \exists y(O(y) \wedge P(z,y) \wedge \neg M(z))$

④ $\forall x(L(x) \to M(x)) \to \exists z \exists u(O(z) \wedge L(u) \wedge C(u,z)$

⑤ $M(e) \wedge M(a) \wedge \forall x \forall y(O(x) \wedge O(y) \to (\neg C(x,e) \wedge \neg C(y,a)))$

⑥ $[\forall x \forall y(M(e) \wedge M(a) \wedge \neg C(x,e) \wedge \neg C(y,a)] \to \forall x(O(x) \to \neg M(x))$

Naui Ehécatl. Sol de viento. Entonces los dioses crearon el segundo sol y restauraron la vida en el mundo. Esta vez fue el dios creador Quetzalcóatl el que se transformó en sol y alumbró la tierra. Los seres de esa edad sólo comían piñones (ococentli). Pero ocurrió que Tezcatlipoca, convertido en jaguar, derribó al sol de un zarpazo y provocó un vendaval que desarraigó los árboles y levantó a los seres humanos por los aires. Quienes no perecieron por el viento se convirtieron en monos. Esto sucedió el día 4 Viento. Duró este segundo sol 676 años según unos relatos, y 364 según otros.

2.4 Sintaxis (continuación)

Ya sabemos construir fórmulas que expresan relaciones entre individuos; ahora debemos recuperar algunas nociones sintácticas.

Definición 2.4.1. Sea φ una fórmula de primer orden. Por inducción definimos qué significa que θ sea una subfórmula de φ:

✲ Si φ es atómica, θ es subfórmula de φ si y sólo si $\theta = \varphi$.

✲ Si $\varphi \equiv \neg\psi$, entonces θ es subfórmula de φ si y sólo si $\theta = \varphi$ o θ es una subfórmula de ψ.

✲ Si $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, entonces θ es subfórmula de φ si y sólo si $\theta = \varphi$ o θ es subfórmula de ψ_1 o de ψ_2.

✲ Si $\varphi \equiv \exists x\ \psi$, θ es una subfórmula de φ si y sólo si $\theta = \varphi$ o θ es subfórmula de ψ.

La obtención de subfórmulas con el resto de los conectivos y cuantificadores se logra apelando a la definición de éstos en términos de $\neg, \wedge$ y $\exists$.

Ejemplo 2.4.2. Sea $\varphi \equiv \exists x \forall y P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$. Las subfórmulas de φ son $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$, $\forall y P(x,y)$, $P(x,y)$, $\forall x \exists y Q(x,y)$, $\exists y Q(x,y)$, $Q(x,y)$ y φ misma.

Note que $P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$ no es subfórmula de φ.

Es de extraordinaria relevancia dejar claro el alcance de los cuantificadores, entre otras cosas, porque de este alcance depende la definición de variable libre que pronto daremos. Suponga que estamos en los naturales. Sea $E(x)$ la afirmación x es par y $O(x)$ es la aseveración x es impar. Entonces, $\forall x(E(x) \vee O(x))$ dice que todo número natural x es par o impar (o ambos), lo cual es cierto. Por otro lado, la fórmula $\forall x E(x) \vee \forall x O(x)$ es falsa, ya que no todo número natural es par, ni tampoco ocurre que todo número natural sea impar. Esto ilustra la importancia de delimitar adecuadamente el alacance de un cuantificador. De paso, se aprecia que no podemos simplemente «meter» el cuantificador $\forall$ y pretender que obtenemos una fórmula que expresa lo mismo que la original.

Para dejar muy claro el alcance de un cuantificador es importante utilizar paréntesis para delimitar la fórmula que se debe afectar por el cuantificador, aún a riesgo de uso excesivo de paréntesis.

Las variables libres de una fórmula φ son aquellas que aparecen en φ y no están cuantificadas, esto es variables x que no están en el alcance de un cuantificador $\exists x$ o $\forall x$, mientras que las variables que no son libres se llaman acotadas o ligadas.

Por ejemplo,

$\varphi \equiv \forall y R(x,y)$, x es libre y escribimos $\varphi(x)$.

$\psi \equiv \exists x \exists y \exists z (P(x,y) \leftrightarrow R(x,z))$, no tiene variables libres. Escribimos ψ.

$\theta \equiv \exists x P(x) \longrightarrow \forall y Q(x,y)$, donde x es acotada y libre (porque en el consecuente no está cuantificada). En este caso $\theta(x)$.

$\sigma \equiv \exists z \forall y P(x,y) \longrightarrow R(x,y,z)$, donde x, y, z son libres. Así $\sigma(x,y,z)$.

Ejemplo 2.4.3. Considere la fórmula $\forall x \exists y(x = y \vee x < y)$; en este caso x, y son acotadas y no tienen ocurrencias libres.

En la fórmula $\alpha \equiv \forall x \exists y(x + z = y) \vee (x + y = z)$, x, y están acotadas pero también son libres, mientras que z es libre; en este caso x, y tienen apariciones libres y acotadas; x, y son libres en el consecuente. Por lo tanto, decimos que x, y, z son las variables libres de esta fórmula y escribimos $\alpha(x, y, z)$.

Ejemplo 2.4.4. $\varphi \equiv \forall x(P(x, z) \to \exists y R(x, y, z)) \wedge \exists w[\forall u(A(u) \to B(u)) \leftrightarrow Q(w, u)]$.

La variables z, u son libres, mientras que x, w, y están acotadas. Escribimos $\varphi(z, u)$.

$\psi \equiv \underbrace{\forall x(P(x, z) \leftrightarrow Q(y))}_{①} \wedge \underbrace{\exists y(P(y, y) \leftrightarrow Q(z))}_{②}$.

En ① y y z son libres.

En ② z es libre. Escribimos $\psi(y, z)$.

(Hemos usado corchetes $[,]$ para hacer legible, las fórmulas; éstos desempeñan el mismo papel que los paréntesis y dispondremos de ellos libremente en lo sucesivo.)

Así que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, como lo hemos venido escribiendo, significa que las variables que tienen alguna aparición libre en φ están entre $x_1, \ldots, x_n$. En ocasiones, puede ocurrir que no todas las $x_1, \ldots, x_n$ realmente aparezcan como variables libres de φ; algunas de ellas pueden ser redundantes, lo cual no entra en conflicto con nuestra notación.

Si φ es una fórmula, $lib(\varphi)$ denota el conjunto de variables libres de φ.

Podemos definir $lib(\varphi)$ inductivamente como sigue:

- Si φ es atómica, entonces $lib(\varphi)$ es el conjunto de las variables que aparecen en φ.
- Si $\varphi \equiv \neg\psi$, entonces $lib(\varphi) = lib(\psi)$.
- Si $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$, entonces $lib(\varphi) = lib(\psi) \cup lib(\theta)$.
- Si $\varphi \equiv \exists x\psi$, $lib(\varphi) = lib(\psi) - \{x\}$.

Definición 2.4.5. Un enunciado es una fórmula que no tiene variables libres.

Pinto muy ancho lo negro. Dícese cuando no hacemos algo como se debe, cuando decimos algo descortésmente y provocamos disgusto.

Ejemplo 2.4.6. Ejemplos de enunciados.

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \vee x = x \vee x = z)$$
$$\exists x \forall y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$$
$$\forall x \exists u \exists v (P(u,v) \leftrightarrow (P(u,u) \vee R(x,u,v)))$$
$$\forall y \exists x (f(x) = y)$$

Las variables acotadas de una fórmula φ son aquellas variables que están cuantificadas. Para cualquier fórmula φ, $act(\varphi)$ denota el conjunto de variables acotadas en φ.

- Si φ es atómica, $act(\varphi) = \emptyset$.
- Si $\varphi \equiv \neg\psi$, $act(\varphi) = act(\psi)$.
- Si $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$, $act(\varphi) = act(\psi) \cup act(\psi)$.
- Si $\varphi \equiv \exists x \psi$, $act(\psi) \cup \{x\}$.

Ejemplo 2.4.7.

- $\varphi \equiv \exists x \forall y (f(x) = y)$, $act(\varphi) = \{x, y\}$, $lib(\varphi) = \emptyset$.
- $\psi \equiv \forall x \forall y \exists z (P(x,y,z) \leftrightarrow R(x,u))$, $act(\psi) = \{x,y,z\}$, $lib(\psi) = \{u\}$.

Naui Quiáuitl. Sol de Fuego. Los dioses creadores hicieron surgir entonces el tercer sol, encarnado por Tláloc, el dios de la lluvia y del fuego celeste. Bajo este sol los seres humanos se alimentaron de una semilla llamada acecentli que era como maíz de agua. Pero al igual que los soles anteriores, este tercero desapareció entre grandes catástofres. Ardió el sol, llovió fuego del cielo y los seres humanos y sus casas fueron destruidos, y quienes no murieron se volvieron guajolotes (pipiltin). Esto ocurrió el día 4 Lluvia. Duró este tercer sol 312 años según unas fuentes, y 364 según otras.

2.5 Preliminares a la semántica

Daremos algunas definiciones necesarias, todas ellas relativas a relaciones. Este tratamiento es relevante para comprender como se interpretan los predicados, funciones y constantes de un lenguaje formal, pero también examinaremos otros conceptos asociados que serán de utilidad posteriormente.

Supongamos que S, T son conjuntos. Una relación binaria R en S es simplemente un subconjunto de $S \times S$, esto es $R \subseteq S \times S$. Se suele escribir $S \times S$ como S^2. Con esta convención es importante reconocer que los elementos de una relación binaria R en S son parejas ordenadas, esto es, si $z \in R$, z debe tener la forma $z = (a, b)$ para ciertos elementos $a, b \in S$.

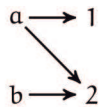
Una relación binaria R de S a T es un subconjunto de $S \times T$, $R \subseteq S \times T$. En este caso, un elemento $z \in R$ es una pareja ordenada (a, b) con $a \in S$, $b \in T$.

En general, una n-relación R en un conjunto S es un subconjunto $R \subseteq S^n$, por lo que un elemento $z \in R$ es una n-ada de elementos de S. Generalmente, cuando se habla simplemente de «relación» se supone que es una relación binaria o 2-relación.

Para entender a cabalidad la noción de relación, examinamos diversos ejemplos. Una relación se puede representar y visualizar en diversas formas; en los siguientes ejemplos proporcionamos el conjunto de n-adas que conforman la relación, dibujamos la relación como una figura con flechas, y construimos una tabla con exactamente aquellas n-adas que pertenecen a la relación.

Ejemplo 2.5.1. El conjunto $\{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\}$ es una relación binaria de $\{a, b\}$ en $\{1, 2\}$ porque es un subconjunto de $\{a, b\} \times \{1, 2\}$. Cada una de las siguientes representaciones de esta relación captura exactamente la misma situación, a saber, que a está relacionada con 1 y 2, que b lo está con 2 y no está en relación con 1,

$\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$



	1	2
a	1	1
b	0	1

Ejemplo 2.5.1

Ejemplo 2.5.2. Una relación en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

Dados los conjuntos S y T, siempre tenemos las siguientes relaciones particulares.

La relación identidad en S, que relaciona cada elemento consigo mismo y nada más. $\{(x,x) : x \in S\}$. Ilustramos la relación identidad en el conjunto $\{1,2,3\}$,

$$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

La relación vacía de S a T, que no relaciona ningún elemento con otro, no hace nada, y se denota $\varnothing$. Se muestra la relación vacía en el conjunto x.

$$\varnothing$$

La relación universal de S a T, que relaciona todos los elementos de S con todos los elementos de T. Una muestra en el conjunto $\{1,2,3\}$,

$$\begin{aligned}\{&(1,1),(1,2).(1,3)\\ &(2,1),(2,2),(2,3)\\ &(3,1),(3,2),(3,3)\}\end{aligned}$$

Existen otras relaciones binarias bien conocidas; la relación de igualdad $=$, la relación de subconjunto $\subseteq$, la relación de menor o igual $\leq$, y la de de consecuencia lógica $\rightarrow$. También tenemos relaciones en otro tipo de objetos, por ejemplo la relación parental, de hermano, de amistad, etc. que se definen en el conjunto de seres humanos.

Si R es una relación y $(a,b) \in R$, también se acostumbra expresar esto como aRb o $R(a,b)$. Usaremos cualquiera de estas notaciones en lo sucesivo. Por ejemplo, escribimos $4 < 9$ en lugar de $(4,9) \in <$ o $< (4,9)$. Pero cuando R es una relación «menos conocida» escribiremos, por lo general, $R(a,b)$.

Una vez que tenemos la noción de relación, comencemos a explorar conjuntos de relaciones e identificar propiedades interesantes en ellos. Consideremos todas las relaciones en un conjunto de dos elementos. Existen 16 de ellas; la relación vacía se puede representar como $\varnothing$ sin flechas, nada está relacionado. En la relación universal, todo está relacionado, existen flechas entre todo elemento.

Las propiedades de las relaciones pueden incluir reflexividad, simetría, transitividad, antisimetría e irreflexividad. Por supuesto, existen muchas otras propiedades, pero éstas tienen un lugar destacado. Una relación binaria R en un conjunto S es reflexiva si para toda $x \in S$, $R(x,x)$. Las relaciones reflexivas son aquellas para las cuales todo elemento está relacionado consigo mismo.

$\{(a,b),(b,a),(b,b)\}$ no es reflexiva en $\{a,b\}$. En un conjunto de tres elementos, $\{1,2,3\}$ $\{(1,1),(2,2)\}$ no es reflexiva. Una relación binaria R en un conjunto S es simétrica si para cualesquier x,y, si $R(x,y)$, entonces $R(y,x)$. Así, las relaciones simétricas son aquellas en las que no importa el orden de los elementos, (a,b) es lo mismo que (b,a).

Por ejemplo, en el conjunto $S = \{a,b,c\}$, la relación $\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ es simétrica en S, pero $\{(a,b),(b,a),(a,c)\}$ no lo es. Entre las relaciones que conocemos

bien, por ejemplo, la igualdad es simétrica; en cambio $\subseteq$ no lo es. La relación $\leq$ entre números no es simétrica. La relación de consecuencia lógica $\rightarrow$ tampoco es simétrica, pero si lo es la relación $\leftrightarrow$ entre fórmulas proposicionales. La relación universal siempre es simétrica. La relación padre-hijo no es simétrica. Una relación binaria R en un conjunto S es transitiva si para cualesquier x, y, z ocurre que, si $R(x, y)$ y $R(y, z)$, entonces $R(x, z)$. Si $S = \{1, 2, 3\}$, la relación $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ es transitiva, en cambio $\{(1, 2), (2, 3)\}$ no lo es. La relación $\{(1, 2), (2, 1)\}$ tampoco es transitiva. La relación de igualdad es transitiva, al igual que $\subseteq$ y $\leq$. Entre fórmulas proposicionales $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ son transitivas, Una relación binaria en un conjunto S es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Si $S = \{1, 2, 3\}$, la relación

$$\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

es de equivalencia, no así

$$\{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}.$$

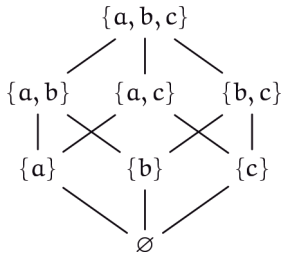
Una relación binaria R en un conjunto S es antisimétrica si para cualesquier $x, y \in S$, si $R(x, y)$ y $R(y, x)$, entonces $x = y$. Las únicas relaciones en un conjunto de dos elementos que no son antisimétricas son aquellas para las cuales cada elemento está relacionado al otro.

Si $S = \{1, 2, 3\}$, la relación $\{(1, 2), (1, 3)\}$ es antisimétrica, no así $\{(1, 2), (2, 1)\}$. Una relación binaria R en un conjunto S es irreflexiva cuando no existe $x \in S$ tal que $R(x, x)$.

En el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, la relación $\{(1, 2), (2, 1)\}$ es irreflexiva, pero $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ no lo es. Note que las nociones reflexividad e irreflexividad son enunciados universales. En una relación reflexiva aparecen todas las parejas de la forma (x, x). En una relación irreflexiva, están ausentes todas las parejas (x, x). Además, irreflexiva no es la negación de reflexiva. Segurmanete el lector tiene una idea intuitiva de que significa un orden y que se entiende por ordenar un conjunto. Ahora podemos formalizar estas nociones. Una relación binaria en un conjunto S es un orden parcial si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Es muy importante tener en cuenta que no es una práctica generalizada incluir reflexiva en la definición de orden parcial. Incluso en otros lecturas posteriores es posible que nosotros excluyamos ese requisito, por lo que siempre será importante tener bien claro, en cada momento, qué propiedades incluye un orden parcial.

Se le llama orden parcial porque pueden existir elementos que no estén relacionados entre sí. En $S = \{a, b\}$, $\{(a, a), (b, b)\}$ es un orden parcial, a pesar de que a y b no estén relacionados. La relación $\leq$ entre números reales es un orden parcial, pero no lo es $<$. Aquí es donde puede aparecer el cambio de definición en orden parcial. Para trabajar con la relación $<$ como orden parcial, se pide irreflexividad en lugar de reflexividad. Otra vez, en lo sucesivo se debe tener cuidado cuál propiedad se exige: reflexividad o irreflexividad. La relación de consecuencia lógica $\rightarrow$ no es un orden parcial entre fórmulas proposicionales, porque no es antisimétrica. Sin duda, tenemos

$\varphi \to \neg\neg\varphi$ y $\neg\neg\varphi \to \varphi$, pero φ y $\neg\neg\varphi$ no son idénticas. La relación $\subseteq$ es un orden parcial entre conjuntos. En el conjunto $\{1,2,3\}$, la figura ilustra esta relación

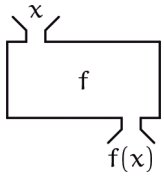


La relación $\subseteq$ en $\{1,2,3\}$

En este diagrama no se han dibujado las flechas que corresponden a reflexividad ni aquellas que se desprenden de que la relación es transitiva, pero éstas se leen del diagrama: si vamos de X hacia (arriba) Y siguiendo las líneas, se deduce $X \subseteq Y$. Un orden parcial R en un conjunto S es un orden total o lineal si para cualesquier x, y en S se cumple que xRy o yRx. Los órdenes totales relacionan todos los elementos de un conjunto. La relación $\leq$ es un orden total entre números naturales, o enteros, o racionales o reales.

2.6 Funciones

Una función de A a B es una relación binaria f de A a B tal que para toda $x \in A$ existe exactamente un elemento $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$. Escribimos $f(x) = y$ cuando $(x,y) \in f$. En este caso, decimos que x es el argumento y $f(x)$ el valor de la función. Escribimos $f : A \longrightarrow B$ para la función f cuando es una función de A a B. Podemos pensar en una función $f : A \longrightarrow B$ como una caja negra, una máquina, o un programa con una entrada y una salida. Si ponemos x, recibimos $f(x)$, y se efectúa de tal manera que no importa qué elemento de A pongamos, siempre recibimos uno de B. Si ponemos el mismo elemento de A, recibimos el mismo de B.



Una función

No debe perderse de vista que una función es un conjunto de parejas ordenadas, pues es una relación binaria. La relación $f = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ es una función de $\{1,2,3\}$ a $\{1,2,3\}$; otra forma de escribirla es $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$. La relación $\{(1,b),(2,a)\}$ de $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$ no es una función, pues no está definida en 3, es decir, no aparece una pareja ordenada cuya primera coordenada sea 3. La relación $\{(1,1),(1,2)\}$ en $\{1,2\}$ tampoco es función pues aparecen dos parejas ordenadas con

la misma primera coordenada pero con la segunda diferente. Sea f una función de A a B. El conjunto A es el dominio de f, y el conjunto B es el codominio o contradominio de f. En términos de dominio y contradominio, una función no puede enviar un elemento del dominio a dos diferentes del contradominio. Una función debe recibir cada elemento del dominio y regresar alguno del codominio. Si una relación tiene estas propiedades, es una función.

Un ejemplo importante de función, que ya hemos tratado, es la función sucesor en $\mathbb{N}$. A saber, $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(n) = n + 1$. La función más simple en un conjunto A es la función identidad, id_A, esto es $id_A(x) = x$ para cualquier $x \in A$. Una función es inyectiva cuando dos elementos diferentes en su dominio dan lugar a dos elementos diferentes en el codominio. Una función $f : A \longrightarrow B$ es sobre, cuando todo elemento $b \in B$ es imagen de algún elemento $a \in A$. Esto es, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ con $b = f(a)$. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ es inyectiva pero no sobre. A las funciones inyectivas también se les conoce como uno a uno o $1-1$. Sea f una función de A a B y $X \subseteq A$. El conjunto $\{f(x) : x \in X\}$ es la imagen de X respecto a f y se denota $f[X]$. La imagen de A respecto a f, $f[A]$, es el rango de f.

Se sigue que $B = f[A]$ si y sólo si la función es sobre y $f : A \longrightarrow B$. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ es sobre. En cambio $f(x) = x^2$ no lo es. Para probar que una función es sobre, se debe confirmar que para cada elemento y en el contradominio, existe un elemento x en el dominio con $f(x) = y$. Como vimos, una función $f : A \longrightarrow B$ es una relación, así que es un conjunto de parejas ordenadas. Lo mismo ocurre con otra función $g : C \longrightarrow D$. Si $A \neq C$, quiere decir que existe un elemento $x \in A$ que no está en C, o viceversa, un elemento $x \in C$ que no pertenece a A. En consecuencia, si $A \neq C$, existe una pareja (x, y) que aparece en f y no en g, o viceversa, (x, y) ocurre en g pero no en f. Es inmediato que en este caso $f \neq g$. Recuerde o aprenda que dos conjuntos K, H son ajenos cuando carecen de elementos en común, lo cual se denota $K \cap H = \varnothing$. Además, el producto cartesiano de los conjuntos $K \times H$ consiste en las parejas ordenadas, todas, de la forma (k, h) donde $k \in K$ y $h \in H$. Es claro que si K o H son vacíos, $K \times H$ es el conjunto vacío, pues no podemos formar parejas ordenadas, como las recién descritas.

Una función $f : A \longrightarrow B$, como conjunto de parejas ordenadas, es un subconjunto de $A \times B$. Ya vimos que si $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ y $A \neq C$, entonces necesariamente $f \neq g$. ¿Qué pasa si $B \neq D$? En este caso la respuesta no es tan sencilla y tenemos varias posibilidades para poder establecer si $f \neq g$. Si $B = \varnothing$ o $D = \varnothing$, entonces $f = \varnothing$, o $g = \varnothing$, las funciones vacías, respectivamente. Por consiguiente, si tanto B como D son vacíos, $f = g$. Si alguno de los dos B o D es vacío, pero el otro no, $f \neq g$.

Supongamos que B y D no son vacíos. Si $B \cap D = \varnothing$, deducimos $f \neq g$, porque si $x \in A$ o $x \in C$, debe existir $y \in B$ o $y \in D$, respectivamente con $(x, y) \in f$ pero $(x, y) \notin g$, o $(x, y) \in g$ pero $(x, y) \notin f$, respectivamente. En el caso en que $D \cap B \neq \varnothing$, tenemos, a su vez, varios casos. Dado que ya consideramos el caso $A \neq B$, Supongamos $A = B$ y consideremos $C \cup D$ como el contradominio de f, g.

Lema 2.6.1. *Sean $f, g : A \longrightarrow B$ funciones. Entonces, $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Suponemos $f = g$ y sea $x \in A$. Como f es función, debe existir $y \in B$ con $(x,y) \in f$, así que $y = f(x)$. Dado que $f = g$, $(x,y) \in g$, es decir, $g(x) = y = f(x)$.

$\Leftarrow$) Supongamos $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A$. Sea $(x,y) \in A \times B$. Probaremos que $(x,y) \in f$ si y sólo si $(x,y) \in g$, como sigue.

$$\begin{aligned} (x,y) \in f &\Leftrightarrow f(x) = y && \text{porque } f \text{ es función} \\ &\Leftrightarrow g(x) = y && \text{pues } f(x) = g(x) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in g && \text{ya que } g \text{ es función.} \end{aligned}$$

Se concluye que $f = g$. □

Como resumen de lo anterior, dos funciones f, g son iguales si y sólo si tiene el mismo dominio y la misma regla de correspondencia. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función y $T \subseteq Y$. El conjunto $f^{-1}[T]$ es el subconjunto de X dado por

$$f^{-1}[T] = \{x \in X : f(x) \in T\}.$$

El conjunto $f^{-1}[T]$ es la imagen inversa (o preimagen) de T (respecto a f). Se debe tener cuidado en no confundir f^{-1} recién escrita con la función inversa de f. Si $T = \{x\}$, $f^{-1}[T]$ se llama también la fibra de x.

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobre. Decimos que tal función es una biyección o una correspondencia uno a uno. Dados dos conjuntos A, B, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ entre ellos, decimos que los conjuntos A y B son equipotentes o que tienen la misma cardinalidad. En símbolos,

$$A \approx B \qquad \text{o} \qquad |A| = |B|,$$

si existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$, esto se denota $|A| \leq |B|$, y decimos que la cardinalidad de A es a lo sumo la de B. Cuando existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y no existe una función sobre de A a B, escribimos $|A| < |B|$ y decimos que la cardinalidad de A es estrictamente menor que la de B. Si $n \in \mathbb{N}$ y A es un conjunto para el cual existe una biyección entre A y $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, y esta n es la menor posible, decimos que A tiene n elementos, $|A| = n$. En tal caso decimos que el conjunto A es finito Así, un conjunto es finito si y sólo si existe una biyección entre este conjunto y un número natural n. ¿Qué quiere decir esto? bueno, que en lo sucesivo consideramos al natural n como el conjunto de sus predecesores, es decir,

$$n + 1 = \{0, \ldots, n\}$$

Por ejemplo, $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, etc. Con esta representación, note que si n, m son números naturales, $n < m$ si y sólo si $n \in m$.

Lema 2.6.2. *Sean A un conjunto finito y $n = |A|$. Si $f : A \longrightarrow n$ es inyectivo, entonces f es sobre.*

Demostración. Si $A = \varnothing$, $|A| = 0$ y cualquier función $f : A \longrightarrow 0$ es sobre 0 por vacuidad, esto es, si suponemos que f no es sobre, existiría un elemento $x \in 0$ que no es imagen de algún elemento de A, pero no puede existir tal $x \in 0$. Supongamos que $A \neq 0$, y sean $n = |A|$, $f : A \longrightarrow n$ uno a uno. Pensemos lo contrario, que f no es sobre n. Sea $k \in n$ tal que k no esta en el rango de f, $ran(f)$. Como $n \neq 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + 1$ y dado que $k \in n = m + 1$, ocurre que $k = m$ o $k \in m$. Si $k = m$, $f : A \longrightarrow m$ y f es inyectiva, así que $|A| \leq m$. Dado que $m \in n$, concluimos que $|A| \in n$, lo cual es imposible porque $|A| = n$ y n es el conjunto de sus predecesores, n no es predecesor de sí mismo. Si $k \in m$, definimos una función $g : A \longrightarrow m$ mediante

$$g(a) = \begin{cases} k, & \text{si } f(a) = m \\ f(a), & \text{si } f(a) \neq m. \end{cases}$$

Como f es inyectiva, deducimos que $g : A \longrightarrow m$ también lo es. Más aún, como $m \in n$, deducimos que $|A| \in n$, otra vez una contradicción. ❐

Corolario 2.6.3. *Si A es finito y $n = |A|$, existe una biyección $f : A \longrightarrow n$.*

Demostración. Suponga que A es finito y sea $n = |A|$. Existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow n$. Según, el lema 2.6.2, f es una biyección. ❐

Lema 2.6.4. *Sea $f : A \longrightarrow A$ inyectiva, donde A es finito. Entonces, f es sobre.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$, por lo que existe $h : A \longrightarrow n$ biyectiva, se sigue que $h \circ f : A \longrightarrow n$ es una biyección. Para probar que f es sobre A, sea $y \in A$. Como $h(y) \in n$, existe $x \in A$ tal que $h \circ f(x) = h(y)$. Así, $h(f(x)) = h(y)$, por lo que $f(x) = y$, ya que h es inyectiva. En consecuencia, f es sobre A. ❐

Un conjunto A es infinito, cuando no es finito, obviamente. Esto significa que A es infinito, cuando no existen una función f y un natural n tales que f es una biyección entre A y n.

Corolario 2.6.5. *Sea $f : A \longrightarrow A$ inyectiva pero no sobre. Entonces, A es infinito.*

❐

El siguiente teorema confirma que dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Proposición 2.6.6. *Sean A, B conjuntos finitos. Existe una biyección $h : A \longrightarrow B$ si y sólo si $|A| = |B|$.*

Demostración. Como ambos conjuntos son finitos, podemos escribir, digamos, $|A| = n$, $|B| = m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m < n$, dado que existe $h : A \longrightarrow B$ biyectiva, construimos una biyección entre A y m, lo cual es imposible pues $m < n$. En consecuencia, $n \leq m$.

Un racionamiento similar excluye el caso $n < m$, de donde se sigue que $m = n$ y $|A| = |B|$.

Si $|A| = |B|$, es inmediata la conclusión de que existe una biyección $h : A \longrightarrow B$. ☐

Recuerde que $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Dado que la función identidad de $n+1$ a $n+1$ es inyectiva, por nuestra definición de $|n+1|$, $|n+1| \in n+1$ o $|n+1| = n+1$.

Lema 2.6.7. *Para todo número natural n, tenemos $|n| = n$.*

Demostración. Procedemos por inducción en n. Si $n = 0$, $0 = |0|$. Supongamos cierto que $|n| = n$ y probemos que $|n+1| = n+1$. Ponemos $m = |n+1|$ y sea $b : n+1 \longrightarrow m$ inyectiva. Por el comentario previo al lema, $m \in n+1$ o $m = n+1$. Queremos excluir la primera alternativa, así que supongamos lo contrario, que $m \in n+1$, esto es, $m \leq n$. Dado que $b : n+1 \longrightarrow m$ es inyectiva, se sigue que $b \restriction n : n \longrightarrow m$ es inyectiva. Puesto que $|n| = n$, $n \in m$ o $n = m$, de donde se sigue que $m = n$. En vista de que $|n| = n$ y $b \restriction n$ es inyectiva el lema 2.6.2 implica que $b \restriction n$ es sobre m y como $b(n) \in m$, deducimos $b(n) = b(i)$ para alguna $i \in n$. Esto se opone al hecho de que b es inyectiva, dando paso a que $m = n+1$. ☐

Corolario 2.6.8 (Principio de las palomas)**.** *Sean m, n naturales y $f : n \longrightarrow m$. Si $m \in n$, f no es inyectiva.*

Demostración. Sabemos que $|n| = n$, $m = |m|$. Si $f : n \longrightarrow m$ es inyectiva, tenemos $n \leq m$ y como $m \in n$, $m \leq n$, por lo que $m = n$. Esto es imposible porque $m \in n$. ☐

Este principio se llama de las palomas (o de las cajas) por la siguiente situación. Si se tienen n palomas, m nidos $m < n$, y se quiere albergar a todas las palomas en algún nido, al menos uno de estos deberá admitir al menos a dos palomas.

Corolario 2.6.9. *El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.*

Demostración. Suponga que $\mathbb{N}$ es finito. Entonces, existe una función inyectiva $b : \mathbb{N} \longrightarrow n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como b es inyectiva, la restricción $b \restriction (n+1) : n+1 \longrightarrow n$ también es inyectiva, lo que se opone al corolario 2.6.8. ☐

Corolario 2.6.10. *Si $G : \mathbb{N} \longrightarrow A$ es inyectiva, A es infinito.*

Demostración. Supongamos que A es finito. Entonces, existen una función biyectiva b y un natural n con $b : A \longrightarrow n$. Se sigue que $h = b \circ G : \mathbb{N} \longrightarrow n$ es inyectiva. Por consiguiente $B = h^{-1}[n]$ es un conjunto con n elementos y $B \subseteq \mathbb{N}$. Sea l un natural mayor que cualquier elemento de B. En tal caso, $h(l) \notin n$, una contradicción. ☐

El principio de las palomas implica una versión «dual» involucrando funciones sobre.

Lema 2.6.11. *Si $m \in n$ y $f : m \longrightarrow n$, donde $m \in \omega$, $n \in \omega$, entonces f no es sobre n.*

Demostración. Suponga lo contrario, que $f : m \longrightarrow n$ es sobre. Por consiguiente, definimos la función $g : n \longrightarrow m$ mediante

$$g(x) = \text{el menor } i \in m \text{ tal que } f(i) = x \tag{2}$$

Se sigue que g es inyectiva. Sin duda, sean $x \in n$ y $y \in n$ tales que $g(x) = g(y)$. Por tanto, $f(g(x)) = f(g(y))$. Según (2), $x = y$, de donde se desprende que $g : n \longrightarrow m$ es inyectiva, lo que se opone al corolario 2.6.8, pues $m \in n$. □

Lema 2.6.12. *Si A es finito y $f : A \longrightarrow A$ es sobre, f es inyectiva.*

Demostración. Sea n un natural con $|A| = n$ y suponga que $f(a) = f(b)$, donde $a, b \in A$, $a \neq b$. Por consiguiente, $n \neq 0$ y $n = k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $K = A - \{a\}$, así que $|K| = k$ y $f \restriction K : K \longrightarrow A$ es sobre. Como $|K| = k$ y $|N| = n$, existe una función $g : k \longrightarrow n$ sobre, lo que se opone al lema 2.6.11, pues $k \in n$, de donde se sigue que f es inyectiva. □

Lema 2.6.13. *Si A es finito, $Pot(A)$ es finito.*

Demostración. Procedemos por inducción. Sea

$$I = \{n \in \omega : \text{ para todo } X, \text{ si } |X| = n, \text{ entonces } Pot(X) \text{ es finita}\}.$$

Si $|X| = 0$, $X = \varnothing$ y $Pot(X) = \{\varnothing\}$ es finita, así que $0 \in I$. Ahora tomamos $n \in I$ y probaremos que $n + 1 \in I$. Sea X un conjunto de cardinalidad $n + 1$, de paso, no vacío. Fijamos $a \in X$, lo que da lugar a $|X - \{a\}| = n$. Dado que $n \in I$, se concluye que $Pot(X - \{a\})$ es finita, de modo que existe una biyección $f : Pot(X - \{a\}) \longrightarrow m$, donde $m = |Pot(X - \{a\})|$; definimos $h : Pot(X) \longrightarrow m + m$ mediante la siguiente prescripción.

$$h(U) = \begin{cases} f(U), & \text{si } a \notin U \\ m + f(U - \{a\}), & \text{si } a \in U \end{cases} \tag{3}$$

Para verificar que h es inyectiva, suponga que $h(U) = h(V)$ con $U \in Pot(X)$ y $V \in Pot(X)$. Así, $h(U) = h(V) = i$ para algún $i \in 2m$. Debemos considerar dos casos: $i \in m$ y $m = i \vee m \in i$. Si $i \in m$, entonces $a \notin U$ y $a \notin V$ por (3). Como $h(U) = h(V)$, concluimos que $f(U) = f(V)$, de donde se sigue que $U = V$ porque f es inyectiva. Si $m = i \in m \in i$, (3) implica que $a \in U$ y $a \in V$. Otra vez, dado que $h(U) = h(V)$, (3) asegura que $m + f(U - \{a\}) = m + f(V - \{a\})$. En consecuencia, $f(U - \{a\}) = f(V - \{a\})$, lo que abre paso a $U - \{a\} = V - \{a\}$ porque f es inyectiva. Deducimos que $U = V$. Como $h : Pot(X) \longrightarrow 2m$ es inyectiva y $2m \in \mathbb{N}$, concluimos que $Pot(X)$ es finita, $n + 1 \in I$ y concluimos que $\mathbb{N} = I$. □

Definición 2.6.14. Si el conjunto A es equipotente con los naturales, es decir, $|A| = |\mathbb{N}|$, decimos que A es numerable. Llamamos a A a lo sumo numerable cuando existe una inyección $i : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

Lema 2.6.15. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable.*

Demostración. Debemos encontrar una biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Considere la siguiente prescripción, $f(2n) = n$, $f(2n+1) = -n$. Se verifica fácilmente que f es una biyección. ❐

Lema 2.6.16. *Sean A, B conjuntos con B a lo sumo numerable. Si existe una función inyectiva $g : A \longrightarrow B$, entonces A es a lo sumo numerable.*

Demostración. Dado que B es a lo sumo numerable, existe una inyección $f : B \longrightarrow \mathbb{N}$. Se sigue que $(f \circ g) : A \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva (siendo la composición de dos funciones inyectivas), así que A es a lo sumo numerable. ❐

Lema 2.6.17. *Suponga que B es numerable y que $A \subseteq B$ es infinito. Entonces A es numerable.*

Demostración. Sea $i : A \longrightarrow B$ la identidad, porque $A \subseteq B$. En vista de que i es inyectiva, el lema previo implica que A es a lo sumo numerable e infinito, así que es numerable. ❐

Lema 2.6.18. *Suponga que A, B son numerables. Entonces, $A \cup B$ es numerable.*

Demostración. Sabemos que existen biyecciones $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$. Definimos la función $h : A \cup B \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante,

$$h(x) = \begin{cases} 2^{f(x)}. & \text{si } x \in A \\ 3^{g(x)}, & \text{si } x \in B - A, \end{cases} \tag{16}$$

para cada $x \in A \cup B$. Por lo anterior, basta probar que h es inyectiva. Sean $x, y \in A \cup B$ y suponga que $h(x) = h(y)$; debemos confirmar que $x = y$. Como $h(x) = h(y)$, no podemos tener $x \in A$ y $y \in B - A$. En efecto, suponga que $x \in A$, $y \in B - A$, la definición (16) implica que $2^{f(x)} = 3^{g(y)}$, lo que se opone al teorema fundamental de la aritmética. En forma similar, no podemos tener $y \in A$ y $x \in B - A$. En consecuencia, debe ocurrir $x, y \in A$ o $x, y \in B - A$.

Si $x, y \in A$, $2^{f(x)} = 2^{f(y)}$, se desprende que $f(x) = f(y)$, dando lugar a $y = x$, pues f es inyectiva. Si $x, y \in B - A$, $2^{g(x)} = 2^{g(y)}$. Concluimos que $g(x) = g(y)$ y como g es inyectiva, tenemos $x = y$. Por lo tanto, h es inyectiva y $A \cup B$ es numerable. ❐

Lema 2.6.19. *El conjunto $\mathbb{Q}^+$ de racionales positivos es numerable*

Demostración. Definimos $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m 3^n, \qquad \text{para cada } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$$

Por supuesto, tal m/n se elige en forma reducida, es decir, sin factores en común m y n. Como se sabe, tal representacion reducida es única, por lo que f está bien definida. Debemos cerciorarnos de que f es inyectiva, para lo cual tomamos $a/b, c/d \in \mathbb{Q}^+$ en forma reducida. Si suponemos $f(a/b) = f(c/d)$, deducimos que $2^a 3^b = 2^c 3^d$, que por el teorema fundamental de la aritmética conduce a $a = c$ y $b = d$. Concluimos que $a/b = c/d$, confirmando que f es inyectiva y que $\mathbb{Q}^+$ es numerable. ☐

Lema 2.6.20. *El conjunto de los números racionales negativos $\mathbb{Q}^-$ es numerable.*

Demostración. Definimos $b : \mathbb{Q}^- \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ mediante $f(q) = -q$ para cada $q \in \mathbb{Q}^-$. Es claro que f es inyectiva y como $\mathbb{Q}^+$ es numerable, deducimos que $\mathbb{Q}^-$ también lo es. ☐

Lema 2.6.21. *Sea A un conjunto numerable. Entonces $A \cup \{x\}$ es numerable para cada conjunto x.*

Demostración. Tenemos una biyección $b : \mathbb{N} \longrightarrow A$ y construimos una biyección $c : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup \{x\}$ como sigue. Ponemos $c(0) = x$ y $c(n+1) = b(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Esto propicia una biyección, por lo que $A \cup \{x\}$ es numerable. ☐

Corolario 2.6.22. *Si A es un conjunto numerable, así lo es $A \cup \{x_0, \ldots, x_n\}$.*

Demostración. El resultado se obtiene por inducción en n, mediante el uso del lema 2.6.21. ☐

Lema 2.6.23. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable*

Demostración. Es claro que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, así que $\mathbb{Q}$ es la unión de tres conjuntos. Sabemos que dos de ellos son infinitos y numerables, el tercero es finito. Se sigue que esta unión es numerable. ☐

Después de tantos preparativos, estamos listos para introducir la semática de la lógica de predicados. Por cierto, parte de estos preparativos se usará también en apartados posteriores.

2.7 Semántica

Hemos adquirido mucha experiencia en la construcción de fórmulas para cualquier lenguaje formal. El siguiente paso es otorgarles un significado en universos donde

vivirán nuestros términos. De ello se ocupa la semántica de la lógica de primer orden y es el motivo de esta sección. Primero procedemos de manera informal y damos la definición precisa de satisfacción *infra*.

Para imponer una semántica a un lenguaje formal debemos establecer la relación entre los símbolos del lenguaje y una realidad, un universo, un dominio. Para los lectores que conocen la lógica proposicional, en ella las asignaciones dan lugar a esta semántica. En lógica de primer orden, los «modelos» o «estructuras de interpretación» toman el papel de las asignaciones, aunque apareceran funciones que también llamaremos asignaciones, posteriormente. Esto nos permite establecer la validez, satisfacibilidad, equivalencia, etc. de fórmulas. Además, nos permite (volver) a introducir la relación $\models$ y sus figuras.

Consideremos la fórmula $\forall x P(x)$ que se lee Para toda x $P(x)$. Que esta fórmula sea verdadera o falsa depende de como se interprete el predicado P en un universo. Si P se interpreta como el conjunto de todos los elementos en el dominio, la fórmula es verdadera. En otro caso, con que falle en un elemento del dominio, la fórmula es falsa. La fórmula $P(x)$ se lee $P(x)$ es verdadero. La fórmula contiene una variable libre; que sea verdadera o falsa depende de lo que pase con x. Es la misma situación con la fórmula $x + 2 = 5$, su certeza o falsedad depende de que le ocurra a x. Ahora examinemos la fórmula $\forall x \exists y(x < y)$, que se lee para toda x existe y tal que $x < y$. Otra vez, la veracidad de la fórmula depende de cómo interpretemos $<$ en un universo. Si lo interpretamos como el orden usual entre los naturales, la fórmula resulta verdadera, pues para cada natural existe uno más grande, por ejemplo, su sucesor. Si interpretamos $<$ como el orden usual en el conjunto de naturales $\{0, \ldots, 100000\}$, la fórmula es falsa, porque para $x = 100000$ no existe un y en ese conjunto que sea mayor que x.Considere el enunciado

$$\forall y \exists x \; f(x) = y,$$

el cual se lee: para todo y, existe x tal que $f(x) = y$. Para decidir si esta afirmación es cierta o no, debemos especificar qué representan x, y y f. Si suponemos que $x, y \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$, entonces el enunciado es falso pues no existe x tal que $f(x) = -1$. Si $f(x) = x^3$ o si $x, y \in \mathbb{C}$, entonces el enunciado es cierto.

Ahora consideremos la fórmula

$$\forall x \forall y (R(x, y) \longrightarrow \exists z \; (z \neq x \wedge z \neq y \wedge (R(x, z) \wedge R(z, y))).$$

Este enunciado se lee: para cualesquier x, y, si $R(x, y)$ se cumple, entonces existe algun z distinto de x, y tal que $R(x, z)$ y $R(z, y)$ se cumplen. Suponga que $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $R(x, y)$ significa $x < y$, entonces el enunciado es verdadero pues entre dos reales siempre existe un tercero. Es decir, los reales son densos. Sin embargo, si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ el enunciado es falso. Así que la validez de una fórmula depende de dos cosas: del universo en el que viven las variables y de la interpretación de los símbolos de función, constante y relación. Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje, una $\mathcal{L}$-estructura consiste en un universo junto con la interpretación de los símbolos de función, constante y relación de $\mathcal{L}$. El papel de una estructura en la lógica de primer orden es análogo al de una asignación en la lógica proposicional.

Dado un enunciado φ y una estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ es modelo de φ, en símbolos $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, si φ se cumple en $\mathfrak{A}$; más adelante formalizaremos esta idea.

Definición 2.7.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ consiste en un universo no vacío A junto con una interpretación de cada símbolo no lógico de $\mathcal{L}$. Una interpretación de $\mathcal{L}$ asigna,

- Un elemento de A a cada constante en $\mathcal{L}$.
- Una función de A^n a A para cada símbolo de función en $\mathcal{L}$ de valencia n.
- Un subconjunto de A^n para cada relación en $\mathcal{L}$ de valencia n.

Piense en un modelo como una máquina que puede responder preguntas. Si Usted se pregunta sobre el universo, la respuesta es un conjunto no vacío. Si Usted se interesa sobre el significado de un símbolo, la respuesta es: un elemento del universo cuando se trata de un símbolo de constante, una función en el universo cuando el símbolo es de función, un subconjunto del universo si es de un 1-predicado, etc. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una estructura si es una $\mathcal{L}$-estructura para algún lenguaje $\mathcal{L}$. Es fundamental entender que la notación para funciones y predicados acentúa una diferencia entre ellos: $f(x)$ indica que f retorna el valor y cuando se aplica a x, es decir, $(x, y) \in f$; en cambio, $R(x)$ significa que x tiene la propiedad R, es decir, $x \in R$. En ningún caso deben confundirse estos significados. Por ejemplo, si P es un símbolo de 2-predicado, no tiene sentido escribir $P(x, y) = P(y, x)$.

Ejemplo 2.7.2. Sea $\mathcal{L} = \{f, R, c\}$, donde f es una 1-función, R una 2-relación, c una constante.

$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$ denota una $\mathcal{L}$-estructura, donde $f^{\mathfrak{A}}(x) = x^2$, $R^{\mathfrak{A}}(x, y) \equiv x < y$, $c^{\mathfrak{A}} = 3$.

> Es todo lo que nació. Se dice cuando alguien habla brevemente, no se alarga, termina pronto, al terminar dice: *es todo lo que nació.*

Ejemplo 2.7.3. $\mathcal{L} = \{P, R\}$, donde P es una 1-relación y R es una 2-relación.

$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$

$P^{\mathfrak{A}}(x) \equiv x$ es par

$R^{\mathfrak{A}}(x, y) \equiv x + 1 = y$.

Ejemplo 2.7.4. $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$,
$\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathfrak{B}}, \cdot^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}} \rangle$,
con la interpretación natural de la suma, el producto, el 0 y el 1.

Ejemplo 2.7.5. Recuerde que para trabajar con R-módulos izquierdos (ejemplo 2.3.13), el lenguaje que elegimos es $\mathcal{L} = \{+, 0, \{r : r \in R\}\}$, donde 0 es un símbolo de constante, $+$ es un símbolo de 2-función y cada r es un símbolo de 1-función, para representar el producto del elemento $r \in R$ por los elementos del módulo.

¿Cómo es una interpretación para este lenguaje $\mathcal{L}$? Digamos

$$\mathfrak{M} = \langle M, +^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}, \{r^{\mathfrak{M}} : r \in R\} \rangle,$$

donde $0^{\mathfrak{M}} \in M$, $+^{\mathfrak{M}} : M \times M \longrightarrow M$, $r^{\mathfrak{M}} : M \longrightarrow M$ para cada $r \in R$. Por supuesto, la elección de estas interpretación es arbitraria, hasta cierto punto, pero es de esperarse proponer una que satisfaga los axiomas de la teoría de R-módulos. Por ello, lo razonable es elegir un R-módulo. Por ejemplo, el conjunto M de matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ y un anillo, por ejemplo $\mathbb{Q}$. Así, el universo es M, $0^{\mathfrak{M}}$ es la matriz $n \times n$ con 0 en cada entrada; $+^{\mathfrak{M}}$ es la suma usual de matrices y se debe explicar la interpretación de cada $r^{\mathfrak{M}}$ ($r \in \mathbb{Q}$). Estas son funciones que reciben una matriz A de $n \times n$ y regresa rA. Dado que conocemos de antemano al $\mathbb{Q}$-módulo M, sabemos quién es rA.

Ejemplo 2.7.6. Considere la fórmula

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x, c)) \equiv \varphi.$$

¿Es verdadera o falsa? ¡Atención! hemos empleado el símbolo $\equiv$, que después jugará un papel preponderante. En lo inmediato, querrá decir que la expresión a la izquierda es igual a la de la derecha.

Para investigar esto requerimos saber qué representan P, Q, c y x. Para ello debemos especificar una estructura correspondiente a nuestro lenguaje $\mathcal{L} = \{P, Q, c\}$. Así que nuestra estructura tiene la forma

$$\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle,$$

donde

$P^{\mathfrak{A}}$ es 1-predicado,
$Q^{\mathfrak{A}}$ es 2-predicado,
$c^{\mathfrak{A}}$ es símbolo de constante.

Se sigue que $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq A^2$, $c^{\mathfrak{A}} \in A$. Ahora debemos elegir qué es A. Puede ser cualquier cosa, dependiendo naturalmente de lo que queramos hacer con la fórmula φ. Como primer ejemplo, sean:

$A = \mathbb{R}$ $P^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Q}$,
$Q^{\mathfrak{A}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$c^{\mathfrak{A}} = 0$

Intuitivamente, nuestra fórmula φ dice que existe un número real x tal que x es racional y $(x, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; es decir, x es entero y c es entero. Con esta $\mathfrak{A}$, φ resulta cierta pues podemos tomar $x = 1$ y todo funciona.

Como segundo ejemplo considere $A = \mathbb{C}$, $P^{\mathfrak{A}} = \mathbb{R}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $c^{\mathfrak{A}} = \sqrt{-2}$. Es claro que no existe un número complejo x tal que $(x, \sqrt{-2}) \in Q^{\mathfrak{A}}$, pues $\sqrt{-2} \notin \mathbb{N}$. Así que la fórmula es, intuitivamente, falsa en esta interpretación.

Definición 2.7.7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Una $\mathcal{L}$-fórmula es una fórmula en la que todo símbolo de función, relación o constante pertenece a $\mathcal{L}$. Un $\mathcal{L}$-enunciado es una $\mathcal{L}$-fórmula que es un enunciado, esto es, una $\mathcal{L}$-fórmula que carece de variables libres.

Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, entonces cada $\mathcal{L}$-enunciado φ debe ser verdadero o falso en $\mathfrak{A}$; al menos es lo deseable.

Ejemplo 2.7.8. Procedamos de manera intuitiva e informal a decidir si un enunciado es cierto, o no, en una estructura. Sea $\mathfrak{R}$ la estructura $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. El lenguaje de esta estructura es $\{+, \cdot, 0, 1\}$, que denotamos como $\mathcal{L}$.

Considere el $\mathcal{L}$-enunciado $\forall x \exists y (1 + x \cdot x = y)$.

Este enunciado afirma que *para cualquier x existe y que es igual a $x^2 + 1$*. Esto es verdadero en $\mathfrak{R}$. Si tomamos cualquier número real, lo elevamos al cuadrado y le sumamos 1, el resultado es un número real, así que escribimos

$$\mathfrak{R} \vDash \forall x \exists y (1 + x \cdot x = y).$$

Ahora considere el $\mathcal{L}$-enunciado $\forall y \exists x \ (1 + x \cdot x = y)$. Este enunciado asegura que *para todo y existe una x tal que $1 + x^2 = y$*. Éste no es cierto en $\mathfrak{R}$. Si tomamos $y = -2$, no existe tal x, por lo que escribimos

$$\mathfrak{R} \nvDash \forall y \exists x (1 + x \cdot x = y).$$

Note que la fórmula es, en realidad, un enunciado, carece de variables libres, por lo que la decisión fue sencilla de tomar. Otra cosa es cuando aparecen variables libres en la fórmula en cusestión. Procedemos a definir formalmente qué significa que una $\mathcal{L}$-fórmula φ se cumpla en una $\mathcal{L}$-estructura. Recuerde que todo lenguaje $\mathcal{L}$ tiene una cantidad numerable de variables que bien podemos escribir como

$$Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

o como

$$Var = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\},$$

lo cual da exactamente lo mismo y no modifica en nada la siguiente disertación. Recuerde que usamos la notación $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc. (letras góticas) para $\mathcal{L}$-estructuras y que sus universos, respectivamente, son A, B, C, etcétera.

Definición 2.7.9. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Una $\mathfrak{A}$-asignación α es simplemente una función $\alpha : Var \longrightarrow A$.

Así que una $\mathfrak{A}$-asignación asocia un elemento del universo a cada variable. Note que variables distintas no tienen por qué asociarse a elementos distintos, respecto a la $\mathfrak{A}$-asignación; bien puede ocurrir que varias variables se asocien al mismo elemento, como también es válido que variables distintas se asocien a elementos distintos.

Las asignaciones nos sirven para «asociar» los términos con individuos del universo. En lo sucesivo será aún más importante recordar que si c es un símbolo de constante, f un símbolo de función y R un símbolo de relación, sus interpretaciones en $\mathfrak{A}$, $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ y $R^{\mathfrak{A}}$ ya no son símbolos, sino elementos de universo, funciones en el universo o subconjuntos del universo (o de A^m para algún natural $m > 0$), respectivamente.

Primero aprendamos a evaluar términos.

Definición 2.7.10. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, α una $\mathfrak{A}$-asignación y $t(\vec{x})$ un $\mathcal{L}$-término, donde $t(\vec{x})$ abrevia $t(x_1, \ldots, x_n)$. Definimos la evaluación de t en $\mathfrak{A}$ respecto a α, en símbolos,

$$t^{\mathfrak{A}}[\alpha],$$

por inducción en la construcción de t:

1. Si t es la variable x, $t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = x^{\mathfrak{A}}[\alpha] = \alpha(x)$.
2. Si t es el símbolo de constante c, $t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = c^{\mathfrak{A}}[\alpha] = c^{\mathfrak{A}}$.

3. Si t tiene la forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, donde f es un símbolo de n-función y los t_i son términos,
$$t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = (f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}}[\alpha] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]).$$

Es ciertamente engorroso escribir la interprtación de términos como recién lo hicimos por la gran cantidad de símbolos $t, t_i, \mathfrak{A}, \alpha$, etc. En la medida de lo posible, cuando no haya posibilidad de confusión prescindiremos de $\mathfrak{A}$ y/o α. Igualmente, en ocasiones sólo daremos los valores relevantes de una asignación, es decir, los valores de la asignación en las variables que realmente nos preocupan.

Ejemplo 2.7.11. Sea $\mathfrak{M}$ un modelo con universo $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tal que,

- El símbolo de constante a se interpreta como 3, $a^{\mathfrak{M}} = 3$.
- El símbolo de constante b se interpreta como 4, $b^{\mathfrak{M}} = 4$.
- El símbolo de 1-función se interpreta como una función en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que da 0 si el argumento es un número par y 1 en otro caso.

Ahora podemos interpretar o evaluar todos los términos que contengan esos símbolos. Un modelo proporciona una forma sistemática de evaluar los términos del lenguaje.

- La interpretación de $f(a)$ se escribe $f^{\mathfrak{M}}(a)$. Calculamos,
$$f^{\mathfrak{M}}(a) = f^{\mathfrak{M}}(a^{\mathfrak{M}}) = f^{\mathfrak{M}}(3) = 1.$$
- La interpretación de $f(b)$ se escribe como $f^{\mathfrak{M}}(b)$. Calculamos,
$$f^{\mathfrak{M}}(b) = f^{\mathfrak{M}}(b^{\mathfrak{M}}) = f^{\mathfrak{M}}(4) = 0.$$

Ejemplo 2.7.12. En la teoría de grupos con el lenguaje $\mathcal{L} = \{e, *\}$ tenemos los términos $t_1 = e$, $t_2 = e * e$, $t_3 = x$, $t_4 = e * x$, $t_5 = z * w$.

Considere la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{G} = \langle \mathbb{Z}, 1, + \rangle$, donde la suma usual en $\mathbb{Z}$ interpreta a $*$, el 1 interpreta a e, y la $\mathfrak{G}$-asignación $\alpha : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como (sólo se muestran los valores relevantes)

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 10 \\ \alpha(y) &= 1 \\ \alpha(z) &= 20 \\ \alpha(w) &= 2^{100}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} t_1^{\mathfrak{G}}[\alpha] &= 1 \\ t_2^{\mathfrak{G}}[\alpha] &= 1+1 \\ t_3^{\mathfrak{G}}[\alpha] &= 10 \\ t_4^{\mathfrak{G}}[\alpha] &= 1+10 \\ t_5^{\mathfrak{G}}[\alpha] &= 20+2^{100}. \end{aligned}$$

«Sin dulzura ni aroma». Decíase de alguien que no es grato, ya un macehual al que se expulsaba, y se le decía: vete, sal de la ciudad, porque la ciudad te considera sin dulzura ni aroma; ya un señor, al que se decía: no se te considera dulce ni fragante.

Ejemplo 2.7.13. En el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$ con la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ y con la interpretación usual, tenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} r &= x_1 \cdot x_2 + x_3 \\ s &= x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 \\ t &= x_4 \cdot x_5 + 1 \\ u &= x_4 \cdot x_5 + (r \cdot s + 0) \end{aligned}$$

Sea $\alpha : Var \longrightarrow \mathbb{N}$, definida como $\alpha(x_i) = i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} r^{\mathfrak{N}}[\alpha] &= 1 \cdot 2 + 3 \\ s^{\mathfrak{N}}[\alpha] &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ t^{\mathfrak{N}}[\alpha] &= 4 \cdot 5 + 1 \\ u^{\mathfrak{N}}[\alpha] &= 4 \cdot 5 + (5 \cdot 2 + 0). \end{aligned}$$

En ocasiones se usa la siguiente notación: si s, t son términos y x es una variable, mediante $s[x/t]$ denotamos el resultado de remplazar o sustituir todas y cada una de las ocurrencias de x en s por t.

Ejemplo 2.7.14. Si remplazamos toda aparición de x por a en el término $f(x, y)$, obtenemos $f(a, y)$. Escribimos esto, en ocasiones, como $f(x, y)[x/a] = f(a, y)$. A continua-

ción, más ejemplos,

$$f(x,y,a) = f(x,y,a)[x/y] = f(y,y,a) \qquad (x+y)[x/3] = 3+y$$
$$f(y,y,a)[y/b] = f(b,b,a) \qquad (x+y)[y/3] = x+3.$$

Definición 2.7.15. Si φ es un fórmula, t un término y x una variable, mediante $\varphi[x/t]$ denotamos el resultado de remplazar o sustituir toda ocurrencia libre de x en φ por t.

La sustitución en fórmulas es más complicada que la sustitución en términos, porque si una variable está acotada por un cuantificador, la sustitución no tiene efecto en la variable. Podemos pensar que el cuantificador «protege» a la variable. En la fórmula $\exists\, x(x+y=100)$ con la y no hay problema, se puede sustituir por un número,

$$\exists\, x(x+y=100)[y/25] = \exists\, x(x+25=100).$$

Una vez que conocemos el arte de evaluar términos, ninguna dificultad presenta la «evaluación» de fórmulas en una estructura dada, lo cual nos permite decidir si la fórmula es verdadera o no en dichas condiciones. Primero otorgamos un valor de verdad a las fórmulas atómicas, es decir, establecemos si son verdaderas (V) o falsas (F) respecto a una asignación. Mediante $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi)$ denotamos el valor de verdad de la fórmula φ en la estructura $\mathfrak{A}$ respecto a la asignación α; empezamos con φ primitiva.

Definición 2.7.16. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación.

1. Para cualesquier $\mathcal{L}$-términos t, u,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(t=u) = \begin{cases} V, & \text{si } t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = u^{\mathfrak{A}}[\alpha] \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Para todo símbolo de n-relación R y cualesquier $\mathcal{L}$-términos $t_1, \ldots, t_n$,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(R(t_1,\ldots,t_n)) = \begin{cases} V, & \text{si } (t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha],\ldots,t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que en (1) y (2) $t^{\mathfrak{A}}[\alpha]$, $u^{\mathfrak{A}}[\alpha]$, $t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha]$, …, $t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]$ son elementos del universo y como $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura debemos conocer la interpretación de R en $\mathfrak{A}$, con lo que podemos decidir si una n-ada pertenece a $R^{\mathfrak{A}}$ o no.

Ejemplo 2.7.17. Suponga que estamos hablando sobre libros y que disponemos de un lenguaje formal que consiste en los símbolos de 1-predicado N, E, donde $N(x)$ significa que «el libro x está escrito en noruego», $E(x)$ expresa que x está escrito en español. El modelo $\mathfrak{M}$ tiene un conjunto de libros como universo, N se interpreta

como los libros en noruego, E como los libros en español. Si a es un símbolo de constante también en el lenguaje y lo interpretamos como un libro en noruego, la fórmula $N(a)$ es verdadera en $\mathfrak{M}$, intuitivamente, porque $a^{\mathfrak{M}} \in N^{\mathfrak{M}}$. Si interpretamos a como un libro en español, la fórmula $E(a)$ es verdadera en $\mathfrak{M}$, mientras que $N(a)$ es falsa.

Ejemplo 2.7.18. Sea $\mathcal{L} = \{e, *, R, f\}$ una expansión del lenguaje de la teoría de grupos con un símbolo de 2-relación R y de 1-función f, $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, 0, +, R^{\mathfrak{Q}}, f^{\mathfrak{Q}} \rangle$ los racionales con la suma usual, $R^{\mathfrak{Q}}(x, y) = x \leq y$, $f^{\mathfrak{Q}}(x) = x + 1$, $e^{\mathfrak{A}} = 0$. Tenemos la siguiente $\mathfrak{Q}$-asignación: $\alpha : Var \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida mediante

$$\alpha(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{si } i \neq 0 \\ 0, & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Considere los siguientes términos:

$$\begin{aligned} r =& e * f(x_1) * f(x_2) \\ s =& f(x_2) * e * f(x_1) \\ t =& f(x_2) * f(x_3) * f(x_4) \\ u =& f(x_4) * f(x_2) * f(x_3) \end{aligned}$$

Se sigue que $\mathcal{A}_{\mathfrak{Q},\alpha}(r = s) = V$ pues

$$\begin{aligned} r^{\mathfrak{Q}}[\alpha] =& 0 + \frac{1}{1} + 1 + \frac{1}{2} + 1 \\ =& \frac{1}{2} + 1 + 0 + \frac{1}{1} + 1 \\ =& s^{\mathfrak{Q}}[\alpha]. \end{aligned}$$

En cambio, $\mathcal{A}_{\mathfrak{Q},\alpha}(r = t) = F$; $\mathcal{A}_{\mathfrak{Q},\alpha}(R(r, s)) = V$ pues $r^{\mathfrak{Q}}[\alpha] \leq s^{\mathfrak{Q}}[\alpha]$.
Si calculamos

$$t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + 1\right)$$

deducimos $\mathcal{A}_{\mathfrak{Q},\alpha}(R(t, r)) = F$, pero $\mathcal{A}_{\mathfrak{Q},\alpha}(R(u, s)) = V$.

Ya somos capaces de determinar $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi)$ para cualquier fórmula atómica φ; lo natural y necesario es definirla para toda fórmula. La extensión de $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}$ a fórmulas que sólo incluyan $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ no trae consigo ninguna dificultad. No acontece lo

mismo para las fórmulas de la forma $\exists x\varphi$ o $\forall x\varphi$. Es indispensable tratar estos casos con mayor atención. Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar la dificultad.

Ejemplo 2.7.19. Considere $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ como campo (en el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$) y los enunciados

$$\begin{aligned}\varphi \equiv &\forall x \forall y (x + y = y + x).\\ \psi \equiv &\forall x \exists y (x = 0 \vee x \cdot y = 1).\\ \theta \equiv &(0 + 1 = 1).\end{aligned}$$

Es claro que todos estos enunciados debieran ser ciertos en $\mathfrak{R}$, sin importar qué valores tomen x, y. Más aún, para θ no requerimos siquiera de una asignación, pues no involucra variables.

En el caso de φ, éste se debe cumplir para cualquier asignación a x y y. Para ψ, dado un valor de x debemos encontrar un valor de y (que depende de x); pero una vez que lo hayamos encontrado, el enunciado es cierto. En el caso de θ, es obvio que no interviene α.

Tomemos $\varphi \equiv \exists x(x + x = z)$. Supongamos que $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$. Queremos entonces un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + x = z$. Es cierto que $2x = z$, así que $x = z/2$. Considere cualquier $\mathfrak{R}$-asignación α. El valor importante de α ocurre en z. Definamos una nueva asignación β

$$\beta(y) = \begin{cases} \alpha(y), & \text{si } y \neq x \\ \alpha(z)/2, & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Es claro que $\mathfrak{R} \models (x + x = z)[\beta]$. Note que eliminamos el cuaantificador $\exists x$ y tratamos con una fórmula «menos» compleja, en la que x es libre, pllo dependemos de una asignación.

Más aún, considere $\psi \equiv \exists x(x + x = 0)$. Ahora no dependemos de una variable z como en el caso anterior. Sin embargo, es claro que si tomamos $x = 0$, el enunciado es cierto en $\mathfrak{R}$. Por consiguiente, si α es cualquier $\mathfrak{R}$-asignación y definimos

$$\beta(y) = \begin{cases} \alpha(y), & \text{si } y \neq x \\ 0, & \text{si } y = x, \end{cases}$$

tenemos $\mathfrak{R} \models ((x + x) = 0)[\beta]$.

Hemos eliminado el cuantificador $\exists x$ y tratamos con una fórmula más simple: $(x + x = 0)$, pero que tiene a x como variable libre. Observe que, en la fórmula original, x no era libre, por ello no es realmente importante el valor de α en x, pero sí en el resto de las variables libres de la fórmula, aunque no hay tales. Lo más importante es que en la fórmula más simple, donde x aparece libre, en realidad x «no es tan libre», pues proviene de una fórmula donde estaba acotada. Más aún, esta fórmula

original, en buena medida, sugiere como determinar una evaluación que de a x el valor adecuado.

Con esta idea en mente definimos $\alpha^{x/a}$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\forall x\varphi)$ y $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\exists x\varphi)$. De hecho, puesto que podemos definir $\forall x\varphi$ en términos de $\exists x\varphi$, sólo nos preocupa definir $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}$ para $\exists x\varphi$. Si α es una $\mathfrak{R}$-asignación y a es un elemento de $\mathbb{R}$, definimos $\alpha^{x/a} : Var \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\alpha^{x/a}(z) = \begin{cases} \alpha(z), & \text{si } z \neq x \\ a, & \text{si } z = x. \end{cases}$$

Por ejemplo, considere $\gamma \equiv \exists x(z + x = z)$. Es claro que para que γ sea cierta en $\mathfrak{R}$, x debe ser cero; por ello, para cualquier asignación α, $\alpha^{x/0}$ debe hacer cierta a γ en $\mathfrak{R}$.

Nuestra extensión de $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}$ a toda fórmula se realiza a continuación.

Definición 2.7.20. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, α una $\mathcal{L}$-asignación, φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas y x una variable.

1. $$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\neg\varphi) = \begin{cases} V, & \text{si } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = F \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. $$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} V, & \text{si } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = V \text{ o } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\psi) = V \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. $$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\exists x\varphi) = \begin{cases} V, & \text{si para alguna } a \in A \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha^{x/a}}(\varphi) = V \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Labrada tiene la entraña. Dícese de un artista, como aquel que trabaja la pluma, que hace bien su trabajo, lo diseña bien, de modo que pronto sale, se vende.

Definición 2.7.21. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, α una $\mathfrak{A}$-asignación y φ una $\mathcal{L}$-fórmula.

1. $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ (se lee: α satisface φ en $\mathfrak{A}$) si $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = V$.

2. $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$ (se lee: α no satisface φ en $\mathfrak{A}$) si $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = F$.

Con estas definiciones, el siguiente lema es inmediato.

Lema 2.7.22. *2.1.24 Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, α una $\mathcal{L}$-asignación y φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas.*

1. *$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\alpha]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$.*

2. $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[\alpha]$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ *o* $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$.

3. $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[\alpha]$ *si y sólo si para alguna* $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$.

□

En el caso (3), se dice que el elemento a tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$ atestigua φ en $\mathfrak{A}$ o que a es un testigo de φ en $\mathfrak{A}$.

Ahora podemos extender nuestra noción de satisfacibilidad $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ a cualquier tipo de fórmula, valiéndonos de la definición de $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge$ y $\forall$ en términos de $\vee, \neg$ y $\exists$.

Definición 2.7.23.

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\forall x \varphi) = \begin{cases} V, & \text{si para toda } a \in A, \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha^{x/a}}(\varphi) = V \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} V, & \text{si } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = V \text{ y } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\psi) = V \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} V, & \text{si } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = F \text{ o } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\psi) = V \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} V, & \text{si } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = V \text{ y } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\psi) = V \text{ o} \\ & \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\psi) = F \text{ y } \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\alpha}(\varphi) = F \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 2.7.24. *Sean* $\mathcal{L}$ *un lenguaje,* $\mathfrak{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura,* α *una* $\mathcal{L}$*-asignación y* φ, ψ $\mathcal{L}$*-fórmulas.*

1. $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$ *o* $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$

2. $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ *y* $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$

3. $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$

4. $\mathfrak{A} \models (\forall x \varphi)[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad$ *para toda* $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 2.7.25. Sean $\psi \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \to R(z) \wedge R(y))$, $\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $A = \{a,b,c,d\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$, $R = \{a,b,d\}$, y $\alpha : \{x,y,z\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$, con $\alpha(x) = a$, $\alpha(y) = b$ y $\alpha(z) = d$.

¿Se cumple $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$?

Queremos averiguar si $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \to R(z) \wedge R(y))[\alpha]$. El primer paso es tomar un elemento arbitrario en A pues la fórmula ψ se inicia con el cuantificador $\forall x$. Sea $u \in A$, y ahora debemos verificar

$$\mathfrak{A} \models \exists y \exists z (P(x,y) \to R(z) \wedge R(y))[\alpha^{x/u}],$$

(u es un elemento arbitrario de A pero fijo).

A continuación debemos encontrar $v \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \exists z (P(x,y) \to R(z) \wedge R(y))[\alpha^{x/u,y/v}].$$

Finalmente, debemos hallar $w \in A$ con

$$\mathfrak{A} \models (P(x,y) \to R(z) \wedge R(y))[\alpha^{x/u,y/v,z/w}].$$

Recordemos que u es un elemento arbitrario. Si $v \neq u$, el antecedente es falso y podemos tomar como v, w cualesquier elementos de A ($v \neq w$). Así que dada la x, tomamos como y cualquier elemento de A distinto de x y la fórmula se cumple en $\mathfrak{A}$ (como w tomamos cualquier elemento de A).

Ejemplo 2.7.26. Sean $\theta \equiv \forall x \exists y (R(x) \wedge R(z) \wedge \neg P(x,y))$ y $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{A}} \rangle$, $A = \{0,1,\ldots,9\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{0,2,4,6,8\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{(0,0),(0,2),\ldots,(0,8)\}$ y $\alpha : \{x,y,z\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$, con $\alpha(x) = 1, \alpha(y) = 2, \alpha(z) = 3$.

La pregunta es ¿$\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$?

Primero tomamos una $a \in A$ arbitraria (por la presencia del cuantificador $\forall x$); así que a puede ser $0, 1, \ldots, 9$. Queremos averiguar si ocurre que $\mathfrak{A} \models \exists y\ (R(x) \wedge R(z) \wedge \neg P(x,y))[\alpha^{x/a}]$. Debemos encontrar $b \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models (R(x) \wedge R(z) \wedge \neg P(x,y))[\alpha^{x/a,y/b}].$$

Dado que $\alpha(z) = 3$, esto es equivalente a

$$\mathfrak{A} \models (R(x) \wedge R(3) \wedge \neg P(x,y))[\alpha^{x/a,y/b}].$$

Es claro que sea cual sea la a (o la b) esta fórmula no se cumple en $\mathfrak{A}$, por lo que $\mathfrak{A} \not\models \theta[\alpha]$.

Ejemplo 2.7.27. En el lenguaje de la teoría de anillos o campos $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ considere $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ y $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ con las interpretaciones usuales, y las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi \equiv & \forall x (x \cdot x + 1 \neq 0) \\ \psi \equiv & \forall x \exists y (x + y = 0) \\ \theta \equiv & \forall x \exists y (y \cdot y = x) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} &\models \varphi[\alpha] && \text{para cualquier } \mathfrak{Q}\text{-asignación } \alpha \\ \mathfrak{R} &\models \varphi[\alpha] && \text{para cualquier } \mathfrak{R}\text{-asignación } \alpha \\ \mathfrak{C} &\not\models \varphi[\alpha] && \text{para cualquier } \mathfrak{C}\text{-asignación } \alpha \end{aligned}$$

donde el último caso ocurre pues no es cierto que para toda $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{C} \models (x \cdot x + 1 \neq 0)[\alpha^{x/z}]$; por ejemplo, $z = i$ y entonces $i \cdot i = i^2 = -1$ e $i^2 + 1 = 0$.

Es claro que $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ y $\mathfrak{C}$ son modelos de ψ pues en estos campos cualquier elemento tiene inverso aditivo. ¿Qué ocurre con θ? Observe que θ afirma que (vista en cualquiera de las tres estructuras) cualquier elemento tiene raíz cuadrada. De esta traducción se sigue sin duda que $\mathfrak{C} \models \theta[\alpha]$ para cualquier α y que $\mathfrak{R} \not\models \theta[\alpha]$, $\mathfrak{Q} \not\models \theta[\alpha]$ para toda asignación α.

Por ejemplo, para decidir si $\mathfrak{R} \models \theta[\alpha]$, debemos verificar que para toda $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathfrak{R} \models (y \cdot y = x)[\alpha^{x/a, y/b}],$$

lo cual no es cierto si tomamos $a < 0$ en $\mathbb{R}$, por lo que $\mathfrak{R} \not\models \theta$ y en forma similar $\mathfrak{Q} \not\models \theta$.

Ejemplo 2.7.28. Considere la estructura $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ del lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ y la fórmula $\theta \equiv \forall x \exists y (x + y = z)$. Averigüemos qué ocurre con θ en $\mathfrak{Q}$. Note que $\mathfrak{Q} \models \theta$ si y sólo si para toda $a \in \mathbb{Q}$

$$\mathfrak{Q} \models (\exists y (x + y = z))[\alpha^{x/a}],$$

que se cumple si y sólo si para alguna $b \in \mathbb{Q}$,

$$\mathfrak{Q} \models (x + y = z)[\alpha^{x/a, y/b}].$$

Si α es tal que $\alpha(z) = a + b$, ciertamente

$$\mathfrak{Q} \models (x + y = z)[\alpha^{x/a,y/b}],$$

es decir,

$$\mathfrak{Q} \models \theta[\alpha],$$

por lo que basta tomar $b = \alpha(z) - a$, que siempre es un racional. Así que $\mathfrak{Q} \models x + y = z[\alpha^{x/a,y/b}]$, donde $b = \alpha(z) - a$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{Q} \models \theta[\alpha]$$

para toda α.

No llegues a su jilote, no llegues a su mazorca. Esta palabra se interpreta: cuando alguien muy distinguido, muy rico, conserva siempre sus bienes y riqueza, o tal vez su señorio aquí en la tierra.

Ejemplo 2.7.29. Trabajemos con el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, al cual pertenecen las fórmulas

$$\varphi \equiv \forall\, x(x + z \leq y + z)$$
$$\theta \equiv \forall\, y \forall\, x(z + 1 \leq x + y + 1).$$

El reto es averiguar cómo se comportan estas fórmulas en las $\mathcal{L}$-estructuras

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$$
$$\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$$
$$\mathfrak{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$$

donde P son los números naturales pares y los $\mathcal{L}$-símbolos se interpretan en forma natural en las tres estructuras.

1. Para φ, note que $\mathfrak{N} \models \varphi[\alpha]$ si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$n + \alpha(z) \leq \alpha(y) + \alpha(z),$$

lo cual se cumple si y sólo si

$$\alpha(y) + \alpha(z) \geq n + \alpha(z)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible para cualquier asignación α. Se sigue que

$$\mathfrak{N} \not\models \varphi[\alpha].$$

Con un razonamiento similar deducimos que $\mathfrak{P} \not\models \varphi[\alpha]$ y que $\mathfrak{Z} \not\models \varphi[\alpha]$.

2. Respecto a θ, observe que $\mathfrak{N} \models \theta[\alpha]$ si y sólo si para cualesquier $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha(z) + 1 \leq n + m + 1$, lo cual se cumple si y sólo si $\alpha(z) = 0$ pues si $\alpha(z) = l > 0$, entonces $l + 1 \nleq 0 + 0 + 1$. En consecuencia, $\mathfrak{N} \models \theta[\alpha]$ si y sólo si α es una $\mathfrak{N}$-asignación que cumple con $\alpha(z) = 0$.

En $\mathfrak{P}$ ocurre lo mismo.

En $\mathfrak{Z}$, si $\alpha(z) = l$:

Caso 1. $l < 0$, entonces $l \leq m + n$ para cualesquier $m, n \in \mathbb{Z}$, lo cual es falso pues podemos tomar $m, n \leq l$.

Caso 2. $l > 0$. En esta situación $l \leqq m + n$ para cualesquier $m, n \in \mathbb{Z}$, otra vez incorrecto pues no se cumple si $m, n < 0$.

Caso 3. $l = 0$. Aquí $0 \leq m + n$ no se cumple para cualesquier $m, n \in \mathbb{Z}$.

En resumen, $\mathfrak{Z} \not\models \theta[\alpha]$ para toda α.

Definición 2.7.30. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas.

1. φ es lógicamente válida, en símbolos $\models \varphi$, si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α,
$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha].$$

2. Las fórmulas φ, ψ son lógicamente equivalentes, en símbolos $\varphi \equiv \psi$, si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α se cumple
$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\alpha].$$

3. La fórmula ψ es una consecuencia lógica de φ, en símbolos $\varphi \models \psi$, si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α es cierto que
$$\text{si} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha], \qquad \text{entonces} \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\alpha].$$

4. La fórmula ψ es una consecuencia lógica de Γ, en símbolos $\Gamma \models \psi$, si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α, si $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ para cada $\varphi \in \Gamma$, entonces $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$.

5. El conjunto Γ es consistente si para alguna $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y alguna $\mathfrak{A}$-asignación α, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

En general, si Γ es un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y α es una $\mathfrak{A}$-asignación, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\alpha]$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

Ejemplo 2.7.31. Verifiquemos que la fórmula $\varphi \equiv \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ es válida.

Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura arbitraria, donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje con $P \in \mathcal{L}$. Se sigue que P se interpretó en $\mathfrak{M}$ como $P^{\mathfrak{M}} \subseteq M$, pero realmente no sabemos cómo es, ni siquiera qué es M. Para cada $m \in M$ debe cumplirse que $m \in P^{\mathfrak{M}}$ o $m \notin P^{\mathfrak{M}}$, lo que nos indica que para cada $m \in M$, $\mathfrak{M} \models P(m) \vee \neg P(m)$, dando paso a la veracidad de φ en $\mathfrak{M}$, pues $P^{\mathfrak{M}} \subseteq M$ y necesariamente m pertenece a $P^{\mathfrak{M}}$ o no, y como $\mathfrak{M}$ se tomo arbitrariamente, concluimos que φ es lógicamente válida.

Ejemplo 2.7.32. Confirmemos que $\varphi \equiv \exists x P(x)$ y $\psi \equiv \forall x \neg Q(x)$ son satiafacibles. Debemos encontrar una estructura y una asignación que satisfagan a φ y ψ. Sea $M = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{M} = \langle M, P^{\mathfrak{M}}, Q^{\mathfrak{M}} \rangle$, $P^{\mathfrak{M}} = \{a, d\}$, $Q^{\mathfrak{M}} = \varnothing$.

Es claro que $\mathfrak{M} \models \exists x P(x)$, pues $a \in M$ y $a \in P^{\mathfrak{M}}$. En cambio, ningún elemento de M pertenece a $Q^{\mathfrak{M}}$, lo que corrobora que $\mathfrak{M} \models \forall x \neg Q(x)$.

Ejemplo 2.7.33. Corroboremos que las fórmulas $\varphi_1 \equiv P(a) \wedge P(b)$, $\varphi_2 \equiv \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, y $\varphi_3 \equiv \exists x Q(x)$ son satisfacibles.

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}}, a^{\mathfrak{A}}, b^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $A = \mathbb{N}$, $P^{\mathfrak{A}}$ son los números pares, $Q^{\mathfrak{A}}$ los números impares, $a^{\mathfrak{A}} = 10$, $b^{\mathfrak{A}} = 12$. El lector puede verificar que con esta interpretación $\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.

Ejemplo 2.7.34. Mostremos que $\varphi \equiv (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ es válida.

Debemos confirmar que $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$. Dado que está fórmula es de la forma $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, debemos constatar que $\mathfrak{A} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2$, para lo que

basta probar que si $\mathfrak{A} \models \psi_1$, también ocurre $\mathfrak{A} \models \psi_2$; si $\mathfrak{A} \not\models \psi_1$, automáticamente $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Así, supongamos que $\mathfrak{A} \models (\forall x P(x) \land \forall x Q(x))$ y debemos probar que $\mathfrak{A} \models \forall x (P(x) \land Q(x))$, para lo cual tomamos $a \in A$ y constatamos que $\mathfrak{A} \models P(a) \land Q(a)$. Pero sabemos que $\mathfrak{A} \models (\forall x P(x) \land \forall x Q(x))$, lo que nos indica que $\mathfrak{A} \models (P(a) \land Q(a))$ (tomando x como a para ambos conyuntos). Esto es precisamente lo que queriamos demostrar.

Ejemplo 2.7.35. Probemos que $\varphi \equiv \forall x (P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$ no es válida.

Basta encontrar una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Sea $A = \mathbb{N}$, $P^{\mathfrak{A}}$ los pares, $Q^{\mathfrak{A}}$ los impares. Es claro que

$$\mathfrak{A} \models \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

pues cualquier número natural es par o impar. En cambio,

$$\mathfrak{A} \not\models (\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$$

dado que no es cierto que todo natural sea par o que todo natural sea impar. Así, el antecedente de φ es V y el consecuente es F, lo que da lugar a que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Ejemplo 2.7.36. Sea $\varphi \equiv \forall x R(x,x) \to \forall x \exists y R(x,y)$ es válida.

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura arbitraria. Otra vez, φ es una condicional, así que basta considerar el caso en que el antecedente de φ se cumple en $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \forall x R(x,x).$$

Debemos confirma que el consecuente se cumple en $\mathfrak{A}$. Tomamos $a \in A$ arbitrario, y por la validez del antecedente de φ en $\mathfrak{A}$ podemos afirmar que

$$\mathfrak{A} \models R(a,a)$$

Se sigue que si en el consecuente tomamos $y = a$, se valida

$$\mathfrak{A} \models R(a,a),$$

En general, dado $x \in A$, tomamos $y \in A$, $x = y$, y se cumple $\mathfrak{A} \models R(x,y)$. Hemos probado que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Proposición 2.7.37. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para cualesquier conjuntos Γ y Δ de $\mathcal{L}$-fórmulas y cualesquier $\mathcal{L}$-fórmulas φ, ψ, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $\varphi \equiv \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi \leftrightarrow \psi$.
2. $\varphi \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi$.
3. $\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \varnothing \models \psi$.
4. *Si* $\Gamma \subseteq \Delta$ *y* $\Gamma \models \psi$, *entonces* $\Delta \models \psi$.
5. *Para cualesquier* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *e* $i \leq n$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   a) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$
   b) $\Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\} \models \psi$
   c) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\} \models \varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$

Demostración. 1. Si $\varphi \equiv \psi$, debemos cerciorarnos de $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. Para que esto ocurra, para cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α debe ser cierto que $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\alpha]$. A su vez, para que esto se realice debemos verificar que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$, lo cual es verdadero en virtud de la definición de $\varphi \equiv \psi$. La recíproca se prueba en forma similar.

2. Supongamos que $\models \varphi \to \psi$. Por definición, esto quiere decir que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α es cierto que $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[\alpha]$, lo cual nos lleva a $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$, que de inmediato nos conduce a $\varphi \models \psi$. La recíproca se prueba en forma análoga.

3. Supongamos que $\models \psi$. Por definición, para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α, $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$. Pero cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ y toda $\mathfrak{B}$-asignación γ cumplen con $\mathfrak{B} \models \varnothing$, de lo contrario, debería existir una fórmula $\theta \in \varnothing$ con $\mathfrak{B} \not\models \theta[\gamma]$, lo cual no puede ocurrir. Así que, $\varnothing \models \psi$.

Ahora pensemos que $\varnothing \models \psi$, y sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación. Debemos verificar que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$. Por lo recién visto, $\mathfrak{A} \models \varnothing[\alpha]$, así que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$.

4. Para corroborar $\Delta \models \psi$, sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que para toda $\theta \in \Delta$, $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$. Puesto que $\Gamma \subseteq \Delta$, se cumple que $\mathfrak{A} \models \sigma[\alpha]$ para toda $\sigma \in \Gamma$ y como $\Gamma \models \psi$, entonces $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$, así que $\Delta \models \psi$.

5. (a)⇒(b). Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\}[\alpha]$. Por definición, esto significa que $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$ para cada $\theta \in \Gamma$ y que $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\alpha]$ para $i = 1, \ldots, n$. Eso nos conduce, por (a), a que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$. En consecuencia, $\Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\} \models \psi$.

(b)⇒(c). Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}[\alpha]$. Esto implica que $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$ para cada $\theta \in \Gamma$ y $\mathfrak{A} \models \varphi_j[\alpha]$ $(j = 1, \ldots, i-1)$. Debemos corroborar que $\mathfrak{A} \models (\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi)[\alpha]$. Si $\mathfrak{A} \not\models (\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n)[\alpha]$, terminamos. Así, podemos suponer que $\mathfrak{A} \models (\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n)[\alpha]$. De esto y la hipótesis se sigue que $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)[\alpha]$; por (b) obtenemos $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$. En resumen, $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\} \models \varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$.

(c)⇒(a). Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\ [\alpha]$. En particular, $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\} (i \leq n)$. De (c) deducimos $\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi$. Puesto que $\mathfrak{A} \models \{\varphi_i, \ldots, \varphi_n\}$, podemos decir $\mathfrak{A} \models \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ así que $\mathfrak{A} \models \psi$, lo que se quería demostrar. ❐

Proposición 2.7.38. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y ψ una $\mathcal{L}$-fórmula. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $\Gamma \models \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *es inconsistente.*
2. $\Gamma \models \neg\psi$ *si y sólo si* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *es inconsistente.*
3. *Si* Γ *es consistente, entonces* $\Gamma \cup \{\psi\}$ *o* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *es consistente.*

Aquí usamos «inconsistente» en el sentido de que el conjunto dado no es consistente, no existe una estructura en la que se cumplan todos sus miembros simultáneamente. Cuando veamos la defínción formal de prueba, inconsistente adquirirá otro significado, aunque después veremos que en realidad, ambas definiciones coinciden.

Demostración. 1. Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es inconsistente, es decir, no existen una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una $\mathfrak{A}$-asignación α con $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}[\alpha]$. Por lo que si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que $\mathfrak{A} \models \theta[\alpha]$ para cada $\theta \in \Gamma$, se debe cumplir $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi[\alpha]$, lo que es equivalente a $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$. En este caso, $\Gamma \models \psi$. Si Γ mismo es inconsistente, es obvio que $\Gamma \models \psi$ pues no existen una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una $\mathfrak{A}$-asignación α que lo contradigan, dada la inconsistencia de Γ. La recíproca es similar.

2. Supongamos que $\Gamma \models \neg\psi$ y que $\Gamma \cup \{\psi\}$ es consistente. Entonces existen una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{C}$ y una $\mathfrak{C}$-asignación γ tales que $\mathfrak{C} \models \theta[\gamma]$ para toda $\theta \in \Gamma$ y $\mathfrak{C} \models \psi[\gamma]$. Pero estas $\mathfrak{C}$ y γ contradicen nuestra hipótesis $\Gamma \models \neg\psi$. Por lo tanto, $\Gamma \cup \{\psi\}$ debe ser inconsistente. La necesidad se prueba en forma análoga.

3. Sabemos que Γ es consistente. Dadas una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ y una $\mathfrak{B}$-asignación η con $\mathfrak{B} \models \theta[\eta]$ para toda $\theta \in \Gamma$, necesariamente ocurre $\mathfrak{B} \models \psi[\eta]$ o $\mathfrak{B} \models \neg\psi[\eta]$, de donde se sigue lo que se quiere demostrar. ❐

Existen muchos ejemplos de validez, equivalencia y consecuencia lógica asociadas a las propiedades de los cuantificadores. A continuación presentamos algunas, tal vez las más importantes.

Teorema 2.7.39. *Las siguientes son equivalencias o consecuencias lógicas.*

1. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
2. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
3. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
4. $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \models \forall x(\varphi \vee \psi)$

5. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$

6. $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

7. $\forall x(\varphi \to \psi) \models \forall x\varphi \to \forall x\psi$

8. $\forall x(\varphi \to \psi) \models \exists x\varphi \to \exists x\psi$

9. $\forall x\varphi \models \exists x\varphi$

10. $\varphi \models \exists x\varphi$

11. $\forall x\varphi \models \varphi$

12. $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$

13. $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$

14. $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$

Demostración. Demostramos algunos de los incisos y el resto queda como ejercicio. Usaremos la proposición 2.7.38.

1. Debemos verificar que $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$. Sean pues $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación.

Primero supongamos que $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\varphi[\alpha]$. En estas circunstancias $\mathfrak{A} \not\models \exists x\varphi[\alpha]$, es decir, para ninguna $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$, por lo que para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha^{x/a}]$, esto es, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\alpha^{x/a}]$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{A} \models \forall x\neg\varphi[\alpha].$$

Para la recíproca, supongamos que $\mathfrak{A} \models \forall x\neg\varphi$; por definición, para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\alpha^{x/a}]$, es decir, $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha^{x/a}]$, así que para ninguna $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$; esto es, no existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$, de modo que $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\varphi[\alpha]$.

5. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[\alpha]$; debemos mostrar que $\mathfrak{A} \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[\alpha]$, es decir, $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha]$ y $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\alpha]$.

Puesto que $\mathfrak{A} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[\alpha]$, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\alpha^{x/a}]$. Por definición, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$ y $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha]$ y $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\alpha]$. Note que la recíproca no es necesariamente cierta (¡encuentre un contraejemplo!)

7. Sabemos que $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)[\alpha]$; así, es cierto que para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[\alpha^{x/a}]$, por lo que

$$\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha^{x/a}] \tag{*}$$

o

$$\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]. \tag{**}$$

Queremos probar $\mathfrak{A} \models (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[\alpha]$, es decir, $\mathfrak{A} \not\models \forall x\varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$. Cuando (*) no se cumple para ninguna $a \in A$, esto quiere decir que para toda $a \in A$,

$\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$, es decir, $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$. Si para alguna $a \in A$ se cumple (*), entonces $\mathfrak{A} \not\models \forall x\varphi[\alpha]$ y terminamos.

9. Suponga que $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[\alpha]$, así que para toda $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$; dado que $A \neq \varnothing$, necesariamente existe algún $a \in A$ con $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$. Se sigue que existe $a \in A$ con $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$; es decir, $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha]$.

10. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ y probemos $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha]$. Debemos verificar que existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$. Sabemos que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$; cuando x no es libre en φ, añadirle $\exists x$ a φ no cambia nada, por lo que

$$\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha].$$

Si x es libre en φ, ya que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$, tomamos $\alpha(x) \in A$ y se cumple

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/\alpha(x)}],$$

es decir,

$$\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha].$$

13. Debemos cerciorarnos de $\models \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación y supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists x\exists y\varphi[\alpha]$; es decir, existen $a, b \in A$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a,y/b}]$. Pero, por definición, esto nos conduce a $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[\alpha^{y/b}]$ y de ahí a $\mathfrak{A} \models \exists y\exists x\varphi[\alpha]$. La otra dirección es similar. ❐

Con cierta condición, algunas de las anteriores consecuencias lógicas se convierten en equivalencias lógicas.

Proposición 2.7.40. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, φ, ψ $\mathcal{L}$-fórmulas y x una variable que no es libre en φ. Entonces:*

1. $\varphi \equiv \exists x\varphi$
2. $\varphi \equiv \forall x\varphi$
3. $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \vee \forall x\psi$
4. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \wedge \exists x\psi$
5. $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \forall x\psi$
6. $\forall x(\psi \to \varphi) \equiv \exists x\psi \to \varphi$
7. $\exists x(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \exists x\psi$
8. $\exists x(\psi \to \varphi) \equiv \forall x\psi \to \varphi$

Demostración. 2. Por el teorema 2.7.39 ya sabemos que $\forall x\varphi \models \varphi$. Resta probar que $\varphi \models \forall x\varphi$. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación tales que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$, y $a \in A$; entonces $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$ ya que x no es libre en φ. Se sigue que $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$.

3. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \forall x\psi[\alpha]$; entonces, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$. Por (2) de esta proposición, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \forall x\varphi[\alpha]$, así que tenemos $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[\alpha]$.

Por (4) de 2.7.39 obtenemos $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi)[\alpha]$.

Para la otra dirección sabemos que $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi)[\alpha]$, entonces para toda $a \in A$ $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[\alpha^{x/a}]$, es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$ o $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$.

Si para toda $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$, deducimos que $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$, por lo que $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \forall x\psi)[\alpha]$ y terminamos.

Si para alguna $a \in A$ $\mathfrak{A} \not\models \psi[\alpha^{x/a}]$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$, de donde se sigue que $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$, pues x no es libre en φ. En consecuencia, $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \forall x\psi)[\alpha]$, lo que se quería demostrar.

8. Por el teorema 2.7.39 e incisos previos de esta proposición, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\exists x(\psi \to \varphi) &\equiv \exists x(\neg\psi \vee \varphi)\\ &\equiv \exists x\neg\psi \vee \varphi\\ &\equiv \neg\forall x\psi \vee \varphi\\ &\equiv \forall x\psi \to \varphi.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.7.41. Trabajamos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, donde tenemos la siguiente fórmula,

$$\varphi(x, y, z) \equiv \exists u, v(u < x < v < y < z)$$

Sea $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$-estructura con universo $\mathbb{N}$ y la interpretación natural de los símbolos en $\mathcal{L}$. Considere las siguientes asignaciones $\alpha, \beta, \gamma : x, y, z, u, v \longrightarrow \mathbb{N}$,

$\alpha(x) = 5$	$\alpha(y) = 10$	$\alpha(z) = 20$	$\alpha(u) = 24000$	$\alpha(v) = 50^{10^7}$
$\beta(x) = 5$	$\beta(y) = 10$	$\beta(z) = 20$	$\beta(u) = 2$	$\alpha(v) = 50$
$\gamma(x) = 0$	$\gamma(y) = 1$	$\gamma(z) = 20$	$\gamma(u) = 24$	$\gamma(v) = 5$

Con estas asignaciones, deducimos que

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \varphi(x, y, z)[\alpha] && \text{tome } u = 2, v = 12\\ &\mathfrak{A} \models \varphi(x, y, z)[\beta] && \text{tome } u = 1, v = 13\\ &\mathfrak{A} \not\models \varphi(x, y, z)[\gamma]\end{aligned}$$

Es importante reflexionar cuidadosamente sobre estos resultados. Las variables libres de φ son x, y, z no lo son u, v, por lo que no importa el valor que otorgan las

asignaciones a las variables u, v, pues no son libres en φ. En cuanto a las variables libre x, y, z, las asignaciones tienen el mismo valor en ellas, esto es, α y β coinciden en las variables libres de φ. El lector debe asegurarse de que si construimos cualquier otra asignación ζ que coincida con α (y por tanto con β) en las variables libres de φ, se deduce de inmediato que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\zeta]$$

pues esto ocurre con α (y con β). En consecuencia, si tenemos dos asignaciones cualesquiera η, ρ que coincidan en las variables libres de φ, podemos deducir que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\eta] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi[\rho].$$

La situación peculiar de este ejemplo se confirma en general de acuerdo con la siguiente proposición.

Proposición 2.7.42. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α, γ $\mathfrak{A}$-asignaciones.*

1. *Para cualquier $\mathcal{L}$-término t, si para toda variable x de t, $\alpha(x) = \gamma(x)$, entonces $t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.*

2. *Para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ, si para toda variable libre x de φ se cumple $\alpha(x) = \gamma(x)$, entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

Demostración. 1. Por inducción en la construcción de t.

❄ Si $t = x$,

$$t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = \alpha(x) = \gamma(x) = t^{\mathfrak{A}}[\alpha].$$

❄ Si $t = c$

$$t^{\mathfrak{A}}[\alpha] = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[\gamma].$$

❄ Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ (note que las variables de t son las que aparecen en alguno de los t_i),

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{A}}[\alpha] =& f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]) \\ =& f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]) \qquad \text{(por hipótesis de inducción)} \\ =& t^{\mathfrak{A}}[\gamma]. \end{aligned}$$

2. Por inducción en la construcción de φ.

❄ φ es atómica.
$\varphi \equiv t = u$:

$$\mathfrak{A} \models (t = u)[\alpha] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (t = u)[\gamma],$$

pues α coincide con γ en las variables de t, u, que son las variables libres de φ.

$\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$, donde R es un símbolo de n-relación.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\alpha] &\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\gamma].\end{aligned}$$

Note que las variables de φ son libres y son aquellas que aparecen en algún t_i.

❄ $\varphi \equiv \neg\psi$. En este caso $lib(\varphi) = lib(\psi)$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma] \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].\end{aligned}$$

❄ $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\alpha] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \varphi_2[\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \varphi_2[\gamma] \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].\end{aligned}$$

❄ $\varphi \equiv \exists y\psi$ y suponemos que $\alpha(x) = \gamma(x)$ para toda $x \in lib(\varphi) = lib(\psi) - \{y\}$.
En consecuencia, para cualquier $a \in A$, $\alpha^{y/a}(x) = \gamma^{y/a}(x)$ para toda $x \in lib(\varphi)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{y/a}] \\ &\Leftrightarrow \text{para alguna } a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi[\gamma^{y/a}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].\end{aligned}$$

□

Se sigue que si tenemos dos $\mathfrak{A}$-asignaciones que coinciden en las variables libres de una fórmula φ, la fórmula es verdadera respecto a una de las asignaciones si y sólo si lo es respecto de la otra; si la fórmula carece de variables libres, es inmediato que cualesquier dos asignaciones coinciden en las variables libres de la fórmula. Recuerde que un $\mathcal{L}$-enunciado es una $\mathcal{L}$-fórmula carente de variables libres.

Corolario 2.7.43. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, φ un $\mathcal{L}$-enunciado y α, γ $\mathfrak{A}$-asignaciones. Entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

En consecuencia, para alguna $\mathfrak{A}$-asignación γ, $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ si y sólo si para toda $\mathfrak{A}$-asignación α, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$.

Demostración. Se sigue de la proposición 2.7.42 y de lo recién dicho. □

Definición 2.7.44. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y φ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $lib(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces $\mathfrak{A} \models \varphi_{x_1,\ldots,x_k}[a_1, \ldots, a_k]$ o simplemente $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]$ significa $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ para alguna (de hecho, para toda) $\mathfrak{A}$-asignación α tal que $\alpha(x_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

En particular, si φ es un enunciado, escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi$ y decimos que φ es cierta en $\mathfrak{A}$. Cuando $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, decimos que φ es falsa en $\mathfrak{A}$.

Teorema 2.7.45. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y φ, ψ $\mathcal{L}$-enunciados.*
1. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi$
2. $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$ *o* $\mathfrak{A} \models \psi$
3. $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$ *y* $\mathfrak{A} \models \psi$
4. $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi$ *o* $\mathfrak{A} \models \psi$
5. $\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \psi$

Demostración. 1. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ si y sólo si para alguna (toda) α, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\alpha]$, si y sólo si para alguna (toda) α $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$, si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

3. $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si para toda α $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\alpha]$, si y sólo si para toda α $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ y $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$, si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A} \models \psi$.

5. $\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ si y sólo si para toda α $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\alpha]$ si y sólo si para toda α ($\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha]$), si y sólo si ($\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi$). □

En todo lenguaje $\mathcal{L}$ existen enunciados que son lógicamente válidos, verdaderos en toda estructura (del lenguaje), o lógicamente falsos, falsos en cualquier estructura (del lenguaje). Si $\mathcal{L}$ contiene al menos un símbolo de constante, entonces $c = c$ y $\neg(c = c)$ son ejemplos de ello. También podemos recurrir a los siguientes enunciados y prescindir de los símbolos de constante:

$$\exists x(x = x) \qquad \text{y} \qquad \neg\exists x(x = x).$$

De cualquier forma, usamos $\top$ para representar un (todo) enunciado lógicamente verdadero y $\bot$ para un (todo) enunciado lógicamente falso.

Recuerde que $\alpha^{x/a}$ es la asignación que se obtiene de α prescribiendo $\alpha(x) = a$, y que $\alpha^{x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n}$ obliga a que $\alpha(x_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Definición 2.7.46. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura.

❶ $\mathfrak{A}$ es un modelo de un enunciado ψ si ψ es cierto en $\mathfrak{A}$.

❷ $\mathfrak{A}$ es modelo de un conjunto Γ de enunciados si cada $\psi \in \Gamma$ es cierto en $\mathfrak{A}$.

Observe que $\mathfrak{A}$ es modelo de $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ es modelo de $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$.

Proposición 2.7.47. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados y ψ un $\mathcal{L}$-enunciado. Entonces*

$$\Gamma \models \psi \quad \textit{si y sólo si todo modelo de } \Gamma \textit{ es modelo de } \psi.$$

Demostración. Es inmediata de las definiciones 2.7.30(4), 2.7.46 y del corolario 2.7.43. ❐

Teorema 2.7.48. *Sean $\varphi, \psi, \varphi_1, \theta$ $\mathcal{L}$-fórmulas. Suponga que φ_1 se obtiene de φ al sustituir ψ por θ en una o más de sus ocurrencias en φ. Entonces*

$$\models (\theta \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi_1).$$

En consecuencia, si θ y ψ son lógicamente equivalente, así lo son φ y φ_1.

Demostración. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y α una $\mathfrak{A}$-asignación. Suponga que $\mathfrak{A} \models (\theta \leftrightarrow \psi)[\alpha]$; debemos corroborar que $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \varphi_1)[\alpha]$. Si $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha]$, se procede por inducción en la construcción de φ a confirmar que $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\alpha]$, usando que φ_1 se obtiene de φ al sustituir ψ por θ una o más veces y $\mathfrak{A} \models (\theta \leftrightarrow \psi)[\alpha]$. ❐

Ahora queremos presentar otra forma de tratar algunas estructuras matemáticas que hemos considerado antes. Por ejemplo, en los naturales hemos considerado la suma y el producto como funciones, que aunque también son relaciones, tienen propiedades particulares. Pero también podemos ver la adición y la multiplicación como 3-predicados A y M. Sabemos que $0 + 0 = 0$ y que $0 \cdot n = 0$, así que se cumple

$$A(0,0,0) \qquad M(0,n,0)$$

para cada n. También ocurre

$$\begin{array}{rl} A(1,1,2) & M(1,2,2) \\ A(10,11,21) & M(2,3,6) \\ A(50,50,100) & M(10,10,100). \end{array}$$

Por supuesto, no podemos escribir todas las posibles operaciones en esta forma, pero esto no es ningún problema, porque los axiomas correspondientes establecen las operaciones que necesitamos. Por ejemplo

- $$\exists ! x A(x,x,x).$$

Existe un único elemento x tal que $x + x = x$. Note que no se trata de un nuevo cuantificador, sino de una abreviación que se emplea con frecuencia, y no sólo en textos de lógica matemática.

- $$\forall x(x \neq 0 \to \neg A(x, x, x)).$$

  Expresa casi lo mismo que el inciso previo. No es exactamente «lo mismo» porque no indica que se cumpla $A(x, x, x)$.

- $$\exists\, !x \exists\, !y(x \neq y \wedge M(x, x, x) \wedge M(y, y, y)).$$

- $$\exists\, y A(y, y, x).$$

  Define al conjunto de números de la forma $y + y$, es decir aquellos divisibles por 2, los números pares.

- $$\exists\, y, z[\neg M(y, y, y) \wedge \neg M(z, z, z) \wedge M(y, z, x)].$$

  Define al conjunto de números compuestos, esto es, que son el producto de dos números que no son el 0 o el 1.

- $$\exists\, y, z, v, w[M(y, y, v) \wedge M(z, z, w) \wedge A(v, w, x)].$$

  Para ciertos y, z, $x = y^2 + z^2$, aquellos naturales que se pueden escribir como la suma de dos cuadrados.

- $$\exists\, x \forall\, y A(x, y, y).$$

  Neutro respecto a la adición.

- $$\forall\, x, y, z[A(x, y, z) \to A(y, x, z)].$$

  La suma es conmutativa.

- $$\forall\, x, y, w, z[(A(x, y, w) \wedge A(x, y, z)) \to w = z].$$

  La adición es una función.

A continuación desarrollamos más ejemplos sobre validez o invalidez de fórmulas en estructuras. Hemos tratado de no ser «demasiado formales», en el sentido de que, dado que es importante que el lector desarrolle habilidades en esta dirección, queda como tarea el llenando de los detalles necesarios para constatar la definición formal de validez (o invalidez).

Ejemplo 2.7.49. Considere la fórmula

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x,c)) \equiv \varphi,$$

donde φ es un enunciado; así que, como ya vimos, se cumple en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ si y sólo si se cumple para alguna (toda) $\mathfrak{A}$-asignación. Primero debemos identificar el lenguaje $\mathcal{L}$ en cuestión: $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ con P como un 1-predicado, Q como un 2-predicado y c como una constante.

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\rangle$, donde $A = \mathbb{Z}$, $P^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{(2n, 2) : n \in \mathbb{N}\}$ y $c^{\mathfrak{A}} = -3$. En este caso debemos encontrar un entero x tal que x sea natural y $(x, -3) \in Q^{\mathfrak{A}}$, lo cual es imposible pues -3 no es 2 así que en este caso φ es falsa en $\mathfrak{A}$.

Si tomamos $A = \mathbb{Z}$, $P^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{(2n, 2) : n \in \mathbb{N}\}$ y $c^{\mathfrak{A}} = 2$, φ es cierta en $\mathfrak{A}$ si hacemos $x = 2$, por ejemplo.

Ejemplo 2.7.50. Ahora consideremos $\psi = \forall x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x, f(c)))$. Primero identifiquemos nuestro lenguaje a partir de ψ:

$$\mathcal{L} = \{P, Q, R, f, c\},$$

donde P, Q son 1-predicados, R es un 2-predicado, f una 1-función y c una constante. Construimos una $\mathcal{L}$-estructura:

$$\mathfrak{A} = \langle A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}\rangle$$

En este caso, $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^2 = A \times A$, $f^{\mathfrak{A}} : A \longrightarrow A$ y $c \in A$.

Sea $A = \mathbb{Z}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2r, r \in \mathbb{Z}\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$, $f : A \longrightarrow A$ con $f(x) = 2x$ y $c = 0$. Además, $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \geq b\}$.

El enunciado ψ afirma que para todo entero x, si x es par y natural, entonces x es mayor o igual que $2 \cdot 0 = 0$, lo cual es cierto así que ψ se cumple en $\mathfrak{A}$.

Investiguemos otra estructura para ψ. Esta vez A es finito: $A = \{a, b, e, d\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{a\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{a, b\}$, $f : A \longrightarrow A$ con $f(a) = b$, $f(b) = e$, $f(e) = d$, $f(d) = a$; $c^{\mathfrak{A}} = a$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(b, b)\}$. Así que ψ es falsa pues $(a, b) \notin R^{\mathfrak{A}}$.

Ejemplo 2.7.51. Para cada una de las siguientes fórmulas, dé una estructura en la que la fórmula sea verdadera y una en la que sea falsa.

a) $\forall x(A(x) \wedge B(x,a) \to B(x,b)) \equiv \varphi$.

b) $\forall x \exists y \exists z((C(y) \wedge D(z) \wedge E(x,y,z)) \to F(x)) \equiv \varphi$.

c) $\forall x \forall y[\exists u \exists v(G(x,u) \wedge H(y,v)) \to I(x) \wedge J(y)] \equiv \varphi$.

d) $\exists x \exists z[K(x) \wedge L(y) \wedge M(z) \wedge N(x,y) \wedge O(x,z)]] \equiv \varphi$.

a) $\mathfrak{R} = \langle R, A^{\mathfrak{R}}, B^{\mathfrak{R}}, a^{\mathfrak{R}}, b^{\mathfrak{R}} \rangle$, donde $A^{\mathfrak{R}}$ es una 1-relación, $A^{\mathfrak{R}} \subseteq R$, $B^{\mathfrak{R}}$ es una 2-relación y $B^{\mathfrak{R}} \subseteq R^2$, $b^{\mathfrak{R}}, a^{\mathfrak{R}}$ son símbolos de constante $a^{\mathfrak{R}}, b^{\mathfrak{R}} \in R$.

i) Una interpretación en la que φ es verdadera: $R = \mathbb{R}$, $A^{\mathfrak{R}} = \{0\}$, $B^{\mathfrak{R}} = \{(0,0)\}$, $a^{\mathfrak{R}} = \sqrt{2}$, $b^{\mathfrak{R}} = \sqrt{3}$; α es verdadera pues el antecedente es falso.

ii) Ahora hacemos φ falsa: $A^{\mathfrak{R}} = \mathbb{R}$, $B^{\mathfrak{R}} = \{(c,d) : d \geq c\}$, $a^{\mathfrak{R}} = \sqrt{3}$, $b^{\mathfrak{R}} = \sqrt{2}$. Si tomamos x en el intervalo $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, no se cumple α.

b) $\mathcal{L} = \{C, D, E, F\}$, donde C, D, F son 1-predicados y E es un 3-predicado.

$$\mathfrak{B} = \langle B, C^{\mathfrak{B}}, D^{\mathfrak{B}}, E^{\mathfrak{B}}, F^{\mathfrak{B}} \rangle.$$

i) Sea $B = \mathbb{N}$, $C^{\mathfrak{B}} = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$, $D^{\mathfrak{B}} = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$, $E^{\mathfrak{B}} = \{(n,m,\tilde{n}) \in \mathbb{N}^3 : m < n < \tilde{n}\}$, $F^{\mathfrak{B}} = \{n \in \mathbb{N} : n > 11\}$. Entonces φ es verdadera.

ii) $B = \mathbb{Z}$, $C^{\mathfrak{B}} = \mathbb{N}$, $E^{\mathfrak{B}} = \{(n,m,\tilde{n}) : n = m + \tilde{n}\}$, $D^{\mathfrak{B}} = \mathbb{Z}$, $F^{\mathfrak{B}} =$ Pares; aquí φ es falsa (por ejemplo $x = 3$).

c) $\mathcal{L} = \{G, H, I, J\}$, donde G, H son 2-predicados e I, J son 1-predicados.

$$\mathfrak{C} = \langle C, G^{\mathfrak{C}}, H^{C}, I^{\mathfrak{C}}, J^{\mathfrak{C}} \rangle.$$

i) $C = \mathbb{N}$, $G^{C} = \mathbb{N}^2$, $H^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}^2$, $I^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}$, $J^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}$ hace verdadera a φ.

ii) $C = \mathbb{N}$, $G^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}^2$, $H^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}^2$, $I^{\mathfrak{C}} = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$, $J^{\mathfrak{C}} = \{n \in \mathbb{N} : n > 100\}$; por ejemplo $x = 2$, $y = 3$ hacen falsa a φ.

d) $\mathcal{L} = \{K, L, M, N, O\}$, donde K, L, M son 1-predicados y N, O son 2-predicados.

i) Sea $U =$ conjunto de todos los animales

$K^{\mathcal{U}} = \{x : x \text{ es tigre}\}$

$L^{\mathcal{U}} = \{x : x \text{ es conejo}\}$

$M^{\mathcal{U}} = \{x : x \text{ es hiena}\}$

$N^{\mathcal{U}}(x,y) = \{(x,y) : x \text{ es más grande que } y\}$

$O^{\mathcal{U}}(x,y) = \{(x,y) : x \text{ es menos grande que } y\}$

En este caso y es libre. Sea $\mathcal{U} = \langle U, K^{\mathcal{U}}, L^{\mathcal{U}}, M^{\mathcal{U}}, N^{\mathcal{U}}, O^{\mathcal{U}} \rangle$.

$$\mathcal{U} \not\models \varphi[\alpha^{y/\text{conejo}}].$$

(ii) Dejamos todo como en i), excepto que

$$M^{\mathcal{U}} = \{x : x \text{ es un rinoceronte}\}.$$

Entonces

$$\mathcal{U} \models \varphi[\alpha^{y/\text{conejo}}].$$

Ejemplo 2.7.52. Para cada una de las fórmulas siguientes, dé una interpretación en la cual la fórmula sea verdadera y una en la que sea falsa.

1. $\forall x\,(U(x) \wedge B(x,a) \to B(x,b))$.
2. $\forall x\,[\exists y\,\exists z\,((C(y) \wedge D(z) \wedge E(x,y,z)) \to F(x)]$.
3. $\forall x\,\forall y\,[\exists u\,\exists v\,(G(x,u) \wedge H(y,v)) \to I(x) \wedge J(y)]$.
4. $\exists y\,\exists z\,(K(x) \wedge L(y) \wedge M(z) \wedge N(x,y) \wedge O(x,z))$.

1. $\mathfrak{A} = \langle A, U^{\mathcal{U}}, B^{\mathfrak{A}}, a^{\mathfrak{A}}, b^{\mathfrak{A}}\rangle$ es la interpretación para el lenguaje $\mathcal{L} = \{U, B, a, b\}$ donde A es el universo, $U^{\mathfrak{A}}$ es una 1-relación, $B^{\mathfrak{A}}$ es una 2-relación y $a^{\mathfrak{A}}, b^{\mathfrak{A}} \in A$.
   a) Hagamos de A el conjunto de todas las ciudades del mundo $U^{\mathfrak{A}} = A$, $(x,y) \in B^{\mathcal{U}}$ si y sólo si x está al norte de y, y sea $b^{\mathfrak{A}}$ =Mérida, $a^{\mathfrak{A}}$ =Zacatecas, así que la fórmula en (1) expresa que toda ciudad que está al norte de Zacatecas está al norte de Mérida, por lo que la fórmula es verdadera con esta interpretación.
   b) Tomamos A y U como en el caso anterior, pero esta vez $a^{\mathfrak{A}}$ =Tuxtla Gutiérrez y $b^{\mathfrak{A}}$ =Colima. Con esto hacemos falsa la fórmula en (1).
2. Sea $\varphi = \forall x\,[\exists y\,\exists z\,((C(y) \wedge D(z) \wedge E(x,y,z)) \to F(x)]$; el lenguaje asociado es $\mathcal{L} = \{C, D, E, F\}$, donde C, D y F son 1-predicados y mujeres», dando explícitamente la definición de predicados y funciones. Pero más aún, incorporamos *parámetros* en nuestras fórmulas, esto es, elementos del universo que se sustituyen por variables libres an fórmulas; por supuesto, los parámetros sólo funcionan para la estructura misma o estructuras que tengan elementos del universo en común. E es un 3-predicado. Una estructura de interpretación para este lenguaje tiene la forma $\mathcal{U} = \langle A, C^{\mathcal{U}}, D^{\mathcal{U}}, E^{\mathcal{U}}, F^{\mathcal{U}}\rangle$.
   a) Sea A el conjunto de todas las cosas y gentes del mundo:

$$C^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \textit{ es un curso},$$

$$D^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \textit{ es una universidad},$$

$$E^{\mathcal{U}}(x,y,z) \equiv x \textit{ lleva } y \textit{ en } z,$$

$$F^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \textit{ es un estudiante.}$$

φ se interpreta como: «Quienes toman cursos en universidades son estudiantes», lo cual es cierto.

b) Usamos la interpretación recién dada pero $F(x)$ significa que x es profesor y φ se interpreta como «Quienes toman cursos en universidades son profesores», lo cual es falso.

3. Sea $\psi \equiv \forall x \forall y\, [\exists u \exists v\, (G(x,u) \wedge H(y,v)) \rightarrow I(x) \wedge J(y)]$. Sean $\mathcal{L} = \{G, H, I, J\}$ y $\mathcal{U} = \langle A, G^{\mathcal{U}}, H^{\mathcal{U}}, I^{\mathcal{U}}, J^{\mathcal{U}} \rangle$.

a) Sea A el conjunto de todas las personas en el mundo:

$$G^{\mathcal{U}}(x,y) \equiv x \textit{ es el padre de } y,$$

$$H^{\mathcal{U}}(x,y) \equiv x \textit{ es la madre de } y,$$

$$I^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \textit{ es hombre},$$

$$J^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \textit{ es mujer}.$$

Entonces ψ se interpreta como «los padres son hombres y las madres mujeres», que es verdadera.

b) La misma interpretación pero con $J^{\mathcal{U}}(x) \equiv x$ es hombre, y ψ se interpreta como los padres son hombres y las mujeres son hombres, que es falso.

4. Sean $\exists x \exists y \exists z\, (K(x) \wedge L(y) \wedge M(z) \wedge N(x,y) \wedge O(x,z)) \equiv \beta$, $\mathcal{L} = \{K, L, M, N, O\}$ y $\mathcal{U} = \langle A, K^{\mathcal{U}}, L^{\mathcal{U}}, M^{\mathcal{U}}, N^{\mathcal{U}}, O^{\mathcal{U}} \rangle$.

a) Sea A el conjunto de animales de todo el mundo:

$$K^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \text{ es un tigre},$$

$$L^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \text{ es un antílope},$$

$$M^{\mathcal{U}}(x) \equiv x \text{ es una hiena},$$

$$N^{\mathcal{U}}(x,y) \equiv x \text{ es más fiero que } y,$$

$$O^{\mathcal{U}}(x,y) \equiv x \text{ es más bonito que } y.$$

Entonces β se interpreta como, «todo tigre es más fiero que un antílope y más bonito que una hiena», que es verdadero.

b) Si cambiamos a $K^{\mathcal{U}}(x) \equiv x$ es un ornitorrinco, se hace falsa β.

¿Qué cosa es un jarro que conoce el infierno? El cántaro del pozo.

Ejemplo 2.7.53.

1. Usamos otra forma de definir predicados y funciones, esta vez en un universo finito:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$P = \{a, c\}$$
$$Q = \{(a, b), (b, b), (b, c)\}$$
$$f(a) = c, \ \ f(b) = b, \ \ f(c) = a.$$

   Para $\varphi \equiv \exists\, x(P(x) \wedge Q(x, b))$, si tomamos $x = a$, φ es verdadera. Considere $\exists\, x\ (P(x) \to Q(x, a)) \equiv \beta$. Si se toma $x = b$, β se torna verdadera.

   Suponga que $\gamma \equiv \exists\, x\, (P(x) \wedge Q(x, a))$; no hay x que haga posible $P(x) \wedge Q(x, a)$.

2. $\exists\, x \exists\, y\, (P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x, y))$ es falsa pues no hay x, y que hagan cierta $P(x) \wedge$ $P(y) \wedge$ $Q(x, y)$, ya que $Q(x, y)$ es verdadera,

   - Si $x = a, y = b$, $P(b)$ es falsa,
   - $x = b, y = b$, $P(b)$ es falsa,
   - $x = b, y = b$, $P(b)$ es falsa.

3. $\varphi \equiv \forall\, x\, (P(x) \to \neg Q(x, f(c)))$.

   Ésta es verdadera si y sólo si es verdadera para todo elemento x del universo. Tenemos tres casos por considerar.

   Caso 1 $x = a$. $Q(a, f(c))$ es falso, $(f(c) = a)$, $\neg Q(a, f(c))$ es verdadero, así que cuando $x = a$ la condicional

$$P(x) \to \neg Q(x, f(c)) \quad (*)$$

   es verdadera.

   Caso 2 $x = b$. En este caso, $(*)$ es verdadero pues su antecedente $P(b)$ es falso.

   Caso 3 $x = c$, Éste es similar al caso 1 pues $Q(c, a)$ es falso, así que $(*)$ es verdadero.

   Por lo tanto, φ es verdadera en esta interpretación.

4. $\beta \equiv \forall x\,(P(f(x)) \wedge \neg Q(x,a))$.

   Si $x = b$, la conjunción $P(f(x)) \wedge \neg Q(x,a)$ es falsa ($f(b) = b$ y $P(b)$ es falsa). Así que β es falsa pues no se cumple para todo elemento del universo.

5. $\sigma \equiv \forall x\,[P(x) \to \forall y\,(P(y) \to Q(x,y))]$.

   Puesto que tenemos el cuantificador $\forall x$, la fórmula entre corchetes

   $$(*) \quad P(x) \to \forall y\,(P(y) \to Q(x,y))$$

   debe cumplirse para cualquier elemento x del universo.

   Si $x = b$, $(*)$ es cierto pues el antecedente es falso. Si $x = a$, el antecedente de $(*)$ es verdadero así que $(*)$ es verdadero si y sólo si

   $$P(y) \to Q(a,y) \quad (**)$$

   es verdadero para cada $y \in A$. Si $y = a$, $(**)$ es falsa, así que σ es falsa en esta interpretación.

6. $\psi \equiv \forall x\,[P(x) \to \exists y\,(P(y) \wedge \neg Q(x,y))]$.

   En este caso,

   $$[P(x) \to \exists y\,(P(y) \wedge \neg Q(x,y))] \quad (*)$$

   debe ser verdadero para cada x.

   Si $x = a$, el antecedente de $(*)$ es verdadero y como $P(a) \wedge \neg Q(a,a)$ es verdadero, el consecuente de $(*)$ es verdadero. Así que $(*)$ es cierto. Si $x = b$, el antecedente de $(*)$ es falso, por lo que $(*)$ es verdadero. Si $x = c$, el antecedente de $(*)$ es cierto y también lo es $P(a) \wedge \neg Q(c,a)$ $(y = a)$, por lo que $(*)$ es cierto.

   En consecuencia, ψ es verdadera.

Lema 2.7.54 (Leyes de De Morgan)**.** *Para cualesquier $\mathcal{L}$-fórmulas φ, ψ se cumplen las siguientes equivalencias:*

1. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.
2. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Demostración. 1. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)[\alpha]$ entonces $\mathfrak{A} \not\models (\varphi \wedge \psi)[\alpha]$, así que $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \not\models \psi[\alpha]$, lo que da lugar a $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)[\alpha]$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)[\alpha]$, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\alpha]$, por lo que $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\alpha]$ o $\mathfrak{A} \not\models \psi[\alpha]$, es decir, $\mathfrak{A} \not\models (\varphi \wedge \psi)[\alpha]$, de donde se sigue que $\mathfrak{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)[\alpha]$.

2. Queda como ejercicio. ∎

Corolario 2.7.55. *Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son $\mathcal{L}$-fórmulas, podemos afirmar que*

1. $\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n$.

2. $\neg(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n$.

Demostración. Se prueba por inducción usando el lema 2.7.54. ☐

¿Qué cosa es roja, dura y delgada, que muerde sin dificultad a la gente? La hormiga.

En ocasiones es necesario obtener la negación de una fórmula dada, y reducir ésta lo más posible; como no siempre es un procedimiento sencillo, vale la pena practicar un poco con la definición de $\equiv$, el teorema 2.7.39, la proposición 2.7.40 y las leyes de De Morgan.

Ejemplo 2.7.56. 1. Sea $\varphi \equiv \forall x \exists y \forall z\,[R(x,y) \to \exists u\,(Q(u,x,y))]$.

Entonces

$$\begin{aligned}\neg\varphi &\equiv \neg\forall x \exists y \forall z\,[R(x,y) \to \exists u\, Q(u,x,y)]\\ &\equiv \exists x \neg\exists y \forall z\,[R(x,y) \to \exists u\, Q(u,x,y)]\\ &\equiv \exists x \forall y \neg\forall z\,[R(x,y) \to \exists u\, Q(u,x,y)]\\ &\equiv \exists x \forall y \exists z \neg[R(x,y) \to \exists u\, Q(u,x,y)]\end{aligned}$$

(Usamos el hecho de que $A \to B \equiv \neg A \vee B$):

$$\equiv \exists x \forall y \exists x \neg[\neg R(x,y) \vee \exists u\, Q(u,x,y)]$$

$$\equiv \exists x \forall y \exists x\,[R(x,y) \wedge \neg\exists u\, Q(u,x,y)]$$

(Usamos las leyes de De Morgan):

$$\equiv \exists x \forall y \exists x\,[R(x,y) \wedge \forall u \neg Q(u,x,y)].$$

2. Sea $\beta \equiv \exists x \forall y \exists z\,[R(x,y) \to \forall u\,(Q(u,x) \leftrightarrow S(x,y,z))]$.

Buscamos $\neg\beta$; primero eliminamos $\to$ y $\leftrightarrow$:

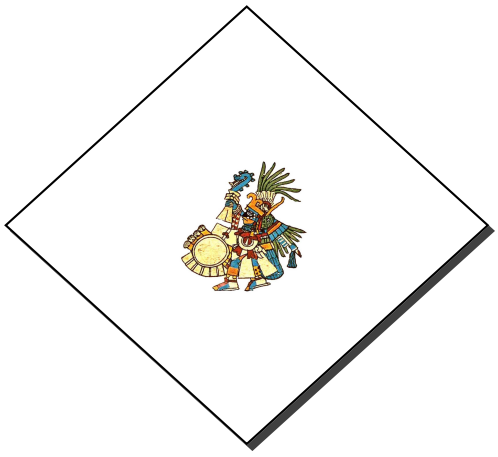
$$R(x,y) \to \forall u\,(Q(u,x) \leftrightarrow S(x,y,z)) \equiv \neg R(x,y) \vee \forall u\,(Q(u,x) \leftrightarrow S(x,y,z))$$

$$\equiv \neg R(x,y) \vee \forall u\,[(Q(u,x) \to S(x,y,z)) \wedge (S(x,y,z) \to Q(u,x))]$$

$$\equiv \neg R(x,y) \vee \forall u\,[(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))],$$

así que

$$
\begin{aligned}
\neg\beta \equiv\ & \\
&\equiv \neg\exists x \forall y \exists z\, [\neg R(x,y) \vee \forall u\, [(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \neg\forall y \exists z\, [\neg R(x,y) \vee \forall u\, [(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \exists y \neg\exists z\, [\neg R(x,y) \vee \forall u\, [(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \exists y \forall z \neg[\neg R(x,y) \vee \forall u\, [(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \exists y \forall z\, [R(x,y) \wedge \neg\forall u\, [(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \exists y \forall z\, [R(x,y) \wedge \exists u \neg[(\neg Q(u,x) \vee S(x,y,z)) \wedge (\neg S(x,y,z) \vee Q(u,x))]] \\
&\equiv \forall x \exists y \forall z\, [R(x,y) \wedge \exists u\, [(Q(u,x) \wedge \neg S(x,y,z)) \vee (S(x,y,z) \wedge \neg Q(u,x))]].
\end{aligned}
$$



2.8 ➠ Ejercicios

1. Traduzca al cálculo de predicados.

   a) Un estudiante de aviación conduce un avión a Colima acompañado por un instructor.

   b) Todo instructor tiene un estudiante de aviación que conduce el avión con él a alguna ciudad.

   c) No todos los estudiantes que conducen a alguna ciudad con un instructor son estudiantes de aviación.

   d) Ningún instructor conduce un avión a toda ciudad acompañado por un estudiante de aviación.

   e) Ningún estudiante de aviación que no conduce un avión a alguna ciudad acompañado por un instructor es un instructor.

   Use el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, \leq, =, +, \cdot\}$ en los incisos (f)-(p).

   f) Todo entero positivo es mayor o igual que 2.

   g) Existe un entero positivo impar menor que el resto.

   h) Algunos enteros son múltiplos de 3.

   i) No todos los enteros son múltiplos de 5.

   j) La suma es conmutativa.

   k) La ley distributiva para la múltiplicación sobre la suma.

   l) 10 es un múltiplo positivo de algún entero.

   m) Todo múltiplo positivo de 7 es mayor que 5.

   n) Ningún múltiplo positivo de 5 es menor que 7.

   ñ) Existe al menos un entero entre 5 y 2.

   o) Todo entero tiene un inverso aditivo.

   p) La suma de 2 enteros impares es par.

2. En cada una de las siguientes fórmulas, encierre en un círculo las ocurrencias libres de x.

a) $P(x) \wedge Q(x,y) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$

c) $\exists x P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \wedge R(x,y))$

d) $R(a,y) \rightarrow \forall x(Q(a,x) \rightarrow P(x) \wedge R(a,x))$

e) $\forall y[P(y) \rightarrow \exists z(Q(x,z) \wedge \exists x R(y,x) \rightarrow S(x,y,z))]$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre una interpretación en la que sea verdadera y otra en la que la fórmula sea falsa.

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$
2. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge \neg R(x))$
3. $\exists x(P(x) \wedge Q(x,a)) \rightarrow \forall y[P(y) \wedge R(y) \rightarrow Q(b,y)]$
4. $\forall x[P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y))]$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge R(y) \wedge \neg Q(x))$
6. $\exists x \forall y[P(x) \wedge R(y) \wedge S(x,y) \wedge \exists z(P(z) \wedge R(x) \wedge \neg Q(x,a,z))]$
7. $\forall x R(x), f(x)) \wedge \forall x \forall y\ (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

4. Para cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas, encuentre una interpretación en la que la última fórmula sea falsa pero las otras sean verdaderas.

a) $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x(A(x) \wedge B(x))\}$

b) $\{\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$

c) $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow \neg A(x)), \exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x\ (C(x) \rightarrow \neg B(x))\}$

d) $\{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x), Q(a), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\}$

e) $\{\forall x(L(x,a) \rightarrow \neg L(x,b)), \forall x \exists y L(x,y), \exists x \neg L(x,b)\}$

f) $\{\exists x(E(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow G(x,y))), \forall x \forall y(E(x) \rightarrow (G(x,y) \leftrightarrow H(y)), \forall x\ (H(x) \leftrightarrow F(x))\}$

h) $\{\forall x R(x, f(x)), \exists x \forall y R(x,y)\}$

i) $\{\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow R(x,y)), \exists x P(x), \exists x P(f(x)), \exists x(P(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge \neg Q(f(x,y))))\}$

5. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos?

a) x

b) xy

c) c

d) $P(c)$

e) $f(x,d)$

f) $\forall\, xR(c)$

g) $g(c,f(y,z))$

h) $g(R,d)$

6. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

a) $f(x,c)$

b) $R(c,f(d,z))$

c) $\forall\, xP(x)$

d) $\exists\, yP(c)$

e) $\neg R(z,f(w))$

f) $\exists\, x(\forall\, yP(z) \to R(x,y))$

7. Encuentre la ocurrencias libres de las variables en las siguientes fórmulas.

a) $\forall\, xP(x,y) \to \forall\, zQ(z,x)$

b) $Q(z) \to \neg\forall\, x\forall\, yP(x,y,a)$

c) $\forall\, xP(x) \wedge \forall\, yQ(x,y)$

d) $\forall\, x\exists\, y\forall\, u(R(x,u) \leftrightarrow T(y,u) \wedge T(v))$

e) $\exists\, x\exists\, y\exists\, z(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \neg R(x,z))$

8. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son enunciados?

a) $\forall\, x\forall\, y\forall\, z(x > y \wedge y > z) \to \exists\, w(w > w)$

b) $\exists\, x(Rojo(x)) \vee \forall\, y(Azul(y) \vee Amarillo(x))$

c) $x + x = x + x$

d) $\exists\, y(x + x = x + x)$

e) $\exists\, x\exists\, y(Maestro(x,y) \wedge Cursa(x,y,z))$

9. Use el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$ para formular los siguientes enunciados:

a) Existe un número x menor que 5 y mayor que 3.

b) Para todo número x existe un número y menor que x.

c) Para todo número x existe un número y mayor que $x + 1$.

d) Para cualesquier números x, y, las sumas $y + x$ y $x + y$ son iguales.

e) Para todo número x existe un número y tal que para todo z para el cual la substracción $z - 5$ es menor que y, entonces la substracción $x - 7$ es menor que 3.

10. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje $\{+, <, 1, 2, 3\}$, donde $+$ es una función binaria, $<$ es una relación binaria y $1, 2, 3$ son símbolos de constante. Escribimos $(x + y)$ en lugar de $+(x, y)$ y $x < y$ en lugar de $<(x, y)$. Considere las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas:

    a) $\forall x \exists y((x + y) = 1)$

    b) $\forall x \neg(x < 1)$

    c) $((1 + 1) = 2)$

    d) $2 < 1$

    e) $\forall x(2 < 1) \rightarrow (x + 2 < x + 1)$

    f) $\forall x \forall y \exists z(x + y = z)$

    g) $\forall x \forall y \forall z(((x + 3 = y) \wedge (x + 3 = z)) \rightarrow (y = z))$

    h) $\forall x \forall y \forall z(((x + y = 3) \wedge (x + z = 3)) \rightarrow (y = z))$

    i) $\forall x \forall y(((x + 3) < (y + 3)) \rightarrow (x < y))$

    j) $\forall x((x < 2) \rightarrow ((x + 3) = 4))$

        1) ¿Cuáles de las fórmulas son enunciados?
        2) ¿Cuáles de las fórmulas son satisfacibles?
        3) ¿Cuáles de las fórmulas son universalmente válidas (tautologías)?
        4) Sea $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$-estructura que tiene como universo a $\mathbb{N}$ e interpreta los símbolos de $\mathcal{L}$ en la forma natural. ¿De cuáles de los enunciados anteriores es modelo $\mathfrak{A}$?
        5) Sea $\mathfrak{B}$ la $\mathcal{L}$-estructura cuyo universo es $\mathbb{R}$ e interpreta los símbolos de $\mathcal{L}$ en la forma natural. ¿Cuáles de los anteriores enunciados se cumplen en $\mathfrak{B}$?
        6) Haga una lista de los términos en las fórmulas.

11. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje que consiste en una relación binaria P y una 1-relación F. Interprete $P(x, y)$ como x es padre (o madre) de y y $F(x)$ como x es mujer.

    a) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_H(x, y)$ que exprese: x es hermano de y.

    b) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_T(x, y)$ que exprese que x es tía de y.

    c) Describa una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_P(x, y)$ que exprese que x y y son primos.

    d) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_U(x)$ que exprese que x es hijo único.

    e) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_2(x)$ que diga x que tiene exactamente dos hermanos.

12. Sea $\mathcal{L}_G$ el lenguaje $\{+, 0\}$, donde $+$ es una función binaria y 0 es una constante. Usamos $x + y$ para denotar $+(x, y)$. Considere los siguientes enunciados:

    - $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$
    - $\forall x((x + 0 = x) \wedge (0 + x = x))$

- $\forall x(\exists y(x+y=0) \wedge \exists z(z+x=0))$

Sea γ la conjunción de estos tres enunciados.

a) Muestre que γ es satisfacible y exhiba un modelo.

b) Muestre que γ no es una tautología.

c) Sea α el enunciado $\forall x \forall y((x+y) = (y+x))$. Muestre que α no es una consecuencia de γ.

d) Muestre que γ no es equivalente a la conjunción de cualesquier dos de los enunciados anteriores.

13. Sean $\mathcal{L}_N = \{+, \cdot, 1\}$ y $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$-estructura que tiene como universo $\mathbb{N}$ e interpreta el lenguaje en la forma natural.

a) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\varepsilon(x)$ tal que para toda $a \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \models \varepsilon[a]$ si y sólo si a es par.

b) Defina una $\mathcal{L}_N$-fórmula $\pi(x)$ tal que para toda $a \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \models \pi[a]$ si y sólo si a es primo.

c) Defina una $\mathcal{L}_N$-fórmula $\mu(x,y)$ tal que para cualesquier $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \models \mu[a,b]$ si y sólo si a y b son primos relativos.

d) Defina una $\mathcal{L}_N$-fórmula $\nu(x,y,z)$ tal que para cualesquier $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \models \nu[a,b,c]$ si y sólo si c es el menor número divisible entre a y b.

14. La conjetura de Goldbach afirma que todo entero par mayor que 2 es la suma de dos primos. No se sabe si esta conjetura es cierta o falsa. Exprese la conjetura de Goldbach como un $\mathcal{L}$-enunciado, donde $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$.

15. Sean $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ un lenguaje, y $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ la interpretación natural de $\mathcal{L}$ en los reales.

a) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\alpha(x)$ tal que para cada $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{R} \models \alpha[a]$ si y sólo si a es positivo.

b) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\beta(x,y)$ tal que para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{R} \models \beta[a,b]$ si y sólo si $a \leq b$.

c) Defina una $\mathcal{L}$-fórmula $\gamma(x)$ tal que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{R} \models \gamma[a]$ si y sólo si el valor absoluto de a es menor que 1.

16. Sea $\mathcal{L}$ y $\mathfrak{R}$ como en el ejercicio previo. Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f\}$ la expansión de $\mathcal{L}$ que se obtiene al añadir el símbolo de 1-función f. Defina un $\mathcal{L}'$-enunciado ζ tal que para cualquier expansión $\mathfrak{R}'$ de $\mathfrak{R}$ a $\mathcal{L}'$-estructura, $\mathfrak{R}' \models \zeta$ si y sólo si $\mathfrak{R}'$ interpreta f como una función continua.

17. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists^{\geq n}$ denota el cuantificador de conteo. Intuitivamente, $\exists^{\geq n}$ significa «existen al menos n elementos tales que...» La lógica de primer orden

con cuantificador de conteo es la lógica que se obtiene al añadir estos cuantificadores (para cada $n \in \mathbb{N}$) a los símbolos lógicos. Esta será, quizá, la primera experiencia del lector con una extensión de la lógica de primer orden, aunque es una extensión inocua. La sintaxis y la semántica de esta lógica se definen como sigue.

Sintaxis: para cualquier fórmula φ, $\exists^{\geq n} x\varphi$ también es una fórmula.

Semántica: $\mathfrak{M} \models \exists^{\geq n} x\varphi(x)$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \varphi(a_i)$ para $a_1, \ldots, a_n$ elementos distintos en el universo M.

a) Use el cuantificador de conteo para definir un enunciado φ_7 tal que $\mathfrak{M} \models \varphi_7$ si y sólo si $|M| > 7$.

b) Use el cuantificador de conteo para definir un enunciado φ_{45} tal que $\mathfrak{M} \models \varphi_{45}$ si y sólo si $|M| = 45$.

c) Defina un enunciado φ (sin usar $\exists^{\geq n}$) que sea equivalente al enunciado $\exists^{\geq n} x(x = x)$.

d) Muestre que toda fórmula que use $\exists^{\geq n}$ es equivalente a una fórmula que no use $\exists^{\geq n}$.

18. El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en un símbolo de 1-función f y un símbolo de 2-función g. Considere los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\equiv \exists x \exists y f(g(x,y)) = f(x)\\
\psi_2 &\equiv \forall x \forall y f(g(x,y)) = f(x)\\
\psi_3 &\equiv \exists y \forall x f(g(x,y)) = f(x)\\
\psi_4 &\equiv \forall x \exists y f(g(x,y)) = f(x)\\
\psi_5 &\equiv \exists x \forall y f(g(x,y)) = f(x)\\
\psi_6 &\equiv \forall y \exists x f(g(x,y)) = f(x).
\end{aligned}$$

Tome en cuenta las $\mathcal{L}$-estructuras con el mismo universo $\mathbb{N} - \{0\}$, donde g se interpreta como $g(m,n) = m + n$ y f se interpreta como

a) $f(x) = 1009$.

b) $f(x) =$ el residuo de x entre 10.

c) $f(x) = \text{ínf}(x^2 + 2, 19)$.

d)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \\ \text{el menor divisor primo de } x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Determine si cada una de las seis fórmulas se satisfacen o no en cada una de las cuatro estructuras.

19. Suponga que $\mathcal{L}$ está constituido por un símbolo de 1-predicado P y un símbolo de 2-predicado R. Se tienen las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv \exists x \forall y \exists z((P(x) \to R(x,y)) \wedge P(y) \wedge \neg R(y,z))\\
\sigma_2 &\equiv \exists x \exists z((R(z,x) \to R(x,z)) \to \forall y R(x,y))\\
\sigma_3 &\equiv \forall y(\exists z \forall t R(t,z) \wedge \forall x(R(x,y) \to \neg R(x,y))\\
\sigma_4 &\equiv \exists x \forall y((P(y) \to R(y,x) \to ((P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))\\
\sigma_5 &\equiv \forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to ((P(y) \wedge \neg R(y,x)) \to \exists z(\neg R(z,x) \wedge \neg R(y,z)))\\
\sigma_6 &\equiv \forall z \forall u \exists x \forall y((R(x,y) \wedge P(u)) \to (P(y) \to R(z,x)).
\end{aligned}$$

Determine si cada una de estas fórmulas se satisface en cada una de las siguientes $\mathcal{L}$-estructuras:

$\mathfrak{A}_1$ El universo es $\mathbb{N}$, $R(x,y) \equiv \leq$ y $P(x) \equiv x$ es par.

$\mathfrak{A}_2$ El universo es $Pot(\mathbb{N})$ (el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{N}$), R es $\subseteq$ y $P(x) \equiv x$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

$\mathfrak{A}_3$ El universo es $\mathbb{R}$, $R(a,b)$ si $b = a^2$ y $P^{\mathfrak{A}_3} = \mathbb{Q}$.

20. El lenguaje $\mathcal{L}$ tiene dos símbolos de 1-función f y g.

a) Encuentre tres $\mathcal{L}$-enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ tales que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M} = \langle M, f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$ se cumpla:

$\mathfrak{M} \models \varphi_1$ si y sólo si $f^{\mathfrak{M}} = g^{\mathfrak{M}}$ y $f^{\mathfrak{M}}$ es una función constante;
$\mathfrak{M} \models \varphi_2$ si y sólo si $Im(f) \subseteq Im(g)$;
$\mathfrak{M} \models \varphi_3$ si y sólo si $Im(f) \cap Im(g)$ contiene un solo elemento.

b) Considere las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\equiv \forall x f(x) = g(x)\\
\delta_2 &\equiv \forall x \forall y f(x) = g(y)\\
\delta_3 &\equiv \forall x \exists y f(x) = g(y)\\
\delta_4 &\equiv \exists x \forall y f(x) = g(y)\\
\delta_5 &\equiv \exists y \exists x f(x) = g(y).
\end{aligned}$$

Encuentre un modelo para las siguientes fórmulas:

1) $\delta_1 \wedge \neg\delta_2$
2) δ_2
3) $\neg\delta_1 \wedge \delta_3$
4) $\neg\delta_1 \wedge \delta_4$
5) $\neg\delta_3 \wedge \neg\delta_4 \wedge \delta_5$

6) $\neg\delta_5$.

21. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1,\ldots,v_k)$, la expresión $\exists\,!v_1\varphi$ denota la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\exists\, v_1(\varphi(v_1,\ldots,v_k)\wedge\forall\, v_{k+1}(\varphi(v_{k+1},v_2,\ldots,v_k)\to v_{k+1}=v_1))m$$

donde $\exists\,!v_1\varphi$ se lee «existe un único v_1 tal que φ».

Note que en cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, $\exists\,!v_1\varphi$ se satisface con $(v,a_2,\ldots,a_k)$ si y sólo si existe un único elemento $a\in A$ tal que $(a,a_2,\ldots,a_k)$ satisface φ.

Sea $\varphi(v_1,v_2)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Encuentre un $\mathcal{L}$-enunciado ψ que se satisfaga en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ respecto a α si y sólo si existe una única pareja $(a,b)\in A^2$ tal que

$$\mathfrak{A}\models\varphi[\alpha^{v_1/a,v_2/b}].$$

¿Son equivalentes las fórmulas ψ, $\exists\,!v_1\exists\,!v_2\varphi$ y $\exists\,!v_2\exists\,!v_1\varphi$?

[Sugerencia: puede tomar como ψ la fórmula

$$\exists\, v_0\exists\, v_1(\varphi\wedge\forall\, v_2\forall\, v_3(\varphi(v_2/v_0,v_3/v_1)\to(v_2=v_0\wedge v_3=v_1))).$$

Haga $\gamma\equiv\exists\,!v_0\exists\,!v_1\varphi$ y $\theta\equiv\exists\,!v_1\exists\,!v_0\varphi$. Si el lenguaje $\mathcal{L}$ tiene sólo un símbolo de 2-relación R y si φ es la fórmula $R(v_0,v_1)$, entonces la $\mathcal{L}$-estructura $\langle\mathbb{N},\leq\rangle$ es un modelo de θ pero no de γ ni de ψ. En efecto, se cumple

$$\{a\in\mathbb{N}:\langle\mathbb{N},v_0\mapsto a\rangle\models\exists\,!v_1R(v_0,v_1)\}=\varnothing$$

(ningún entero tiene una única cota superior);

$$\{b\in\mathbb{N}:\langle\mathbb{N},v_1\mapsto b\rangle\mapsto\exists\,!v_0R(v_0,v_1)\}=\{0\}$$

(0 es el único natural que tiene cota inferior única).

Así que es cierto que existe un único natural que tiene una única cota inferior, pero es falso que exista un único natural que tenga una única cota superior. Ya que es falso que exista una única pareja $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ con $a\leq b$, tenemos un modelo de θ, de $\neg\gamma$ y de $\neg\varphi$. Obtenemos un modelo de γ y $\neg\theta$ si consideramos la estructura $\langle\mathbb{N},\geq\rangle$. Esto demuestra que las fórmulas φ,γ y θ no son equivalentes entre sí.]

22. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\theta(x,y)$ una $\mathcal{L}$-fórmula.

a) ¿Se satisface la $\mathcal{L}$-fórmula

$$\forall\, x\exists\, y\theta(x,y)\to\exists\, y\forall\, x\theta(x,y)$$

en cualquier $\mathcal{L}$-estructura?

b) La misma pregunta, pero para la fórmula

$$\exists y \forall x \theta(x,y) \to \forall x \exists y \theta(x,y).$$

23. En este ejercicio R es una 2-relación, $*, \oplus$ son 2-funciones y c, d son símbolos de constante. Escribimos $x \oplus y$, $x * y$ en lugar de $\oplus(x,y)$ y $*(x,y)$, respectivamente. Asimismo, $x^2 = x * x$.

❶ En cada uno de los siguientes casos ($1 \leq i \leq 6$), se dan un lenguaje $\mathcal{L}_i$ y dos $\mathcal{L}_i$-estructuras $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$. Se requiere dar $\mathcal{L}_i$-enunciados que sean ciertos en $\mathfrak{A}_i$ y falsos en $\mathfrak{B}_i$.

1) $L_1 = \{R\}$, $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathfrak{B}_1 = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$
2) $L_2 = \{R\}$, $\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathfrak{B}_2 = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$
3) $L_3 = \{*\}$, $\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$, $\mathfrak{B}_3 = \langle Pot(\mathbb{N}), \cap \rangle$
4) $L_4 = \{c, *\}$, $\mathfrak{A}_4 = \langle \mathbb{N}, 1, \cdot \rangle$, $\mathfrak{B}_4 = \langle \mathbb{Z}, 1, \cdot \rangle$
5) $L_5 = \{c, d, \oplus, *\}$, $\mathfrak{A}_5 = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, $\mathfrak{B}_5 = \langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$
6) $L_6 = \{R\}$, $\mathfrak{A}_6 = \langle \mathbb{Z}, \ \text{mód}\ _2 \rangle$, $\mathfrak{B}_6 = \langle \mathbb{Z}, \ \text{mód}\ _3 \rangle$.

❷ Para cada uno de los siguientes enunciados del lenguaje $\mathcal{L} = \{c, \oplus, *, R\}$, encuentre un modelo del enunciado y uno de su negación.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \equiv & \forall u \forall v \exists x (\neg(v = c) \to u \oplus (v * x) = c) \\
\varphi_2 \equiv & \forall u \forall v \forall w \exists x (\neg(w = c) \to u \oplus (v * x) \oplus (w * x^2) = c) \\
\varphi_3 \equiv & \forall x \forall y \forall z (R(x,x) \wedge ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)) \wedge \\
& (R(x,y) \to R(y,x)) \\
\varphi_4 \equiv & \forall x \forall y \forall z (R(x,x) \to R(x * z, y * z)) \\
\varphi_5 \equiv & \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)).
\end{aligned}$$

24. El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en un símbolo de 1-función f. Sea ζ la siguiente fórmula:

$$\forall x (fffx) = x \wedge \neg f(x) = x).$$

Para todo entero $n \in \mathbb{N}^+$, sea φ_n la siguiente fórmula:

$$\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \forall x \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right) \wedge \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} x = x_i \right) \right).$$

a) Muestre que la siguiente fórmula es una consecuencia lógica de ζ:

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y \forall z (\neg ff(x) = x \wedge \neg ff(x) = f(x) \wedge f(y) = x \\
\wedge (f(z) = x \to z = y)).
\end{aligned}$$

b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}^+$, la fórmula $\zeta \wedge \varphi_n$ tiene un modelo si y sólo si n es múltiplo de 3.

c) Exhiba un modelo numerable de la fórmula ζ.

d) Muestre que todos los modelos numerables de ζ son isomorfos.

[Sugerencia: Si $\mathfrak{A}$, B son $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que son isomorfas cuando ocurre lo siguiente.

- Existe una biyección $f : A \longrightarrow B$.
- Para cada símbolo de constante c, se cumple que

$$f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

- Si h es un símbolo de n-función de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, y $a_1, \ldots, a_n$ son elementos arbitrarios de A, ocurre que

$$f(h^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = h^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

- Si R es un símbolo de n-relación en $\mathcal{L}$, y $a_1, \ldots, a_n$ son elementos arbitrarios de A, se cumple que

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad R^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

(a) Sea $\mathfrak{M} = \langle M, f^{\mathfrak{M}} \rangle$ un modelo de ζ, si un elemento $a \in M$ satisface $f^{\mathfrak{A}}$ $(f^{\mathfrak{M}}(a)) = a$ y aplicamos $f^{\mathfrak{M}}$ otra vez, obtenemos $f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))) = f^{\mathfrak{M}}(a)$; pero como ζ se satisface en $\mathfrak{M}$, tenemos $f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))) = a$, por lo que $a = f^{\mathfrak{M}}(a)$, lo que está excluido (también por ζ). En forma similar, si suponemos $f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a)) = f^{\mathfrak{M}}(a)$, obtenemos $f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))) = f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))$, es decir, $a = f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))$, lo que, como hemos visto, es imposible. En consecuencia, la estructura satisface la siguiente fórmula ψ:

$$\forall x(\neg(ff(x) = x) \wedge \neg(ff(x) = f(x))).$$

Más aún, si $b = f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))$, se cumple $f^{\mathfrak{M}}(b) = a$ y todo elemento $c \in M$ que satisface $f^{\mathfrak{M}}(c) = a$ también satisface $f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(c))) = f^{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))$, así que $c = b$. En otras palabras, todo elemento de M tiene una única preimagen respecto a $f^{\mathfrak{M}}$ (por lo que es biyectiva) y $\mathfrak{M}$ satisface la fórmula θ:

$$\forall x \exists y \forall z(f(y) = x \wedge (f(z) = x \to z = y)).$$

Muestre que la fórmula $(\psi \wedge \theta)$ es equivalente a la fórmula propuesta en el enunciado del ejercicio. Así que esta fórmula se satisface en cada modelo de ζ, es decir, es una consecuencia de ζ.

(b) Sean $n \in \mathbb{N}^+$ y $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathfrak{N}} \rangle$ un modelo de $\zeta \wedge \varphi_n$. Defina una relación binaria ρ en N como sigue: para cualesquier $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \rho$ si y sólo si $a = b$

o $a = f^{\mathfrak{N}}(b)$ o $a = f^{\mathfrak{N}}(f^{\mathfrak{N}}(b))$. Verifique que ρ es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de a es su órbita respecto a $f^{\mathfrak{N}}$, pues contiene los tres elementos $a, f^{\mathfrak{N}}(a)$ y $f^{\mathfrak{N}}(f^{\mathfrak{N}}(a))$ (que son distintos entre sí) y sólo a ellos. Así que toda clase de equivalencia contiene tres elementos. Ya que éstas constituyen una partición de $\mathbb{N}$ que tiene n elementos, concluimos que n es un múltiplo de 3.

Recíprocamente, para todo entero $p > 0$, podemos construir un modelo $\mathfrak{M}_p$ de $\zeta \wedge \varphi_{3p}$ que contenga $3p$ elementos de la siguiente forma: como universo tomamos $M_p = \{0,1,2\} \times \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ y como la interpretación de f tomamos la función f_p definida como sigue: para toda pareja $(i,j) \in M_p$, $f_p(i,j) = (i + 1 \mathrm{mod} 3, j)$.

(c) Es suficiente probar que para toda $p \in \mathbb{N}^+$, los modelos de $\zeta \wedge \varphi_{3p}$ son isomorfos. Considere un entero $p > 0$ y un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, g\rangle$ de $\zeta \wedge \varphi_{3p}$. Hay p clases para la relación de equivalencia ρ definida como en (b). Denótelas con $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$ y escoja un elemento b_i en cada B_i.

Defina una aplicación $h : M \longrightarrow \{0,1,2\} \times \{0,1,\ldots,p-1\}$ por

$$\begin{aligned} h(b_i) &= (0,i); \\ h(g(b_i)) &= (1,i) \forall\, i \in \{0,1,\ldots,p-1\} \\ h(g(g(b_i))) &= (2,i). \end{aligned}$$

h es un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}_p$ definido en (b), pues las clases están en correspondencia una con otra y para toda $a \in M$, se cumple

$$h(g(a)) = f_p(h(a)).$$

(d) Es suficiente generalizar la construcción de los modelos $\mathfrak{M}_p$ de (b). Esta vez tomamos $\{0,1,2\} \times \mathbb{N}$ como universo. La interpretación de φ es la única función definida en este conjunto que extiende a cada f_p (donde la definición de f_p es la misma excepto que el índice j puede tomar cualquier valor entero).

(e) Generalice (c), para lo cual considere un modelo infinito numerable de ζ. Esta vez hay una cantidad infinita numerable de clases de equivalencia para ρ; denótelas con $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Otra vez, seleccione una sucesión $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $b_n \in B_n$ para toda n, y defina un isomorfismo entre este modelo y el definido en (d) exactamente como h está definida en (c), con la única diferencia de que n varía sobre $\mathbb{N}$. ¡Verifíquelo! Todos los modelos infinitos numerables de ζ son isomorfos (ya que son isomorfos a los modelos que hemos construido).]

25. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\varphi(x)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Muestre que existe un $\mathcal{L}$-enunciado ψ tal que $\mathfrak{A} \models \psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \exists! x \varphi(x)$ (véase el ejercicio 21).

26. Sean n un natural positivo y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Denote con $Fml(x, \mathcal{L})$ el con-

junto de $\mathcal{L}$-fórmulas que tienen a x como variable libre. En este conjunto defina una relación binaria: si $\varphi(x), \psi(x) \in Fml(x, \mathcal{L})$, $\varphi \sim \psi$ si y sólo si $\varphi(\mathfrak{A}) = \psi(\mathfrak{A})$, donde, anticipándonos a un tratamiento detallado: si $\theta(\vec{x})$ es una fórmula,

$$\theta(\mathfrak{A}) = \{\vec{a} \in A^n : \mathfrak{A} \models \theta[\vec{a}]\}$$

es el conjunto definido por θ en $\mathfrak{A}$. Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

27. Exprese las siguientes afirmaciones como enunciados existenciales. Suponga que las variables refieren a números naturales.

    a) La ecuación $x^3 = 27$ tiene una solución número natural.

    b) $100^{1000^{1000000}}$ no es el mayor número natural.

    c) El número natural n no es primo.

28. Enuncie las siguientes aseveraciones mediante el cuantificador universal. Suponga que las variables refieren a números naturales.

    a) La ecuación $x^3 = 28$ no tiene como solución un número natural.

    b) 0 es menor que cualquier otro número.

    c) El número natural n es primo.

29. Emplee cuantificadores para expresar lo siguiente. En cada caso, los cuantificadores pueden referirse a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{N}$, pero no a ambos.

    a) La ecuación $x^2 + a = 0$ tiene raíz real para cualquier número real a.

    b) La ecuación $x^2 + a = 0$ tiene raíz real para cualquier real negativo a.

    c) Todo número real es racional.

    d) Existe un número irracional.

    e) No existe un número irracional más grande que el resto.

30. Considere la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$. Recuerde que una relación en $\mathbb{N}$ es simplemente un conjunto de parejas ordenadas de números naturales, esto es $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Defina una de tales relaciones R estableciendo que $R(x, y)$ se cumple si $y = x^2$. Se sigue que esta relación R representa a la función f. Dada una función arbitraria $f : A \longrightarrow A$, donde A es un conjunto, «sustituya» esta función por una relación R en A. En forma similar, una relación de A en B es simplemente un subconjunto $R \subseteq A \times B$. Dé condiciones que garanticen que una relación $R \subseteq A \times B$ representa a una función $f : A \longrightarrow B$.

31. Considere el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, +, s\}$ en el que s es un símbolo de 1-función. Si interpretamos $s(n) = n + 1$. ¿Cómo son los términos en este lenguaje? Con estos símbolos exprese al 5 y al 7. Escriba una fórmula que diga 5 no es igual a 7.

32. El lenguaje de la teoría de conjuntos LTC es muy simple. A saber

$$\mathcal{L} = LTC = \{=, \in\}.$$

Describa como son los LTC-términos y las LTC-fórmulas primitivas. Expanda LTC añadiendo un símbolo de constante $\varnothing$, que se interpreta como el conjunto vacío. Escriba una fórmula en este lenguaje que exprese que existe un único conjunto vacío.

Dé una fórmula que exprese que cualesquier dos conjuntos son ajenos entre sí o tienen al menos un elemento en común. Describa una fórmula que exprese que un conjunto es subconjunto de otro, y otra que establezca que un conjunto está contenido en el complemento del otro.

33. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje que consiste en los símbolos de función m, p; 1-predicados H, M; 2-relaciones A, C y Q; constantes a, b, c, d. Se pretende que estos símbolos representen lo siguiente

- $m(x)$ x es madre de;
- $p(x)$ x es padre de;
- $H(x)$ x es hombre;
- $M(x)$ x es mujer;
- $A(x, y)$ x es padre/madre de y;
- $C(x, y)$ x es hijo(a) de y;
- $Q(x, y)$ x quiere a y.
- a, b, c, d representan a las personas: Jaime, Marcela, Udo, Ada.

Considere que estamos en la tierra y todos estos símbolos se interpretan en el conjunto de seres humanos. Proporcione ejemplos de término y fórmulas atómicas. Dé fórmulas para expresar lo siguiente.

a) Jaime es abuelo de Udo.

b) Ada es sobrina de Marcela.

c) existen dos seres humanos que no son hemanos.

d) todo ser humano es hijo de algunos padres.

e) x es tío de y

f) Jaime es tatarabuelo de alguien.

g) Marcela es prima de Ada.

h) Marcela y Ada son hermanas.

En este orden de ideas, $Ancestro(x, y)$ querría decir que x es ancestro de y, esto es, x es padre, o abuelo, o bisabuelo, o tatarabuelo, etc. de y. ¿Es posible escribir esta fórmula?

34. Considere el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, s, +\cdot, E, <\}$. La mayoría de estos símbolos ya se han explicado, mientras que $e(x, y)$ es una 2-función que expresa x^y. Suponga que interpreta este lenguaje en $\mathbb{N}$ en forma natural. ¿se puede escribir una fórmula que enuncie el teorema de Lagrange (todo número es la suma de cuatro cuadrados)? Escriba fórmulas que expresen lo siguiente.

    a) No existe un primo mayor que el resto.

    b) La conjetura de los números gemelos: existe una infinidad de números x, y tales que x, y son primos y $y = x + 2$.

    c) El teorema del hueco acotado (demostrado en 2013): existen una infinidad de primos que difieren en 70000000 o menos.

    d) x es el mínimo común múltiplo de y, z.

    e) x es factor de y.

    f) x es una raíz de un polinomio de grado 5

35. Suponga que B, P, S, Q, T son símbolos de relación que expresan $B(x)$ $x \equiv$ lee libros buenos, $P(x) \equiv x$ es profesor, $S(x) \equiv x$ es estudiante, $Q(x, y) \equiv x$ es más inteligente que y, $T(x, y) \equiv x$ ve más TV que y. Suponga que a, b, c son constantes que representan Ada, Benito y Carlos, respectivamente. Encuentre fórmulas que expresen lo siguiente.

    a) Ada y Benito son profesores que no leen libros buenos.

    b) No existe ningún profesor que vea más TV que un estudiante.

    c) Carlos es más inteligente que cualquier estudiante que ve más TV que Ada.

    d) Traduzca al español en forma coherente, bien redactado.

        1) $\forall x(S(x) \to B(x))$
        2) $\forall x(B(x) \to \exists y(Q(x, y) \wedge \neg B(y)))$.

36. Suponga que B, F, K son símbolos de relación tales que $B(x) \equiv x$ es matemático, $F(x) \equiv x$ es filósofo, $K(x, y) \equiv x$ conoce a y. Suponga que a, b, c son símbolos de constante que representan a Cantor, Hausdorff, Zermelo. Escriba fórmulas que expresen lo siguiente.

    a) Cantor es filósofo y matemático.

    b) Todos los matemáticos son filósofos

    c) Ningún filósofo es matemático

    d) Cantor conoce un filósofo.

    e) Hausdorff conoce a todos los filósofos.

    f) Zermelo sólo conoce matemáticos.

    g) Cualquiera conoce a un filósofo

h) Cualquiera conoce a alguien que conoce a un filósofo.

i) Traduzca al español en forma coherente.

1) $\neg\exists\, x(B(x) \vee F(x))$.
2) $\exists\, x(K(a,x) \wedge \neg B(x))$
3) $\forall\, x,y((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow K(x,y))$
4) $\exists\, x \forall\, y(F(y) \rightarrow K(x,y))$.

.

37. ¿Qué propiedades tiene la relación $\geq$ en los reales?

38. Considere la relación de la figura, ¿Qué propiedades tiene esta relación?

Ejercicio 38

39. Examine la figura ¿Cuáles propiedades puede identificar?

Ejercicio 39

40. Estas son siete relaciones binarias en el conjunto $\{1,2,3\}$. Para cada una establezca si es: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, o irreflexiva.

a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
b) $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$
c) $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$.
d) $R_4 = \varnothing$
e) $R_5 = \{(1,2)\}$.
f) $R_6 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
g) $R_7 = \{(3,3),(3,2),(2,1)\}$.

41. A continuación algunas relaciones binarias en el conjunto $\{a,b,c\}$.

① $S_1 = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$.
② $S_2 = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$.
③ $S_3 = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$.
④ $S_4 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$.
⑤ $S_5 = \{(a,a),(b,c),(c,b)\}$.

a) ¿Qué le falta a S_1 para hacerla reflexiva?

b) ¿Qué elemento falta en S_2 para que sea simétrica?

c) ¿Qué le falta a S_3 para ser transitiva?

d) ¿Qué debemos quitar de S_4 para volverla antisimétrica?

e) ¿Qué quitar de S_5 para convertirla en irreflexiva?

f) ¿Cuáles de estas relaciones son reflexiva? ¿simétricas? ¿transitivas?

42. Si $d, n \in \mathbb{N}$, $d|n$ (d divide a n) cuando existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $dm = n$. Sean $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{6, 8, 10\}$ y R la relación de A en B definida por xRy si y sólo si $x|y$. Escriba R como conjunto de parejas ordenadas.

43. (a) ¿Puede ser una relación simétrica y antisimétrica? (¡Explique!) (b) ¿Puede ser una relación reflexiva e irreflexiva?

44. (a) Suponga que R, S son relaciones de equivalencia y $T = R \cap S$. Muestre que T es de equivalencia.

    (b) Verifique que no siempre ocurre que si R, S son de equivalencia, también $R \cup S$ lo es.

45. Una relación R es asimétrica, cuando para cualesquier x, y con xRy, no ocurre yRx. ¿Es cierto que una relación es asimétrica si y sólo si es antisimétrica?

46. Si $f : X \longrightarrow Y$ y $C, D \subseteq X$, $U, V \subseteq Y$, muestre lo siguiente.

    a) $f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D]/$

    b) $f[C \cup D] = f[C] \cup f[D]$.

    c) $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$.

    d) $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.

    e) Si f es inyectiva, $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$.

    f) Suponga que $A, B \subseteq X$ y f es inyectiva, muestre que si $f[A] \subseteq f[B]$, entonces $A \subseteq B$.

    g) Si $U \subseteq V$, $f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[V]$.

    h) Si f es sobre y $f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[V]$, entonces $U \subseteq V$.

    i) $C \subseteq f^{-1}[f[C]]$.

    j) Suponga que f es inyectiva y $x \in X$, corrobore que si $f(x) \in f[A]$, entonces $x \in A$.

    k) Suponga que f es inyectiva, $C = f^{-1}[f[C]]$.

    l) Suponga que $A = f^{-1}[f[A]]$ para todo subconjunto finito $A \subseteq X$. Confirme que f es inyectiva.

    m) $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$.

n) Suponga que f es sobre, $f[f^{-1}[U]] = U$.

ñ) Sea $\{C_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X. Verifique que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} C_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[C_i].$$

47. Si $E \subseteq \mathbb{N}$ es el conjunto de los números pares, demuestre que $|\mathbb{N}| = |E|$ y que si I es el de los impares, $|\mathbb{N}| = |I|$.

48. Sean A, B conjuntos finitos, $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $|A| = n$, $|B| = m$. Verifique que existe una función biyectiva $h : A \longrightarrow B$ si y sólo si $n = m$.

49. Sean A un conjunto y n un natural. Si $A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ es inyectiva y sobre, confirme que $|A| = n$.

50. Si A, B son conjuntos finitos, muestre que así lo es $A \times B$.

51. Si $f : A \longrightarrow B$ es sobre y A es finito, así lo es B.

52. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : n \longrightarrow A$ sobre. Confirme que A es finito.

53. Suponga que $\mathfrak{M}$ es un modelo del lenguaje $\{a, b, c, s, f, g\}$ con universo $\mathbb{N}$, $a^{\mathfrak{M}} = 1$, $b^{\mathfrak{M}} = 2$, $c^{\mathfrak{M}} = 3$, $s(x) = x + 1$, $f^{\mathfrak{M}}(x) = 2x$, $g^{\mathfrak{M}}(x, y) = (x \cdot y) + 1$. Evalúe los siguientes términos.

a) $f^{\mathfrak{M}}(a)$.

b) $f^{\mathfrak{M}}(b)$

c) $(f(f(c)))^{\mathfrak{M}}$

d) $g^{\mathfrak{M}}(a, c)$.

e) $(f(g(b, c)))^{\mathfrak{M}}$.

f) $(g(g(a, a), g(c, c)))^{\mathfrak{M}}$.

54. Sea $\mathfrak{M}$ un modelo con universo $\mathbb{N}$ y suponga lo siguiente.

- $a^{\mathfrak{M}} = 2$, $b^{\mathfrak{M}} = 3$, $c^{\mathfrak{M}} = 4$.
- $f^{\mathfrak{M}}(x) = x + 2$
- $g^{\mathfrak{M}}(x, y) = x + y$
- $R^{\mathfrak{M}}(x, y)$ si $x < y$.

a) Evalúe $(g(f(a), g(b, c)))^{\mathfrak{M}}$.

b) ¿Es cierto que $\mathfrak{M} \models R(g(a, b), c)$?

c) ¿Se cumple $\mathfrak{M} \models R(g(a, b), f(b))$?

d) ¿Es cierto que $\mathfrak{M} \models R(b, b)$?

55. Demuestre las siguientes aseveraciones.

    a) $\neg\forall x\varphi(x)$ no es equivalente a $\forall x\neg\varphi(x)$

    b) $\neg\exists x\varphi(x)$ no es equivalente a $\exists x\neg\varphi(x)$.

    c) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ no es equivalente a $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$.

    d) $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ no es equivalente a $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))$.

    e) $\exists x(P(x)\to Q(x))$ no es equivalente a $\exists x(\neg P(x)\wedge Q(x))$.

56. Decida, en cada inciso, qué fórmula es consecuencia lógica de cuál(es).

    a) $\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$, $P(a)\wedge P(b)$.

    b) $\forall x\exists yR(x,y)$, $\exists y\forall xR(x,y)$, $\forall x,yR(x,y)$, $\exists x,yR(x,y)$.

    c) $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$, $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$, $\exists xP(x)$, $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.

    d) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$, $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$, $\forall xP(x)$, $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$.

57. Demuestre que la fórmula $\forall x,y,z(R(x,y)\wedge R(y,z)\to R(x,z))$ es cierta en un modelo $\mathcal{M}$ si y sólo si R se interpreta como una relación transitiva.

58. ¿Son equivalentes las dos siguientes fórmulas? Dé una prueba o un contrajemplo: $\forall xP(x)\wedge\forall x(P(x)\to Q(x))$, $\forall xQ(x)$.

59. Construya un modelo que satisfaga $\exists xP(x)$ y $\forall x\neg Q(x)$.

60. Describa una estructura que satisfaga las fórmulas $P(a)\wedge P(b)$, $\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$, $\exists xQ(x)$.

61. Corrobore que la fórmula $(\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ es válida.

62. Confirme que la fórmula $\forall xR(x,x)\to\forall x\exists yR(x,y)$ es válida.

63. ¿Son las fórmulas $\exists xP(x)$, $\forall x(P(x)\to Q(x))$ y $\exists x\neg Q(x)$ satisfacibles en el mismo modelo?

64. Constate que las siguientes fórmulas son válidas.

    a) $P(a)\vee P(b)\to\exists xP(x)$

    b) $\forall xP(x)\to P(a)\wedge P(b)$.

65. ¿Qué puede decir sobre la veracidad de la fórmula $\forall xP(x)\to\exists xP(x)$?

66. Verifique que las siguientes fórmulas son válidas.

    a) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\exists xP(x)\vee Q(b))$.

    b) $(\forall xR(x,a)\vee\forall xR(x,b))\to\forall x(R(x,a)\vee R(x,b))$.

67. Confirme que las siguientes fórmulas se pueden hacer falsas.

a) $(\exists\, xP(x) \wedge \exists\, xQ(x)) \rightarrow \exists\, x(P(x) \wedge Q(x))$.

b) $\forall\, x(R(x,a) \vee R(x,b)) \rightarrow \exists\, x(R(a,x) \wedge R(b,x))$.

c) $(\forall\, xR(x,a) \vee \forall\, xR(x,b)) \rightarrow \forall\, x(R(a,x) \vee R(b,x))$.

d) $\forall\, x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists\, xP(x) \rightarrow \forall\, xQ(x))$.

68. Encuentre un lenguaje finito $\mathcal{L}$ y un conjunto finito de $\mathcal{L}$-enunciados S que tenga un modelo infinito pero no uno finito.

69. Averigüe si el enunciado

$$\varphi \equiv \exists\, x[G(x) \vee F(x)] \rightarrow [\exists\, xF(x) \rightarrow \exists\, x\neg G(x)]$$

es lógicamente válido o no, dé la prueba o contraejemplo correspondiente.

70. Sean $\varphi(x,y)$ una fórmula y f un símbolo de 1-función que no aparece en φ. Muestre que el enunciado $\forall\, x\varphi(x,f(x)) \rightarrow \forall\, x\exists\, y\varphi(x,y)$ es válido pero $\forall\, x\ \exists\, y\ \varphi(x,y) \rightarrow \forall\, x\ \varphi(x,f(x))$, no lo es.

71. Suponga que $\mathcal{L} = \{R,=\}$, donde R es un 2-predicado. Sean U un conjunto, y $Pot(U)$ el conjunto potencia de U, es decir, la colección de todos los subconjuntos de U. Suponga que R se interpreta como la relación $\subseteq$. Decida si las siguientes fórmulas son verdaderas o falsas en el modelo $\mathfrak{M}$. ¡Explique!

a) $\exists\, x(x = x)$

b) $\forall\, x,y(x = y)$.

c) $\exists\, x\forall\, yR(x,y)$.

d) $\forall\, x\exists\, y(\neg(x = y) \wedge R(x,y))$.

e) $\forall\, x,y\exists\, x\forall\, t(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge R(t,y) \rightarrow R(t,z))$.

72. Considere el lenguaje $\mathcal{L} = \{c,f,R\}$, R una 2-relación, c un símbolo de constante, $\forall$ 1-función. Encuentre una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M}$ con universo $M = \{1,2,3\}$ que valide la fórmula $\forall\, xR(x,f(x))$. Después, sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura con universo $\{0,1,2,3\}$ tal que

- $c^{\mathfrak{M}} = 0$.
- $f^{\mathfrak{M}} = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\}$
- $R^{\mathfrak{M}} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,3),(2,3)\}$.

Determine cuáles de las siguientes fórmulas se cumplen en $\mathfrak{M}$.

a) $R(c,f(c))$

b) $\forall\, xR(x,x)$

c) $\forall\, x(x = c \vee R(c,x))$

d) $\forall x \exists y(f(y) = x)$

e) $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(f(x), f(y)))$.

73. Suponga que $\mathcal{L} = \{R, =\}$, donde R es una 2-relación y sea $\mathfrak{M}$ un modelo con universo $Pot(U)$, donde U es un conjunto, R se interpreta en $\mathfrak{M}$ como $\subseteq$, mientras que $=$ tiene la interpretación natural. Decida si las siguientes fórmulas son válidas en $\mathfrak{M}$.

a) $\exists x(x = x)$.

b) $\forall x, y(x = y)$

c) $\exists x \forall y R(x,y)$.

d) $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge R(x,y))$

e)
$$\forall x, y \exists z \forall t(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (R(t,x) \wedge R(t,y) \to R(t,z))).$$

In icuac huetzi intlan pipiltotonti, in tenanhuan itlacoyocco contlaza in quimichin, anoce inpilhuan quimilhuia: «Itlacoyocco xictlali in quimichin». Yehica quil intlacamo yuh quichihuazque, amo huel ixhuaz in itlan piltontli, zan tlancotoctic yez.

Cuando caen los dientes de los niños, sus madres los echan en el agujero del ratón, o quizá les dicen a sus hijos: «Ponlo en el agujero del ratón». «Porque dizque si así no lo hicieran, no podrían nacer los dientes de los niños, sólo serían desdentados».

Códice Florentino , libro V, capítulos 4, 5

3

Estructuras y semántica

En el capítulo 2 introdujimos la sintaxis y la semántica de la lógica de predicados. Estudiamos con detalle estos dos aspectos, ilustrándolos con variados ejemplos, y examinamos algunos lenguajes particulares, las estructuras donde se interpretan, etc. Para una primera incursión en la lógica matemática eso podría ser suficiente para el lector. Para aquellos estudiosos que quieran profundizar más en el asunto presentamos este apartado, donde establecemos diversas estructuras particulares de gran relevancia en matemáticas y las analizaremos mediante la lógica de primer orden; trataremos otros asuntos relevantes asociados a lenguajes, fórmulas y modelos

Antes de tratar ejemplos de estructuras particulares, consideremos el siguiente ejemplo importante.

Ejemplo 3.0.1. Existen enunciados de la lógica de primer orden que no admiten modelos finitos. Podemos lograr tal ejemplo con un lenguaje muy simple, a saber, $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una 2-relación, donde tenemos los siguientes $\mathcal{L}$-enunciados,

- $\varphi_1 \equiv \forall x \exists y R(x,y)$.
- $\varphi_2 \equiv \forall x \neg R(x,x)$.
- $\forall x,y,z[R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)]$.

Considere $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$, y se afirma que φ no tiene modelos finitos. Primero nos cercioramos de que φ sí tiene un modelo. Para ellos tomamos $\mathfrak{A}$ con dominio $\mathbb{R}$ e interpretamos R como la relación de orden $<$. Es claro que $\mathfrak{A}$ es modelo de φ y que es infinito, pero esto no es motivo suficiente para pensar que cualquier otro modelo de φ tenga que ser infinito.

Para corroborar nuestra afirmación consideramos un $\mathcal{L}$-modelo arbitrario $\mathfrak{D} = \langle D, \rho \rangle$, donde D es un conjunto no vacío y ρ una relación binaria en D que interpreta a R. Dado que D no es vacío, tomamos $d_1 \in D$; por φ_1 debe existir $d_2 \in D$ con $R(d_1, d_2)$; según φ_2, $d_1 \neq d_2$, de donde se deduce que D tiene al menos dos elementos. Continuamos de este modo, para d_2 debe existir d_3 con $R(d_2, d_3)$ y como antes $d_2 \neq d_3$. Según φ_3, $R(d_1, d_3)$ y por φ_2, $a_1 \neq a_3$. Se infiere que D tiene al menos tres elementos y si proseguimos este razonamiento, se concluye que D debe ser infinito. Dado que tomamos un modelo $\mathfrak{D}$ de φ arbitrario, hemos constatado nuestra afirmación.

Con este ejemplo queremos ilustrar diversas facetas de la interacción entre las fórmulas (enunciados) y estructuras de interpretación. Una de ellas, por demás prominente, es cómo demostrar afirmaciones trabajando en una estructura arbitraria. La otra, que es más evidente, es cómo la lógica de primer orden, incluso con un lenguaje y enunciados realmente sencillos, implica que los modelos deben ser infinitos. En este escenario planteado, llamamos la atención al hecho de que, si bien la lógica de primer orden «discrimina» entre modelos finitos e infinitos (como recién se bosquejo), no tiene la expresividad suficiente para distinguir entre diversos infinitos. Esto no es un asunto menor, pero no tenemos suficientes herramientas ahora mismo para seguirlo examinando. Pasemos mejor, a temas más inmediatos.

Quizá el primer asunto que requiere mucha atención trata sobre conjuntos definibles en una estructura. Es difícil sobrestimar la relevancia de la noción de conjunto definible, que a continuación introducimos, en la lógica matemática, específicamente en la teoría de modelos

Definición 3.0.2. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. El conjunto definido por φ en $\mathfrak{A}$, en símbolos $\varphi(\mathfrak{A})$, es

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]\}.$$

Así, $\varphi(\mathfrak{A})$ colecta las n-adas que, al ser sustituidas por las variables libres en φ, aseguran que se cumple φ en $\mathfrak{A}$. Nada garantiza que $\varphi(\mathfrak{A})$ no sea vacío o que no sea el total A.

En cierto sentido, tenemos la situación recíproca. Un subconjunto $D \subseteq A^n$ ($n \in \mathbb{N}$) es definible en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $D = \psi(\mathfrak{A})$.

¿Qué cosa es, que se coge en una selva negra y viene a morir en una piedra blanca? El piojo; lo tomamos de la cabeza, lo ponemos en la uña y ahí lo matamos.

Ejemplo 3.0.3. Trabajamos en el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$ y con la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ cuyo universo es $\mathbb{N}$ y en donde la interpretación de los símbolos de $\mathcal{L}$ es la usual. Considere la fórmula

$$\varphi(x, y) \equiv \exists z(x = (1 + 1) \cdot z \vee x = (1 + 1) \cdot z + 1).$$

Se sigue que

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{(n, m) : n \text{ es par}, m \text{ es impar}\}.$$

Ejemplo 3.0.4. Sean $\mathcal{L} = \{<\}$, un símbolo de 2-relación y $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ con la interpretación usual de $<$ en $\mathbb{R}$. Entonces $\mathfrak{R}$ es modelo de los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \equiv & \forall x \exists y \exists z((y < x) \wedge (x < z)) \\ \varphi_2 \equiv & \forall x \forall y((x < y) \rightarrow \exists z((x < z) \wedge (z < y))). \end{aligned}$$

Considere las $\mathcal{L}$-fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv & (x_1 < x_2) \wedge (x_3 < x_4), \\ \varphi_4(x_1, x_2) \equiv & \neg \exists x((x < x_1) \wedge (x_2 < x)). \end{aligned}$$

Note que

$$\mathfrak{R} \models \varphi_3[0, 1, 2, 3],$$

mientras que

$$\mathfrak{R} \not\models \varphi_3[0, 0, 2, 3].$$

Además,

$$\mathfrak{R} \models \varphi_4[0, 5],$$

pero

$$\mathfrak{R} \not\models \varphi_4[10, -3].$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} \varphi_3(\mathfrak{R}) = & \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a < b \wedge c < d\} \\ \varphi_4(\mathfrak{R}) = & \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \geq a\}. \end{aligned}$$

¿Qué cosa es, que está apuntando al cielo con el dedo?
La espina del maguey.

Ejemplo 3.0.5. Sean $\mathcal{L} = \{<\}$, un símbolo de 2-relación y $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ con la interpretación usual de $<$ en $\mathbb{R}$. Entonces $\mathfrak{R}$ es modelo de los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \equiv &\forall x \exists y \exists z((y < x) \wedge (x < z))\\ \varphi_2 \equiv &\forall x \forall y((x < y) \to \exists z((x < z) \wedge (z < y))).\end{aligned}$$

Considere las $\mathcal{L}$-fórmulas

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv &(x_1 < x_2) \wedge (x_3 < x_4),\\ \varphi_4(x_1, x_2) \equiv &\neg \exists x((x < x_1) \wedge (x_2 < x)).\end{aligned}$$

Note que

$$\mathfrak{R} \models \varphi_3[0, 1, 2, 3],$$

mientras que

$$\mathfrak{R} \not\models \varphi_3[0, 0, 2, 3].$$

Además,

$$\mathfrak{R} \models \varphi_4[0, 5],$$

pero

$$\mathfrak{R} \not\models \varphi_4[10, -3].$$

Se deduce que

$$\begin{aligned}\varphi_3(\mathfrak{R}) = &\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a < b \wedge c < d\}\\ \varphi_4(\mathfrak{R}) = &\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \geq a\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.0.6. Otra vez sean $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ con la interpretación natural de $<$ en $\mathbb{R}$. Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) \equiv &(x < y) \vee (x > y) \vee (x = y)\\ \psi(x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv &(\neg(x < x_1) \wedge \neg(x = x_2) \wedge (x_3 < x)) \vee (x = x_4) \vee (x < x_5).\end{aligned}$$

Es claro que $\varphi(\mathfrak{R}) = \mathbb{R}^2$, mientras que

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{R} \models \psi[x, 3, 3, 5, 5, -2]\} = (-\infty, -2) \cup (3, 5],$$

y

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathfrak{R} \models \neg\psi[x, 3, 3, 5, 5, -2]\} = [2, 3] \cup (5, \infty).$$

Ejemplo 3.0.7. Arriba consideramos el lenguaje $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con universo $\mathbb{N}$, la interpretación usual de los símbolos de $\mathcal{L}$, y la fórmula

$$\varphi(x, y) \equiv \exists z(x = (1 + 1) \cdot z \vee x = (1 + 1) \cdot z + 1)$$

que dió lugar a

$$D = \varphi(\mathfrak{A}) = \{(n, m) : n \text{ es par}, m \text{ es impar}\}.$$

Por tanto, D es definible. Pero también podemos mostrar, con ayuda de esta propiedad de D, que otros subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ y de $\mathbb{N}^n$ son definibles, donde $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, el conjunto P de los números pares en $\mathbb{N}$ es definible, pues

$$P = \{l \in \mathbb{N} : \exists m(\varphi(l, m))\},$$

que también se puede expresar como el conjunto de primeras coordenadas de elementos de D.

En forma correspondiente, el conjunto de los impares O en $\mathbb{N}$ es definible,

$$O = \{u \in \mathbb{N} : \exists l(\varphi(l, u))\},$$

el conjunto de segundas coordenadas de elementos de D.

El subconjunto $K \subseteq \mathbb{N}^4$ tal que la primera coordenada de cualquier elemento $(a, b, c, d) \in K$ es impar,

$$K = \{(a, b, c, s) \in \mathbb{N}^4 : \forall z(\neg\varphi(a, z))\}$$

No es difícil encontrar otros muchos subconjuntos definibles $T \subseteq \mathbb{N}^n$ empleando la definibilidad de D.

Ejemplo 3.0.8. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de R-módulos (véase los ejemplos 2.3.13 y 2.7.5). Las fórmulas atómicas o primitivas en este lenguaje son de la forma $t_1 = t_2$, donde t_1, t_2 son $\mathcal{L}$-términos. Dado que los $\mathcal{L}$-términos pueden ser una variable, una constante (el 0) o una función (la suma o multiplicación entre elementos del anillo y de M), podemos decir que las fórmulas primitivas tienen la forma

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0,$$

donde $r_i \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$. Por supuesto, $\sum$ representa la suma en el grupo abeliano.

Una conjunción finita de fórmulas primitivas es, entonces, de la forma

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} r_j x_i = 0$$

que es, esencialmente, un sistema homogéneo de ecuaciones lineales; si empleamos notación matricial, este sistema se se representa como

$$\vec{x}H = 0,$$

donde $H = (r_{ij})$ es la matriz de coeficientes. Considere la fórmula

$$\varphi(v) \equiv \exists\, w(vr + ws = 0), \qquad (\text{❇})$$

donde $r, s \in R$. En general, una fórmula positivo primitiva (pp) tiene la forma de una conjunción de un sistema finito de ecuaciones lineales precedida por cuantificación existencial. Pronto las trataremos en más detalle, pero ahora regresemos a (❇), que es una pp-fórmula. Si M es un R-módulo que interpreta a $\mathcal{L}$, $\varphi(M)$ es el subconjunto de M definido por φ,

$$N = \{m \in M : M \models \varphi[m]\}.$$

Primero, observamos que $0 \in N$, pues

$$M \models \exists\, w(r \cdot 0 + sw = 0)$$

si elegimos a w también como cero.

Ahora, si $a, b \in N$, digamos que en M ocurre

$$\exists\, w_1(ra + sw_1 = 0)$$
$$\exists\, w_2(rb = sw_2 = 0),$$

deducimos que

$$ra + sw_1 = 0$$
$$rb + sw_2 = 0;$$

si sumamos las ecuaciones,

$$r(a + b) + s(w_1 + w_2) = 0$$

por lo que

$$M \models \exists\, w(r(a + b) + sw = 0),$$

si elegimos a w como $w_1 + w_2$ que es un elemento de M. En forma similar, si $M \models \varphi[a]$, entonces $M \models \varphi[-a]$, donde $-a$ es el inverso aditivo de a en M. Hemos verificado que $0 \in N$, y que si $a, b \in N$, $a - b \in N$, por lo que N resulta un subgrupo de M, llamado un subgrupo de M pp definible. Dado que M es un R-módulo, es válido preguntarnos si N también es es un R-submódulo de M.

Supongamos que R es conmutativo. Sea $k \in R$ y supongamos que $M \models \varphi[a]$, es

decir, $a \in N$, por lo que podemos hallar $w \in M$ con $ra + sw = 0$. Entonces

$$kra + ksw = 0$$

y como R es conmutativo

$$rka + skw = 0.$$

Así,

$$r(ka) + s(kw) = 0$$

lo que indica que $ka \in N$. Se sigue que N es un R-submódulo de M, cuando R es conmutativo.

Ejemplo 3.0.9. Continuamos con las ideas del ejemplo previo. Una fórmula primitiva es una ecuación lineal $r_1v_1 + \cdots r_nv_n = 0$. Una conjunción finita de fórmulas primitivas es un sistema finito de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} r_1v_1 + \cdots + r_nv_n &= 0 \\ s_1u_1 + \cdots + s_mu_m &= 0 \\ t_1x_1 + \cdots + t_lx_l &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos pensar que las variables $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m, t_1, \ldots, t_l$ aparecen en cada ecuación, si las introducimos convenientemente, es decir, con coeficiente cero, cuando no aparecían. En tal caso, podemos escribir el sistema como,

$$\begin{aligned} r_{11}y_1 + \cdots + r_{1k}y_k &= 0 \\ r_{21}y_1 + \cdots + r_{2k}y_k &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ r_{p1}y_1 + \cdots + r_{pk}y_k &= 0 \end{aligned}$$

En forma matricial, $A\vec{y} = \vec{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p1} & \cdots & r_{pk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

o en el caso de módulos derechos,

$$(y_1, y_2, \ldots, y_k) \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{p1} \\ r_{12} & \cdots & r_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1k} & \cdots & r_{pk} \end{pmatrix} = (0, 0, \ldots, 0)$$

$$\vec{y}A = \underset{\rightarrow}{0}$$

Por consiguiente, una pp-fórmula positivo primitiva (pp) adquiere la forma

$$\exists\, \vec{y}(A\vec{y} = \vec{0}).$$

Puede que no se cuantifique sobre todas las variables, como en el ejemplo 2.7.5 (❇).

En general, sea

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) \equiv \varphi(\vec{v}) \equiv \exists\, w_1, \ldots, w_l \bigwedge_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} v_i + \sum_{k=1}^{l} s_{kj} w_k = 0 \right)$$

donde $r_{ij}, s_{kj} \in R$, que en forma matricial se puede escribir como

$$\exists\, w_1, \ldots, w_l \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{n1}, s_{11} & \cdots & s_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ r_{1m} & \cdots & r_{nm}, s_{1m} & \cdots & s_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (✣)$$

Aquí $\vec{0}$ denota la matriz cero de $m \times 1$. Podemos reducir más la ecuación y llegar a

$$\exists\, \vec{w} H(\vec{v}; \vec{w}) = \vec{0},$$

donde la matriz H tiene la descripción $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$; otra forma

$$\exists\, \vec{w}(\vec{v}R = -\vec{w}S),$$

donde R, S son las entradas recién mencionadas.

El lector puede comprobar que si M es un R-módulo y R es conmutativo, entonces

- $M \models \varphi[\vec{0}]$.
- $M \models \varphi[\vec{a}]$ y $M \models \varphi[\vec{b}]$ implican $M \models \varphi[\vec{a} - \vec{b}]$.
- $M \models \varphi[\vec{a}]$ y $r \in R$, entonces $M \models \varphi[ar]$, donde $(a_1, \ldots, a_n)r = (a_1 r_1, \ldots, a_n r_n)$.

Así, el conjunto definido por φ en M es un R-submódulo de M^n, y lo llamamos un pp-submódulo. En general, si $K \leq M$ es un R-submódulo, diremos que K es un pp-submódulo cuando existe una pp-fórmula $\psi(x)$ tal que $K = \psi(M)$. Por supuesto, tenemos la noción correspondiente de pp-subgrupo. Note que los pp-submódulos o pp-subgrupos son, en particular, definibles.

Considere un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, entre los R-módulos M y N. Sea $\vec{a} \in \varphi(M)$. Entonces,

$$M \models \exists \vec{w} H(\vec{a}; \vec{w}) = \vec{0}$$

existen elementos $\vec{b}$ en M tales que

$$M \models H(\vec{a}; \vec{b}) = \vec{0}.$$

Por tanto, en M ocurre,

$$H(\vec{a}; \vec{b}) = \vec{0}.$$

Como f es un R-homomofismo, deducimos que

$$H(f(\vec{a}); f(\vec{b})) = \vec{0}$$

se cumple en N, donde $f(\vec{a})$ representa $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ y algo correspondiente para $f(\vec{b})$. Por consiguiente,

$$N \models \exists \vec{w} H(f(\vec{a}); \vec{w}) = \vec{0},$$

por lo que $f[\varphi(M)] \subseteq \varphi(N)$.

Vale la pena que el lector confirme las siguientes afirmaciones relativas a las fórmulas $\varphi \equiv \varphi(\vec{v})$ y $\psi \equiv \psi(\vec{v})$ de la forma (✣), donde $l = l(\vec{v})$ es la cantidad de variables libres. Algunas de las aseveraciones requieren, por parte del lector, un mayor conocimiento de álgebra.

1. $\varphi(M) = \{\vec{a} \in M^l : M \models \varphi[\vec{a}]\}$ es un subgrupo de M^l; de hecho es un $(End(M), C(R))$-subbimódulo de M^l mediante la acción diagonal, donde $C(R)$ es el centro del anillo R.

2. Suponga que sustituimos algunos valores específicos $\vec{a}$, por las últimas $l - k$ variables en $\vec{v}$. El conjunto $\varphi(M, \vec{a}) = \{\vec{c} \in M^k : M \models \varphi(\vec{c}, \vec{a})\}$ definido por la fórmula (con parámetros) es vacío o es una clase lateral del subgrupo $\varphi(M, \vec{0})$ de M^k.

   Para verificar esto, supongamos que $\varphi(M, \vec{a})$ no es vacío, esto es, $\varphi(M, \vec{a})$ se satisface en M, y tomamos $\vec{c}, \vec{c}' \in \varphi(M, \vec{a})$. Queremos probar que $\varphi(M, \vec{a})$ es una clase lateral del subgrupo $\varphi(M, 0)$, para lo cual debemos mostrar que $\vec{c} - \vec{c}' \in \varphi(M, \vec{0})$. Pero es claro que $\varphi(\vec{c} - \vec{c}', 0)$ se cumple en M. En consecuencia, $\varphi(M, \vec{a})$ es una clase lateral de $\varphi(M, \vec{0})$.

3. Si $\varphi(M, \vec{a}) \cap \psi(M, \vec{b})$ no es vacía, es una clase lateral de $(\varphi \wedge \psi)(M, \vec{0})$, donde $(\varphi \wedge \psi)(M) = \varphi(M) \cap \psi(M)$, $l(\vec{a}) = l(\vec{b}) = l(\vec{0})$.

4. Hacemos la siguiente definición,

$$\varphi(M) + \psi(M) = (\varphi + \psi)(M)$$

donde

$$(\varphi + \psi)(\vec{v}) \equiv \exists\, \vec{u} \exists\, \vec{w} (\varphi(\vec{u}) \wedge \psi(\vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} + \vec{w})$$

que es una pp-fórmula y, por supuesto, suponemos que las longitudes de las cadenas mostradas son adecuadas. La afirmación es que $\psi(M, \vec{b}) + \varphi(M, \vec{a})$ es una clase lateral de $(\varphi + \psi)(M, \vec{0})$, suponiendo que $\varphi(M, \vec{a}) \cap \psi(M, \vec{b})$ no es vacía. Aquí

$$\varphi(M, \vec{a}) + \psi(M, \vec{a}) = \{\vec{c} \in M^k : M \models \varphi(\vec{c}, \vec{a}) + \psi(\vec{c}, \vec{b})\}$$

Tome $\vec{c}, \vec{c}' \in \varphi(M, \vec{a}) \cap \psi(M, \vec{b})$. Existen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ tales que

$$M \models \varphi(\vec{u}_1, \vec{a}) \wedge \psi(\vec{w}_1, \vec{a}) \wedge \vec{c}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1$$
$$M \models \varphi(\vec{u}_2, \vec{a}) \wedge \psi(\vec{w}_2, \vec{a}) \wedge \vec{c}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$

Se corrobora que $\vec{c} - \vec{c}' \in \varphi(M, \vec{0}) \cap \psi(M, \vec{0})$ por (2).

5. Como vimos, si R es conmutativo, todo subgrupo pp-definible es un R-submódulo. A continuación un ejemplo donde R no es conmutativo. Los anillos no conmutativos, quizá, más simples son los anillos artinianos de matrices sobre anillos con división. Por ejemplo, tome como R el anillo de matrices 2×2 sobre un campo K y sea M el anillo, visto como módulo derecho sobre sí mismo. Tome e_{11} la matriz con 1 en la posición $(1, 1)$ y cero en las otras posiciones. Considere la fórmula

$$\varphi(v) \equiv \exists\, w (v = e_{11})$$

Entonces

$$\varphi(R) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}$$

que es un ideal izquierdo, pero no derecho de R, así que no puede ser submódulo.

Ejemplo 3.0.10. Sea R un anillo. Podemos considerar R como un R-módulo izquierdo (o derecho), porque R es, en particular, un grupo abeliano. Sean $r_1, \ldots, r_n \in R$. Se define

$$L = \sum_{i=1}^{n} r_i R = \{s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n : s_1, \ldots, s_n \in R\},$$

que es un ideal izquierdo de R, en particular un subgrupo de R. Se afirma que L es

un subgrupo pp definible. La fórmula pp que lo define es

$$\exists y_1, \ldots, y_n \left(x = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i \right).$$

Empecemos nuestro estudio de estructuras con la lógica con igualdad.

Naui Atl. Sol de Agua. Los dioses crearon entonces el cuarto sol. La diosa Chalchiutlicue, la de las faldas de jade, diosa del agua, se convirtió en sol por mandato de Quetzalcóatl. Durante esta edad los seres humanos se alimentaron de una semilla semejante al maíz, llamada cincocopi. Terminó este sol con un gran diluvio que anegó la tierra, convirtió a los hombres y mujeres en peces e hizo que el cielo se desplomara sobre la superficie terrestre. Esto ocurrió el día 4 Agua. Duró este cuarto sol 676 años según unas fuentes, y 312 según otras.

3.1 Lógica con igualdad

La mayoría de las veces se utiliza en matemática el símbolo de igualdad suponiendo, tácitamente, que satisface ciertas propiedades tales como ser reflexiva, transitiva, simétrica, etc. Nosotros hemos considerado y consideraremos que todo lenguaje $\mathcal{L}$ contiene al símbolo de 2-relación $=$ (a menos que explícitamente se diga lo contrario) y que éste se interpreta en cada estructura considerada con las propiedades que a continuación describimos.

Definición 3.1.1 (Axiomas de la igualdad)**.** La 2-relación $=$ satisface los siguientes axiomas.

❶ $\forall v_0(v_0 = v_0)$ (reflexividad).

❷ $\forall v_0 \forall v_1(v_0 = v_1 \to v_1 = v_0)$ (simetría).

❸ $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2((v_0 = v_1 \wedge v_1 = v_2) \to v_0 = v_2)$ (transitividad).

❹ Para todo natural $k \geq 1$ y cada símbolo de k-función f de $\mathcal{L}$:

$$\forall v_1 \cdots v_k v_{k+1} \cdots v_{2k} \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} v_i = v_{k+i} \to f(v_1, \ldots, v_k) = f(v_{k+1}, \ldots, v_{2k}) \right)$$

❺ Para todo natural $k \geq 1$ y todo símbolo de k-relación R de $\mathcal{L}$:

$$\forall v_1 \cdots v_k v_{k+1} \cdots v_{2k} \left(\left(R(v_1, \ldots, v_k) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq k} v_i = v_{k+i} \right) \to R(v_{k+1}, \ldots, v_{2k}) \right)$$

Algunos de estos axiomas son redundantes, pero vale la pena escribir los cinco para tener una mejor idea de lo que pretenden.

(*) Decimos que un $\mathcal{L}$-modelo $\mathfrak{A}$ respeta igualdad si $=^{\mathfrak{A}}$, la interpretación de $=$ en $\mathfrak{A}$, es la relación de igualdad en A, es decir, es el conjunto $\{(a,b) : a = b\}$, que también se conoce como la diagonal de A^2.

Una aclaración importante es que a menos que se mencione lo contrario, lenguaje y modelo siempre significarán, respectivamente, lenguaje con igualdad y modelo que respeta igualdad.

Note que cualquier modelo que respeta igualdad satisface los cinco axiomas recién descritos para la igualdad. Así que usaremos implícitamente estos axiomas en cada una de las estructuras que aparezcan, siempre y cuando no se aclare que la estructura no respeta igualdad. Los sistemas axiomáticos considerados contienen entre sus axiomas estos cinco postulados.

Modelos que pueden no respetar igualdad

Como ya se indicó, todos nuestros lenguajes contienen el símbolo de igualdad $=$ y se espera que su interpretación satisfaga los cinco axiomas de la definición 3.1.1. Sin embargo, en ocasiones puede ser de interés averiguar qué ocurre cuando el modelo no necesariamente respeta igualdad. Veremos que esto no causa mayor problema y que, en cierto sentido, siempre podemos considerar que la estructura respeta igualdad.

A primera vista puede parecer muy patológico preocuparnos por modelos que no respetan igualdad, pero estos son muy comunes, más de lo que parece. Sólo por mencionar un ejemplo, ocurre en teoría de modelos, aunque haremos uso de herramientas que quizá el lector desconozca. En tal caso, simplemente continue con el texto posterior.

Suponga que tenemos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde A es el universo de alguna estructura, o incluso A es el universo de conjuntos. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro definido en $\mathbb{N}$. En el conjunto D (clase) de todas las funciones f de $\mathbb{N}$ a A (o V) se establece una relación de equivalencia

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Se puede probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en D y que se puede convertir a D en una $\mathcal{L}$-estructura, para cualquier lenguaje $\mathcal{L}$. En este sentido $\sim$ se convierte en una igualdad I en el cociente, pero note que dos funciones $f, g \in D$ pueden ser «iguales» sin realmente serlo, pues pueden difereir en una cantidad finita de puntos (incluso infinita) y sin embargo son iguales de acuerdo a esta igualdad I. La construcción recién descrita se conoce como el ultraproducto de A (de V) y tiene numerosas aplicaciones (véase [FeVi13]). Así, la relación I no coincide con la diagonal y por (*) no respeta igualdad.

Considere una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ en la que el símbolo de igualdad $=$ se interpreta como una relación binaria E. Mostraremos que si $\mathfrak{M}$ satisface los axiomas de la definición 3.1.1, a partir de $\mathfrak{M}$ podemos definir otro modelo que sí respeta igualdad y tiene propiedades sumamente interesantes. Supongamos entonces que $\mathfrak{M}$ satisface los cinco axiomas. Se sigue que E es una relación de equivalencia en M, compatible con las funciones y relaciones en $\mathfrak{M}$, según ❹ y ❺. Sea C el cociente M/E (el conjunto de clases de equivalencia respecto a E). Así, $[a] = [b]$ si y sólo si $E(a, b)$. La clase de equivalencia de $a \in M$ se denota con $[a]$. Nuestra tarea es convertir C en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{C}$. Para ello debemos interpretar cada símbolo de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{C}$, lo cual se lleva a cabo a continuación:

- ✺ Para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, $c^{\mathfrak{C}} = [c^{\mathfrak{M}}]$.
- ✺ Para todo natural $k \geq 1$ y todo símbolo de k-función f de $\mathcal{L}$, $f^{\mathfrak{C}}$ es la función de C^k en C que a cada $([a_1], \ldots, [a_k]) \in C^k$ asocia el elemento $[f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_k)]$; note que $f^{\mathfrak{C}}$ está bien definida pues E es compatible con $f^{\mathfrak{M}}$.
- ✺ Para todo natural $n \geq 1$ y todo símbolo de n-relación R de $\mathcal{L}$, $R^{\mathfrak{C}}$ es la n-relación en C definida por $([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{C}}$ si y sólo si $(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathfrak{M}}$. Otra vez, esta definición es correcta porque E es compatible con $R^{\mathfrak{M}}$.

Es inmediato que la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{C}$ respeta igualdad: en efecto,$([a], [b]) \in E^{\mathfrak{C}}$ si y sólo si $(a, b) \in E^{\mathfrak{M}}$ pues $E(a, b)$ implica $[a] = [b]$, que es precisamente la diagonal de C^2.

Con la notación recién descrita podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ y cualesquier elementos $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ de M, se cumple lo siguiente:*

① *Si $(a_i, b_i) \in E$ para $1 \leq i \leq n$, entonces*

$$\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n];$$

②

$$\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{C} \models \varphi[[a_1], \ldots, [a_n]].$$

Demostración. Probamos ambas propiedades por inducción en la construcción de φ. El caso de fórmula atómica se sigue de la definición de $\mathfrak{C}$ y de que E satisface la definición 3.1.1. Los casos $\varphi \equiv \neg\psi$ y $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ son inmediatos de la hipótesis de inducción. Resta el caso $\varphi \equiv \exists v_m \psi(v_1, \ldots, v_n, v_m)$. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer $m > n$. En estas condiciones, para que $\mathfrak{M}$ sea modelo de $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ es necesario y suficiente que exista un elemento $b \in M$ tal que $\mathfrak{M} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b]$. Por hipótesis de inducción, ψ satisface las afirmaciones del lema y ya que para toda $b \in M$, $(b, b) \in E$, si $(a_i, b_i) \in E$ para toda i, podemos concluir que $\mathfrak{M} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \exists b \psi[b_1, \ldots, b_n]$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. Con otras palabras, $\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$, lo que demuestra ①.

En forma similar, se desprende de la hipótesis de inducción que $\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si existe un elemento $b \in M$ tal que

$$\mathfrak{C} \models \psi[[a_1], \ldots, [a_n], [b]],$$

que es equivalente a

$$\mathfrak{C} \models \exists v_m \psi[[a_1], \ldots, [a_n], v_m],$$

que a su vez es equivalente a

$$\mathfrak{C} \models \varphi[[a_1], \ldots, [a_n]],$$

lo que prueba ② para φ. □

Teorema 3.1.3. *Para que un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados Σ (donde $\mathcal{L}$ tiene $=$) tenga un modelo que respete igualdad, es necesario y suficiente que Σ, junto con los cinco axiomas de la definición 3.1.1, tengan un modelo (arbitrario).*

Demostración. Si Σ tiene un modelo que respeta igualdad, los cinco axiomas se satisfacen en aquel modelo.

Si Σ junto con los cinco axiomas tienen un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, como $\mathfrak{M}$ es modelo de los cinco axiomas, podemos construir el modelo $\mathfrak{C}$ recién descrito. Por tanto, según el lema 3.1.2, todo enunciado de Σ que se satisface en $\mathfrak{M}$ se satisface en $\mathfrak{C}$. Así que $\mathfrak{C} \models \Sigma$ y $\mathfrak{C}$ respeta igualdad. □

Ya que hemos estudiado a conciencia la relación de satisfacción, podemos tomarnos la libertad de escudriñar algunos lenguajes particulares y sus correspondientes estructuras. Esto será el motivo de la siguiente sección.

Naui Ollin. Sol de Movimiento. A Tezcatlipoca y Quetzalcóatl les tocó la tarea de iniciar la restauración del universo destruido por el diluvio. Primero despejaron las aguas que habían inundado la tierra; luego trataron de levantar el cielo que se había pegado a la tierra, pero como no pudieron, llamaron en su auxilio a los otros dioses creadores y juntos abrieron cuatro caminos hacia el centro de la tierra, por los cuales entraron para alzar el cielo. Sin embargo, como el cielo era grande y pesado, tuvieron que crear cuatro hombres que los ayudaran. Y aun fue preciso que Tezcatlipoca y Quetzalcóatl se convirtieran en grandes árboles para elevar y sostener el cielo, de modo que el primero se transformó en árbol de espejos, y Quetzalcóatl en sauce precioso. Y así, con los hombres y con los árboles y dioses alzaron el cielo con las estrellas, como ahora está. En recompensa por este gran esfuerzo, Tonacatecutli hizo de Tezcatlipoca y de Quetzalcóatl señores del cielo y de las estrellas y les dio asiento en la Vía Láctea.

3.2 Estructuras matemáticas

En este apartado vamos a examinar diversas estructras comunes en las matemáticas que se pueden trabajar con un lenguaje formal apropiado. Comenzamos con las relaciones de equivalencia.

Ejemplo 3.2.1. Sean $\mathcal{L}_E$ el lenguaje $\{E\}$ que consiste en una 2-relación y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. La relación E es una relación de equivalencia en $\mathfrak{A}$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ es un modelo de los enunciados

- $\varphi_1 \equiv \forall x\ E(x,x)$.
- $\varphi_2 \equiv \forall x \forall y (E(x,y) \longrightarrow E(y,x))$.
- $\varphi_3 \equiv \forall x \forall y \forall z\ ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \longrightarrow E(x,z))$.

Podemos probar que estos 3 enunciados no son redundantes, que los necesitamos, para definir la noción de relación de equivalencia. Para ello, probamos que ninguno de ellos es una consecuencia lógica del resto, esto es que

$$\{\varphi_i, \varphi_j\} \not\models \varphi_k$$

para cualesquier $i,j,k \in \{1,2,3\}$ distintos entre sí. Por ejemplo, para probar que φ_2 no es consecuencia de φ_1 y φ_3 debemos encontrar una estructura que sea modelo de $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ pero no de φ_2, es decir, que sea modelo de $\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\varphi_2$.

La $\mathcal{L}_E$-estructura $(\mathbb{R}, E)$, donde E se interpreta con $\leq$, es tal estructura.

Construyamos un modelo de $\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\varphi_1$. Sea $A = \mathbb{N}$,

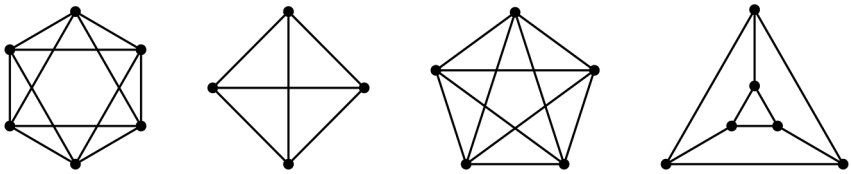
$$E^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}^2 - (\{(2,2)\} \cup \{(2,n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n,2) : n \in \mathbb{N}\}).$$

Entonces $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ es modelo de $\varphi_2 \wedge \varphi_3$, pero no de φ_1.

Un ejemplo de una relación reflexiva, simétrica pero no transitiva: Sea (A,E), donde $A = \{a,b,c\}$, $E = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$.

Gráficas

Definición 3.2.2. Una gráfica es un conjunto de puntos, llamados vértices, y líneas, llamadas aristas o bordes, de tal forma que todo borde inicia en un vértice y termina en otro. Dos vértices son adyacentes si están conectados por una arista (borde).



Ejemplos de gráficas

Ejemplo 3.2.3. Un mapa es un punto de partida para generar diversas gráficas, dependiendo de que representan los vértices y aristas. Por ejemplo, si los vértices representan ciudades y las aristas caminos. Otra posibilidad es que los vértices representen regiones y las aristas fronteras.

Ejemplo 3.2.4. Un mapa de calles se puede representar como una gráfica, donde cada intersección de calles es un vértice y las aristas muestran caminos que unen intersecciones.

Así, una gráfica es un conjunto de vértices junto con una relación arista. La colección de vértices conforma el dominio de la estructura y arista es una relación binaria entre los miembros del dominio. La relación es simétrica.

Lo mismo que ocurre con relaciones, existen muchas maneras equivalentes de describir una gráfica.

En ocasiones se permiten ciclos, pero nosotros no lo admitimos, es decir, ningún vértice está relacionado consigo mismo.

Un ciclo

El lenguaje asociado es muy simple, $\mathcal{L} = \{R\}$, un símbolo de 2-relación, así que las fórmulas atómicas son de la forma

$$R(v_i, v_j) \qquad \text{o} \qquad v_i = v_j,$$

donde v_i, v_j so variables. Dibujar una gráfica puede darnos una muy buena idea de como se comporta. Generalmente no hay una forma única de dibujar los vértices y las aristas.

La mayoría de las situaciones representadas se pueden expresar mediante fórmulas como pronto veremos. Por ejemplo, todas las gráficas que consideremos satisfacen el enunciado,

$$\neg\exists\, x R(x, x),$$

o en forma equivalente

$$\forall\, x \neg R(x,x).$$

Considere las siguientes gráficas,

(a) Gráfica G (b) Gráfica H

Ambas consisten en un sólo vértice, y en G la relación R es vacía. La gráfica H no es admisible porque contiene un ciclo, pero aún así, podemos distinguirlas mediante $\mathcal{L}$-fórmulas, pues G satisface

$$G \models \neg\exists\, x,y(x \neq y \wedge R(x,y));$$

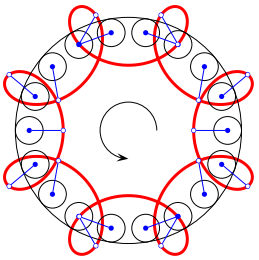
en cambio H satisface

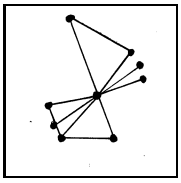
$$H \models \exists\, x R(x,x).$$

Ahora tomamos otras dos gráficas, $\mathcal{G}$ y $\mathfrak{H}$, cada una con cuatro vértices $\{a,b,c,d\}$.

En este punto es importante señalar que la representación de una gráfica mediante una ilustración puede dar lugar a pensar que la naturaleza de los puntos y los vértices (color, grosor, etc.) son relevantes. Pero no es así; no cuenta para nada si la arista es en diagonal o curva, si hace un cierto ángulo con otra, etc. Las gráficas $\mathcal{G}$ y $\mathfrak{H}$ son diferentes. Antes de escribir fórmulas que las distingan, examinemos más ejemplos.

Ejemplos de gráficas,





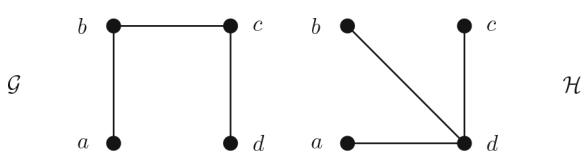
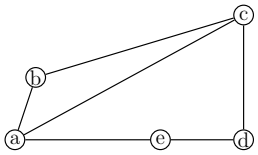
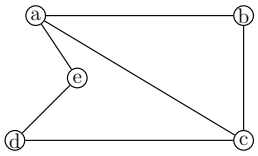


Figura 3.2.2: Gráficas $\mathcal{G}$ y $\mathfrak{H}$

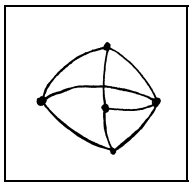
Gráfica 1



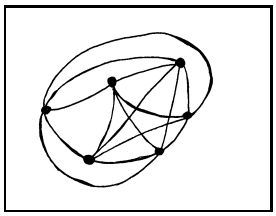
Gráfica 2



Gráfica 2′



Gráfica 3



Gráfica 4

En lugar de presentar un dibujo, podemos describir una gráfica enlistando sus vértices y bordes.

Vértices: a, b, c, d, e
Aristas: ab, ac, ae, bc, cd, de.

La gráfica tiene 5 vértices y 7 bordes. Note que las gráficas 2 y 2′ corresponden a esta definición. Decimos que las gráficas 2 y 2′ son representaciones de la misma gráfica.

Podemos considerar una gráfica como una estructura $\mathfrak{G}$, donde el universo G de $\mathfrak{G}$ es el conjunto de vértices. El lenguaje $\mathcal{L}_G$ de $\mathfrak{G}$ consiste en una 2-relación R. La estructura $\mathfrak{G}$ interpreta R como la relación arista. Esto es, para los elementos $a, b \in G$, $\mathfrak{G} \vDash R(a, b)$ si y sólo si la gráfica tiene una arista entre a y b. Cada una de las gráficas (1) - (4) es modelo de los dos siguientes enunciados:

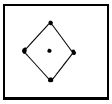
$$\forall x\ \neg R(x, x) \quad \text{(no hay ciclos)}$$
$$\forall x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)).$$

El primer enunciado dice que R no es reflexiva. En el segundo, que R es simétrica. En lo sucesivo, por gráfica entenderemos una $\mathcal{L}_G$-estructura que sea modelo de estos dos enunciados. Esto se expresa como *una gráfica no dirigida sin aristas múltiples o ciclos*.

(1) - (4) también son modelos del enunciado

$$\forall x \exists y R(x, y),$$

que asegura que cada vértice es adyacente a algún otro vértice. Sin embargo, esto no es cierto para todas las gráficas. Por ejemplo,



Esta gráfica es modelo del enunciado $\exists x \forall y \neg R(x, y)$, el cual es equivalente a la negación del enunciado $\forall x \exists y R(x, y)$. Cualquier gráfica que contenga más de un vértice y que modele esta negación no debe ser conexa.

Definición 3.2.5. Para cualquier par de vértices a, b de una gráfica, una trayectoria de a a b es una sucesión de vértices que comienza con a y termina con b y tal que cada vértice de la sucesión, excepto a, es adyacente al vértice previo.

Definición 3.2.6. Una gráfica $\mathfrak{G}$ es conexa si para cualesquier dos vértices a y b en $\mathfrak{G}$ existe una trayectoria de a a b.

Las gráficas (1) - (4) son conexas, modelos de $\forall x \exists y R(x, y)$. Por otro lado, ninguna de ellas modela $\exists x \forall y R(x, y)$. Este enunciado asegura que existe un vértice que es adyacente a cada vértice; puesto que ningún vértice es adyacente a sí mismo, ninguna gráfica es modelo de este enunciado (es decir, la negación de $\exists x \forall y R(x, y)$ es una consecuencia de $\forall x \neg R(x, x)$). Sin embargo, la gráfica 1 contiene un vértice que es adyacente a cada vértice que no sea el mismo. Esto se expresa como

$$\exists x \forall y (\neg (x = y) \longrightarrow R(x, y)).$$

La gráfica (4) también es modelo de este enunciado. Para distinguir la gráfica (1) de la (4) podemos decir que (1) contiene un único vértice que es adyacente a cada vértice que no sea él mismo. Esto se puede expresar como un enunciado. Para simplificarlo, sea $\varphi(x)$ la fórmula $\forall y(\neg(x = y) \longrightarrow R(x, y))$. Para cualquier gráfica $\mathfrak{G}$ y cualquier vértice a de $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{G} \vDash \varphi(a)$ si y sólo si a es adyacente a cada vértice de G distinto de a.

El enunciado $\exists y\varphi(y) \wedge \forall z(\varphi(z) \rightarrow (z = y))$ dice que existe un único elemento con tales características. Este enunciado distingue la gráfica (1) de las (2) - (4). Ahora podemos retomar las gráficas $\mathcal{G}$ y $\mathfrak{H}$ de la figura 3.2.2. Note que

$$\mathfrak{H} \models \exists x \forall y[\neg(x = y) \rightarrow R(x, y)].$$

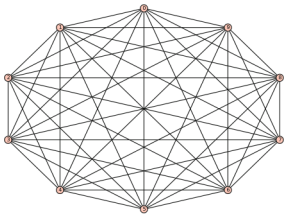
En cambio, $\mathcal{G}$ hace falso a este enunciado.

Conforme las gráficas crecen, se vuelve más difícil detectar diferencias entre ellas, por lo que recurrimos a la lógica de primer orden, pero los enunciados involucrados también crecen en complejidad; una forma usual de medir la complejidad de un enunciado o fórmula es la cantidad de cuantificadores que aparecen en la fórmula.

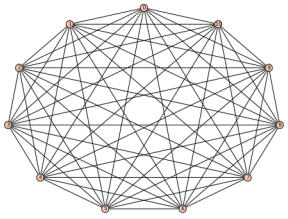
Siguiendo con la distinción entre gráficas, la gráfica (4) se distingue por el siguiente enunciado, que afirma que $\varphi(x)$ se cumple para cada vértice x,

$$\forall x \forall y(\neg(x = y) \longrightarrow R(x, y))$$

Cualquier gráfica modelo de este enunciado es una gráfica completa, donde la gráfica completa de n vértices se denota como k_n o K_n. Así, la gráfica 4 es k_6. Note que decimos la «gráfica completa», es decir, las gráficas completas para n fijo son escencialmente iguales.



(a) K_{10}



(b) K_{11}

Gráficas completas K_{10} y K_{11}.

Dado el enunciado arriba, que se satisface en cualquier gráfica completa, para poder distinguir a K_{10} de K_{11} debemos recurrir al tamaño del universo de las gráficas.

Mediante cuantificadores existenciales podemos encontrar un enunciado que se cumple en una y no en la otra; en general esto es posible para K_m, K_n, $m \neq n$, en tanto al menos uno de m, n sea finito.

La noción de isomorfismo es crucial en lógica de primer orden, en general en lógica matemática y ocurre entre diversas estructuras. En el ambiente de gráficas tenemos la siguiente versión.

Definición 3.2.7. Las gráficas $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_2$ son isomorfas si existe una función biyectiva f entre los vértices de $\mathfrak{G}_1$ y los de $\mathfrak{G}_2$ tal que los vértices $a, b \in \mathfrak{G}_1$ son adyacentes si y sólo si $f(a)$ y $f(b)$ son adyacentes en $\mathfrak{G}_2$. Tal función f es un isomorfismo.

Ejemplo 3.2.8. Considere las gráficas siguientes:

Gráfica $\mathfrak{G}$ vértices: a, b, c, d.

bordes: ab, bc, cd, ad.

Gráfica $\mathfrak{H}$ vértices: $1, 2, 3, 4$.

bordes: $12, 13, 24, 34$.

$$f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{w, x, y, z\},$$
$$f(a) = 1 \quad f(b) = 2 \quad f(c) = 4 \quad f(d) = 3,$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{H}$. Ambas gráficas se pueden dibujar como cuadrados.

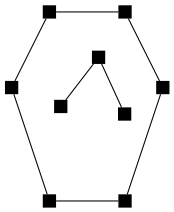
Hemos demostrado que un $\mathcal{L}_G$-enunciado distingue la gráfica (1) de la (4) (nos referimos a las gráficas en la página 175). Podemos hacer mucho más. Existe un $\mathcal{L}_G$-enunciado que distingue la gráfica (1) $\mathfrak{G}$ de cualquier gráfica no isomorfa a ella.

Es decir, existe un $\mathcal{L}_G$-enunciado φ_G tal que para toda gráfica $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \vDash \varphi_G$ si y sólo si $\mathfrak{H}$ es isomorfa a $\mathfrak{G}$, para lograrlo simplemente debemos describir mediante fórmulas adecuadas a cada gráfica; en el caso de la gráfica $\mathcal{G}$ tenemos,

$$\begin{aligned}\exists\, x_1 \ldots, x_9 \forall\, y\Big(\bigwedge_{i<j\leq 9} \neg x_i = x_j \wedge (y = x_1 \vee \cdots y = x_9) \wedge \\ R(x_1, x_2) \wedge R(x_1, x_6) \wedge R(x_1, x_3) \wedge R(x_2, x_6) \wedge R(x_3, x_4) \wedge \\ R(x_3, x_6) \wedge R(x_4, x_6) \wedge R(x_5, x_6) \wedge R(x_5, x_7) \\ \wedge R(x_7, x_6) \wedge R(x_1, x_2) \wedge R(x_9, x_6).\end{aligned}$$

Logramos describir el enunciado adecuado, en esta ocasión en virtud de la finitud del lenguaje y del universo.

En contraparte, no existe un enunciado que asegure que una gráfica tiene una cantidad par de vértices, y ningún enunciado puede afirmar que una gráfica es conexa, lo cual se probará en el segundo volumen usando compacidad. Por ejemplo, el enunciado $\forall x \exists y R(x,y)$ se cumple en toda gráfica conexa que tenga más de un vértice. Sin embargo, que este enunciado se cumpla en una estructura no significa que ésta sea conexa. Al respecto considere la gráfica,



El grado de un vértice v es la cantidad de vértices conectados a v mediante una arista. En la gráfica G (página 175), el grado de a es 1, el grado de b es 3, y c, d, e tienen grado 2.

La fórmula

$$\exists y[R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \to z = y)]$$

expresa que x tiene grado 1. Afirma que existe un vértice y que está conectado a x mediante una arista, y existe exactamente uno de tales y; que se expresa al decir que si un vértice z tiene una arista con x, entonces z debe ser y. Llamemos a esta fórmula $\varphi_1(x)$. Cuando x se interpreta como z en G, $\varphi_1(x)$ se vuelve cierta, y puede ser falsa cuando x se interpreta como otro vértice. Si bien $\varphi_1(x)$ expresa una propiedad importante, no lo hace en la forma más natural. Tenemos una ventaja sobre la lógica, que podemos ver la estructura en forma completa, que a está conectado a b y a ningún otro vértice. La lógica no tiene esa facilidad, sólo dispone de R^G para verificar que el grado de a es 1, y para lograrlo debe controlar el comportamiento de todos los vértices.

Una fórmula $\varphi_2(x)$ para expresar que el grado de x es 2,

$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2[\neg(x_1 = x_2) \wedge R(x,x_1) \wedge R(x,x_2) \wedge \\ \wedge \forall y(R(x,y) \to (y = x_1) \vee y = x_2)].\end{aligned}$$

Se puede mostrar que la suma de los grados de los vértices en una gráfica siempre es igual a 2 por el número de aristas. Si V es el conjunto de vértices y R es el conjunto de aristas, esto se puede expresar de la siguiente forma, donde $grado(v)$ es el grado del vértice v,

$$\sum_{v \in V} grado(v) = 2|R|.$$

Para cada número natural n, existe una fórmula $\varphi_n(x)$ que describe el hecho de que x tiene grado n. Una aplicación de este desarrollo la encontramos en la posibilidad de isomorfismos entre gráficas, pues el grado de un vértice en una gráfica debe corresponder con el grado del vértice asociado en la otra gráfica.

Con el ánimo de explotar un poco más lo anterior, tratemos de examinar la noción de simetría en una gráfica desde el punto de vista del lenguaje para gráficas.

Definición 3.2.9. Sea $\mathcal{G}$ una gráfica. Una permutación (es decir, una biyección) $f : G \longrightarrow G$ es una simetría de G si para cualesquier vértices u, w de G ocurre que

$$R(v,w) \qquad \Leftrightarrow \qquad R(f(v), f(w)). \tag{$\star$}$$

El lector debe darse cuenta que lo que aparece en ($\star$) no es una fórmula de $\mathcal{L}$, pues involucra a la función f que no está en nuestro lenguaje, por lo que el enunciado es una afirmación sobre $\mathcal{G}$ y la función f. Una simetría es una transformación que mueve elementos de la estructura, pero no cambia «la forma» de la estructura, donde por forma entendemos las propiedades características de la gráfica expresables en $\mathcal{L}$. La definición previa no se refiere a propiedades arbitrarias sino a fórmulas atómicas. Sería natural pensar que al permitir fórmulas más complejas, nuestra perspectiva de simetría sería mejor, pero no es el caso.

Proposición 3.2.10. *Sea $\mathcal{G}$ una gráfica. Una permutación $f : G \longrightarrow G$ es una simetría si y sólo si para toda fórmula de primer orden $\varphi(\vec{x})$ de $\mathcal{L}$ y para cualesquier vértices $v_1, \ldots, v_n$,*

$$\mathcal{G} \models \varphi[v_1, \ldots, v_n] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{G} \models \varphi[f(v_1), \ldots, f(v_n)]. \tag{$\ast$}$$

Después demostraremos esta proposición. Si comparamos ($\star$) con ($\ast$), parecen muy similares. La primera asegura que las simetrías preservan la relación arista; la segunda establece que las simetrías preservan cualquier propiedad de primer orden. Así, una vez que se sabe que una función inyectiva preserva la relación arista, preserva todas las propiedades de primer orden. En consecuencia, para verificar que cierta función no es una simetría, basta encontrar una propiedad que no se preserve por esta función.

En consecuencia, si f es una simetría de una gráfica G, y $f(v) = w$, los vértices v, w deben tener las mismas propiedades de primer orden. Para gráficas finitas, la recíproca de esa afirmación también es cierta, pero si queremos formular esto apropiadamente, requerimos la noción de tipo. Sea v un vértice de una gráfica. El tipo de v en G es la colección de $\mathcal{L}$-fórmulas $\varphi(x)$ que se cumplen en G cuando x se interpreta como v. De hecho, conocer una estructura realmente implica conocer los tipos de su elementos, pero si analizamos una estructura, podemos establecer que un elemento en ella tiene tal o cual propiedad de primer orden, pero esto está muy lejos de describir el tipo del elemento. Los tipos son extremadamente complejos, en general.

El teorema 3.2.10 implica que si f es una simetría de una gráfica G, para todo vértice v, el tipo de v y el de $f(v)$ son iguales. Si la gráfica G es finita, este enunciado tiene una recíproca.

Proposición 3.2.11. *Suponga que v y w son vértices de una gráfica finita G, y que los tipos de v y w son iguales. Entonces, existe una simetría f de G tal que $f(v) = w$.*

En lugar de demostrar la proposición 3.2.11 directamente, desarrollamos la prueba de un teorema más general, para después derivar el teorema que nos interesa.

Proposición 3.2.12. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras finitas, donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden. Suponga que para cada $\mathcal{L}$-enunciado φ,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Entonces, $\mathfrak{A}$ es isomorfa a $\mathfrak{B}$.

Demostración de la proposición 3.2.11 a partir de la proposición 3.2.12. Primero extendemos el lenguaje de la teoría de gráficas que hemos venido empleando, que consiste en un sólo símbolo de 2-relación R, añadiendo un símbolo de constante c. Nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ es entonces $\{R, c\}$. Consideramos la grafica en cuestión G en dos formas distintas, ambas como $\mathcal{L}$-estructuras, por lo que debemos interpretar el símbolo c. Llamamos $\mathfrak{A}$ a la gráfica G con la interpretación que ya tenemos de R e interpretando c como el vértice v. Hacemos lo mismo para construir $\mathfrak{B}$ pero interpretando c como w.

Sea φ un $\mathcal{L}$-enunciado. Tenemos dos casos a considerar: que φ contenga al símbolo c o no. Si no lo contiene, φ es un enunciado del lenguaje «viejo», por lo que se cumple en $\mathfrak{A}$ si y sólo si se cumple en $\mathfrak{B}$, dado que ambas son iguales sin involucrar a c.

En caso de que φ contenga a c, construimos una fórmula $\varphi'(x)$ sustituyendo en φ cualquier aparición de c por una variable libre x nueva, que no aparezca en φ. Por la hipótesis sobre v y w se deduce que

$$\mathfrak{A} \models \varphi'[u] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi'[v]$$

dando paso a

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Esto comprueba que todo $\mathcal{L}$-enunciado se cumple en $\mathfrak{A}$ si y sólo si se cumple en $\mathfrak{B}$. De acuerdo con la proposición 3.2.12 existe un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Un isomorfismo debe respetar la interpretación de símbolos de constante, esto es,

$$f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}},$$

es decir,

$$f(v) = w.$$

□

La definición formal de isomorfismo entre $\mathcal{L}$-estructuras, $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Decimos que una aplicación $f : C \longrightarrow D$ es un isomorfismo cuando se cumplen las siguientes condiciones.

- f es una biyección.
- Para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$,
$$f(c^{\mathfrak{C}}) = c^{\mathfrak{D}}.$$
- Si h es un símbolo de n-función de $\mathcal{L}$, y $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de C, entonces
$$f(h^{\mathfrak{C}}(x_1, \ldots, x_n)) = h^{\mathfrak{D}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$
- Dado cualquier símbolo de n-relación R de $\mathcal{L}$ y $x_1, \ldots, x_n$ elementos de C, ocurre que
$$R^{\mathfrak{C}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{D}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Pero esta definición no indica nada, aparentemente, sobre la validez de fórmulas entre estructuras isomorfas. Para ello sirve el siguiente resultado.

Proposición 3.2.13. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ interpretaciones del lenguaje $\mathcal{L}$, y $\tau : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un isomorfismo. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ y toda $\mathfrak{A}$-asignación α, ocurre que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[\tau \circ \alpha].$$

En particular, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen los mismos $\mathcal{L}$-enunciados.

Demostración. Primero examinamos el comportamiento de los $\mathcal{L}$-términos. Ponemos $\beta = \tau \circ \alpha$.

Afirmación 1. Sea t un $\mathcal{L}$-término. Entonces,
$$\tau(t^{\mathfrak{A}}[\alpha]) = t^{\mathfrak{B}}[\beta].$$

Demostración de la afirmación 1. Procedemos por inducción en la construcción de t.

- Si t es un símbolo de constante c,
$$\tau(t^{\mathfrak{A}}[\alpha]) = \tau(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}[\beta].$$
por definición de isomorfismo.
- Si t es la variable x, se cumple que
$$\tau(x^{\mathfrak{A}}[\alpha]) = \tau(\alpha(x)) = \beta(x) = x^{\mathfrak{B}}[\beta].$$
- Supongamos que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ se deduce, usando la hipótesis de inducción,

que

$$\begin{aligned}\tau(f(t_1,\ldots,t_n)^{\mathfrak{A}}[\alpha] &= \tau(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha],\ldots,t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]))\\ &= f^{\mathfrak{B}}(\tau(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha]),\ldots,\tau(t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]))\\ &= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\beta],\ldots,t_n^{\mathfrak{B}}[\beta])\\ &= f^{\mathfrak{B}}(t_1,\ldots,t_n)[\beta].\end{aligned}$$

(1)

Ya que sabemos el comportamiento de los $\mathcal{L}$-términos respecto al isomorfismo τ, podemos probar la afirmación del teorema.

Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula. Comprobaremos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{B} \models \varphi[\beta].$$

Procedemos por inducción en la construcción de φ.

- Si $\varphi \equiv t_1 = t_2$, por inyectividad de τ deducimos que,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\alpha] &\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha] = t_2^{\mathfrak{A}}[\alpha]\\ &\Leftrightarrow \tau(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha]) = \tau(t_2^{\mathfrak{A}}[\alpha])\\ &\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{B}}[\beta]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (t_1 = t_2)[\beta].\end{aligned}$$

- Si $\varphi \equiv R(t_1,\ldots,t_n)$, se deduce que,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models R(t_1,\ldots,t_n)[\alpha] &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha],\ldots,t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha])\\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\tau(t_1^{\mathfrak{A}}[\alpha]),\ldots,\tau(t_n^{\mathfrak{A}}[\alpha]))\\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\beta],\ldots,t_n^{\mathfrak{B}}[\beta])\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models R(t_1,\ldots,t_n)[\beta].\end{aligned}$$

- Si $\varphi \equiv \neg\psi$, por hipótesis de inducción damos lugar a,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \neg\psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\alpha]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi[\beta].\end{aligned}$$

- Si $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, también por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1[\alpha] \text{ y } \mathfrak{A} \models \psi_2[\alpha]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\beta] \text{ y } \mathfrak{B} \models \psi_2[\beta]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta].\end{aligned}$$

- Si $\varphi \equiv \forall\, x\psi$, apelamos, otra vez, a la hipótesis de inducción en la fórmula ψ y la asignación $\alpha^{x/a}$ para $a \in A$, y apelando a que τ es sobre,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \forall\, x\psi[\alpha] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}] \text{ para toda } a \in A\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\tau \circ (\alpha^{x/a})] \text{ para toda } a \in A\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\beta^{x/\tau(a)}] \text{ para toda } a \in A\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\beta^{x/b}] \text{ para toda } b \in B\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \forall\, x\psi[\beta].\end{aligned}$$

  Dado que τ es sobre, $b = \tau(a)$ recorre a todo B, cuando a recorre todo A.

□

Demostración de la proposición 3.2.12. Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ satisfacen las hipótesis del teorema pero que no son isomorfas. Dado que A y B son finitas, sea n el tamaño de A y como esto se puede expresar mediante un $\mathcal{L}$-enunciado, y $\mathfrak{B}$ satisface los mismos enunciados, B tiene tamaño n. En efecto,

$$\mathfrak{A} \models \exists\, x_1, \ldots, x_n \forall\, x \left(\bigwedge_{i<j<n+1} \neg x_i = x_j \wedge \bigvee_{i=1}^{n} x = x_i \right),$$

expresa que A tiene n elementos, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Ya que supusimos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ no son isomorfas, ninguna función $f : A \longrightarrow B$ puede ser un isomorfismo y tenemos una cantidad finita de tales funciones, digamos $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Puesto que ninguna función f_i puede ser un isomorfismo, para cada i existe una fórmula $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[a_1, \ldots, a_n],$$

pero

$$\mathfrak{B} \not\models \varphi_i[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Con esta elección de fórmulas, construimos el enunciado

$$\exists\, x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(\vec{x}).$$

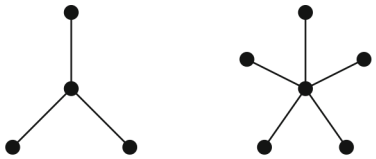
Las fórmulas $\varphi_i(\vec{x})$ se eligieron de tal manera que todos los conyuntos en φ se cumplen cuando se interpretan como $a_1, \ldots, a_n$; en consecuencia, φ se cumple en $\mathfrak{A}$. Resta probar que φ no se cumple en $\mathfrak{B}$, pues en tal caso, se contradice la hipótesis.

Si $\mathfrak{B}$ validara φ, existe una sucesión de testigos $b_1, \ldots, b_n$, en cuyo caso la función $f : A \longrightarrow B$ definida mediante la prescripción $f(a_i) = b_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, es una

de las $f_j : A \longrightarrow B$ antes enlistadas, por lo que $\varphi_j(b_1 b_{,2}, \ldots, b_n)$ no se cumple en $\mathfrak{B}$, lo que se opone a lo antes dicho. ☐

La proposición 3.2.11 tiene diversas consecuencias. En particular, nos indica que una descripción de una estructura debe incluir una lista de tipos de sus elementos, algunos de los cuales distan de ser fácilmente clasificables. El teorema nos dice que podemos estimar cuántos tipos de elementos diferentes tiene una estructura analizando sus simetrías. Si dos vértices de una gráfica finita tienen el mismo tipo, existe una simetría que aplica uno en el otro, de donde se sigue que si un vértice queda fijo respecto a todas las simetrías de la gráfica, debe tener un tipo único. Identificar tales vértices es un etapa importante en el conocimiento de la estructura.

Ejemplo 3.2.14. Sea $n \in \mathbb{N}$; una n-estrella es una gráfica que tiene un vértice distinguido que tiene aristas con otros n vértices, y no tiene más vértices o aristas. Sea S_n la gráfica n-estrella. La figura muestra S_3 y S_5.



S_3 S_5

Las estrellas S_1, y S_2 son excepciones, pero a partir de $n = 3$, cada gráfica S_n tiene vértices de exactamente dos tipos. El vértice en el centro tiene grado n, mientras que el resto de vértices son de grado 1. Cualquier permutación que deje fijo al centro, es una simetría de S_n. Excepto por el centro, una simetría puede intercambiar cualquier pareja de vértices, con lo que se obtiene una descripción completa de las simetrías de S_n. El centro es único, queda fijo por las simetrías.

La Gráfica Aleatoria y las Leyes $0-1$

Las gráficas aleatorias son un ejemplo importante de gráficas, por ello decidimos escribir un poco al respecto. No obstante, prevenimos al lector que algunos desarrollos y técnicas de este apartado no se han presentado aún o no aparecerán en absoluto, pero son usuales en cualquier libro de teoría de modelos. Este apartado es en extremo avanzado, comparado al resto del volumen. Queda, pues, advertido el lector de que puede no ser claro el contenido del mismo.

Una gráfica aleatoria es una gráfica construida por algún proceso aleatorio, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda. Supongamos que tenemos n vértices y queremos calcular la probabilidad de obtener un polígono con todas las aristas posibles.

El número de lanzamientos que debemos hacer es $\frac{n(n-1)}{2}$, lo que denotaremos por $e(n)$. La probabilidad buscada es:

$$\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}. \tag{3.2.1}$$

Pues hay que lanzar la moneda $\frac{n(n-1)}{2}$ veces y sólo hay un resultado favorable, a saber, $(1,1,1\ldots,1)$.

Si queremos que la gráfica tenga exactamente m aristas existen

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m} \tag{3.2.2}$$

configuraciones favorables, cada una de las cuales tiene una probabilidad de salir de

$$\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}, \tag{3.2.3}$$

es decir, es de

$$\frac{e(n)!}{(e(n)-m)!m!}\frac{1}{2^{e(n)}}. \tag{3.2.4}$$

Sea $\mathfrak{L}_R$ el lenguaje de las gráficas que contiene un solo predicado R, binario. Si θ es un enunciado de este lenguaje, $P_n(\theta)$ es la probabilidad de que una gráfica de n vértices construida aleatoriamente modele θ. Por ejemplo, sea θ en enunciado

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge xRy \wedge \forall z((z \neq x \wedge z \neq y) \rightarrow \neg \exists w(zRw))$$

entonces

$$P_n(\theta) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}. \tag{3.2.5}$$

Advierta que

$$Lim_{n\rightarrow\infty} P_n(\theta) = 0. \tag{3.2.6}$$

La ley 0-1 para gráficas establece que para cada enunciado λ de $\mathfrak{L}_R$ ocurre que $Lim_{n\rightarrow\infty} P_n(\lambda) = 0$ o $Lim_{n\rightarrow\infty} P_n(\lambda) = 1$. Una forma de probarla es considerar los enunciados del tipo siguiente. Para $m \in \mathbb{N}$ sea ρ_m el enunciado,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \forall y_1 \ldots \forall y_m \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \right) \rightarrow \right.$$
$$\left. \exists z \left(\bigwedge_{i=1}^{m} R(x_i, z) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} (\neg R(z, y_i)) \wedge z \neq y_j \right) \right).$$

La magnitud ρ_m significa que cada vez que en la gráfica tomemos dos grupos ajenos de vértices, cada uno de m vértices, habrá un vértice distinto de todos ellos conectado

con todos los primeros y con ninguno de los segundos. Es difícil saber qué tan grande tiene que ser una gráfica para validar ρ_m aún para m relativamente pequeño. Sin embargo, podemos establecer algunas generalidades sobre la interacción entre n y m en $P_n(\rho_m)$. Por ejemplo, que si $n \leq m$, entonces $P_n(\rho_m) = 0$, pues claramente se requiere una gráfica muy grande para validar ρ_m. Menos obvio es que $P_n(\rho_m)$ se acerca a 1 conforme m crece, como demostraremos en el siguiente teorema.

 **Teorema 3.2.15.** *Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $Lim_{n\to\infty} P_n(\rho_m) = 1$.*

Demostración. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ fijo y calcularemos $P_n(\neg\rho_m)$ donde $n = N + 2m$. Sean $\mathfrak{G}$ una gráfica con n vértices, $X = \{x_1, \ldots x_n\}$ y $Y = \{y_1, \ldots y_n\}$ dos conjuntos ajenos de vértices de $\mathfrak{G}$. Si existe un vértice z tal que para todo x_i, $R(z, x_i)$ y para cualquier y_i no es el caso que $R(z, y_i)$, diremos que z funciona para X y Y. Primeramente calculemos la probabilidad de que este sea el caso para X y Y fijos. Para que esto suceda, en los lanzamientos para $R(z, x_i)$ deberá salir águila y en los correspondientes a $R(z, x_i)$ deberá caer sol. La probabilidad de que esto suceda para un z dado es de $\frac{1}{2^m}$. Pero, dado que disponemos de N vétices posibles para que ocupen el lugar de z, la probabilidad de que ninguno de ellos funcione para X y Y es de:

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)^N. \tag{3.2.7}$$

Puesto que

$$0 < \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)^N < 1 \qquad Lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)^N = 0. \tag{3.2.8}$$

Es decir, cuando N es grande la probabilidad de que exista un z que funcione para X y Y se acerca a 1, aunque la probabilidad de que cualquier z particular funcione es baja. Hasta aquí X y Y han estado fijos, pero para que la gráfica $\mathfrak{G}$ modele ρ_m debe existir un z que funcione para cada posible elección de X y Y. Puesto que tenemos $n = N + 2m$ vértices, existen

$$\binom{n}{2m} \tag{3.2.9}$$

modos de elegir los vértices de X y Y. Una vez elegidos habrá

$$\binom{n}{2m} \tag{3.2.10}$$

formas de seleccionar m de esos vértices para constituir X. ∎

Por ende, tenemos en total

$$\left(\frac{n!}{(n-2m)!2m!}\right)\left(\frac{2m!}{m!m!}\right) = \frac{n!}{N!m!m!} \tag{3.2.11}$$

modos de formar X y Y. Ahora bien,

$$\frac{n!}{N!m!m!} < \frac{n^{2m}}{m!m!} < n^{2m}, \tag{3.2.12}$$

pues

$$\frac{n!}{N!} = n(n-1)\dots(n-2m+1) < n^{2m}. \tag{3.2.13}$$

Para cada selección, la probabilidad de que ninguna z funcione es $\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)^N$. Para que $\mathfrak{G}$ modele $\neg\rho_m$, esto debe pasar para al menos una de esas elecciones. Por lo tanto,

$$P(\neg\rho_m) \leq n^{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)^N = \frac{n^{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)^{2m}}. \tag{3.2.14}$$

Esta es una sobreestimación, pero es suficiente. Dado que $\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right) < 1$, se desprende que

$$Lim_{n\to\infty} n^{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)^n = 0. \tag{3.2.15}$$

Esto puede comprobarse usando el cálculo. Dado que $Lim_{n\to\infty}P(\neg\rho) = 0$, entonces $Lim_{n\to\infty}P(\rho) = 1$.

Definamos ahora una $\mathfrak{L}$-teoría T (un conjunto consistente de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados) de gráficas que modela ρ_m para toda $m \in \mathbb{N}$, cuyos axiomas son:

$$\forall x \neg R(x,x)$$

$$\forall x \forall y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$$

$$\exists x \exists y \neg (x = y)$$

$$\{\rho_m : m \in \mathbb{N}\}.$$

Dado que cada subconjunto finito de enunciados de T es satisfacible (como acaba de ser demostrado), T es una teoría. Vamos a probar algunas de sus propiedades.

Teorema 3.2.16. *T es $\aleph_0$-categórica. Esto es, cualesquier dos modelos numerables de T son isomorfos.*

Demostración. Tomemos dos modelos numerables M y N de T y sean $U_M = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$ y $U_N = \{b_1, b_2, b_3 \dots\}$ los universos respectivos de esos modelos. Construiremos un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$ usando el método de ida y vuelta. Sea $f(a_1) = b_1$ y supongamos que, después de n etapas, f ha sido definida para el conjunto de vértices $A_m \subset U_M$. Sea j el menor índice tal que $a_j \notin A_m$. Puesto que $N \models \rho_m$ para m arbitrariamente grande, existe un vértice $b \in U_N$ tal que $N \models (R(f(a_i, b)$ si y solo si $M \models R(a_i, a_j)$ para cualquier $a_i \in A_n$. Definimos $f(a_j) = b$, sean $B_n = \{f(a_i) | a_i \in$

$A_n\} \cup \{f(a_j)\}$ y j el menor índice tal que $b_j \notin B_n$. Hacemos $f^{-1}(b_j)$ como en el caso anterior. Claramente f es un isomorfismo. □

Definición 3.2.17. Llamaremos gráfica aleatoria al único modelo numerable de T, y la denotaremos con $\mathfrak{G}$.

Teorema 3.2.18. *Cualquier gráfica finita G se puede encajar en cada modelo M de T.*

Demostración. La prueba es por inducción en $n = |G|$. Obviamente se cumple para $n = 1$. Supongamos que cualquier gráfica de m vértices se encaja en M y Sea G una gráfica con vértices $v_1, v_2, \ldots v_{m+1}$. Por hipótesis de inducción, la subestrucrtura G' de G con vértices $v_1, v_2, \ldots v_m$ puede ser encajada en M y denotemos con $f : G' \longrightarrow M$ a este encaje. Ya que M modela ρ_k para k suficientemente grande, existe un vértice $b \in M$ tal que $M \models R(f(a_i), b)$ si y solo si $g \models R(a_i, a_{n+1})$ para $i = 1, \ldots n$. Sea $f(a_{n+1}) = b$. Así, G se encaja en M. □

Corolario 3.2.19. *T solo tiene modelos infinitos.*

Teorema 3.2.20. *T es completa.*

Demostración. Puesto que T solo tiene modelos infinitos y es categórica, tiene que ser completa. □

Teorema 3.2.21. *Para cada enunciado de $\mathfrak{L}_R$ ϕ o $Lim_{n\to\infty}P(\phi) = 0$ o $Lim_{n\to\infty}P(\phi) = 1$.*

Demostración. Por el teorema 3.2.15 si θ es uno de los axiomas dados entonces $Lim_{n\to} P_n\ (\theta) = 1$. Se sigue que $Lim_{n\Rightarrow}P_n(\phi) = 1$ para cada enunciado T. Ya que T es completa, $T \vdash \theta$ o $T \vdash \neg\theta$ para cada enunciado $\mathfrak{L}_R$. En consecuencia, $Lim_{n\to\infty}P(\phi) = 0$ o $Lim_{n\to\infty}P(\phi) = 1$. □

El tlacuache es un ladrón. ¡Cómo no ha de serlo, si «sus manitas son casi de crsitiano»! Con ellas abre las tapas, corre las trancas, quita – en busca de aguamiel – las piedras que cubren el cuenco de los magueyes, y atrapa gallinas para chuparles los sesos y la sangre. Cuando el origen del mundo, subió a un cerro empinado y de la cumbre robó el fuego que guardaban siete jaguares. Con su cola agito las acuas, y las chispas cayeron en los ojos de las fieras, cegándolas. Huyo con el fuego y lo entrego a los hombre en cuatro piras.

Mito tlapaneco.

Bases de datos

Una base de datos proporciona un ejemplo concreto de estructura.

Cualquier colección de datos se puede ver como una base de datos, ya sea un directorio telefónico, un catálogo o un árbol genealógico. Una base de datos relacional se presenta como un conjunto de tablas. Por ejemplo:

Tabla P

Padre	Hijo
Raúl	Cándido
Raúl	Susana
Susana	Tomás
Dorotea	Juan
Roberto	Juan
Roberto	Luz
Juan	Tomás
Susana	Samuel
Juan	Samuel
Azálea	Max
Samuel	Max

Tabla M

Mujeres
Dorotea
Azálea
Luz
Susana

Tabla C

Persona	Cumpleaños
Ana	5 - 08
León	8 - 08
Max	28- 07
Samuel	1 - 08
Susana	24 - 07

El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en una n-relación para cada tabla, donde n es el número de columnas en la tabla. En nuestro caso M es 1-relación, mientras que P, C son 2-relaciones

La $\mathcal{L}$-estructura D interpreta esas relaciones como renglones de las tablas. Por ejemplo, $D \vDash C(a, b)$ si y sólo si (a, b) es un renglón de la tabla de cumpleaños.

Esto describe completamente la estructura D. Por ejemplo:

$$D \vDash M(\text{Dorotea})$$
$$D \vDash P(\text{Azálea, Max})$$
$$D \vDash \neg C(\text{Azálea}, 28-07)$$

Además, podemos definir fórmulas que expresen varias relaciones en D.
Por ejemplo, la fórmula $\neg M(x)$ dice que x es un hombre.
$\exists z\ (P(x,z) \wedge P(z,y))$ dice que x es abuelo de y.
$\exists z\ (P(x,z) \wedge P(z,y)) \wedge M(x)$, x es abuela de y.
$\exists y C(x,y)$ dice que y es una fecha y x una persona.
$\exists z\ (C(x,z) \wedge C(y,z))$ asegura que x, y tienen el mismo cumpleaños.

Órdenes lineales

Ahora consideraremos estructuras de lenguaje $\mathcal{L}_<$, que consiste sólo en una 2-relación $<$. En lugar de escribir $<(x,y)$ usamos $x < y$ y la interpretamos como «x menor que y».

Consideremos cuatro $\mathcal{L}_<$-estructuras $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <) \quad \mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, <) \quad \mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <) \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <),$$

donde $<$ se interpreta en la forma natural en todas estas estructuras, dando lugar a muchas coincidencias. Todas son modelo de los $\mathcal{L}_<$-enunciados

- $\forall x \forall y((x < y) \to \neg(y < x))$.
- $\forall x\ (\neg(x < x))$.
- $\forall x \forall y((x < y) \vee (y < x) \vee (x = y))$.
- $\forall x \forall y \forall z\ (((x < y) \wedge (y < z)) \to (x < z))$.

Si tomamos la conjunción de estos enunciados, obtenemos la afirmación de que $<$ es un orden lineal.

Sea φ el enunciado $\forall x \exists y(y < x)$, el cual afirma que «no hay menor elemento». Es claro que $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son modelos de φ. En cambio, $\mathfrak{N}$ es modelo de $\exists x \forall y \neg(y < x)$, que asegura que existe un menor elemento. Sea θ este enunciado, y note que θ es equivalente a $\neg\varphi$. El enunciado θ distingue a $\mathfrak{N}$ del resto.

Encontremos un enunciado que distinga a $\mathfrak{Z}$ del resto. Observe que $\mathbb{Z}$ no tiene menor elemento y que no es denso: un conjunto linealmente ordenado es denso si entre cualesquier dos elementos existe otro. Esta propiedad se expresa como

$$\forall x \forall y((x < y) \longrightarrow \exists z\ ((x < z) \wedge (z < y))).$$

Sea δ este enunciado, que se cumple tanto en $\mathfrak{Q}$ como en $\mathfrak{R}$. Así, $\mathbb{Z} \vDash \neg\delta$. El enunciado $\varphi \wedge \neg\delta$ distingue a $\mathbb{Z}$ del resto.

Ahora suponga que queremos distinguir $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{R}$. Podemos usar varias propiedades inherentes a $\mathbb{R}$ como el tamaño o la existencia de supremos, pero ninguna es expresable en el lenguaje $\mathcal{L}_<$, como veremos después (en aplicaciones del teorema de compacidad).

Desde el punto de vista del lenguaje $\mathcal{L}_<$, $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{Q}$ no se puede distinguir mediante un enunciado. Esta afirmación se formaliza mediante la noción de equivalencia elemental, que se presenta en teoría de modelos.

Sistemas numéricos

Tratemos de expandir $\mathcal{L}_<$ para poder expresar que $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{R}$ son diferentes.

Considere el lenguaje $\{+, \cdot, 0, 1\} = \mathcal{L}$ y las $\mathcal{L}$-estructuras

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1), \quad \mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1), \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), \quad \mathfrak{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1).$$

En lugar de usar $+(x, y) = z$ escribimos $x + y = z$. Lo mismo para el producto $\cdot$; 2 significa $(1 + 1)$ y x^2 abrevia $x \cdot x$.

Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{N}$ es un $\mathcal{L}$-término.

Ecuaciones como

$$x^5 - 9x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

son $\mathcal{L}$-fórmulas. Otra vez 3 y x^5 no son símbolos de $\mathcal{L}$ sino abreviaciones de los $\mathcal{L}$-términos $(1 + (1 + 1))$ y $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, respectivamente. Además, -9 o -2 son abreviaciones del inverso aditivo de 9, o de 2, respectivamente, por lo que estas expresiones no tienen sentido en $\mathbb{N}$. Esto es, por ejemplo, para $\exists z(z + (1 + 1) = 0)$, el único testigo de esta fórmula es -2.

Considere el $\mathcal{L}$-enunciado $\exists x\ (x^2 = 2)$ que asegura la existencia de $\sqrt{2}$. Se sigue que $\mathfrak{R}$ es modelo del enunciado, no así $\mathfrak{Q}$. También la ecuación $2x + 3 = 0$ tiene solución en $\mathfrak{Q}$ pero no en $\mathfrak{A}$. Así que, $\mathfrak{Q} \vDash \exists x\ (2x + 3 = 0)$, mientras que $\mathfrak{A} \vDash \neg\exists x\ (2x + 3 = 0)$.

El enunciado $\exists x\ (x^2 + 1 = 0)$ distingue a $\mathfrak{C}$ del resto.

Cumplida esta tarea se consultaron los dioses y dijieron: ¿Quién habitará esta tierra, pues que se estancó el cielo y se paró el señor de la tierra? ¿Quién habitará, oh dioses?. Luego de deliberar, los dioses decidieron encomendar a Quetzalcóatl la misión de crear nuevamente a los seres y éste descendió entonces al bajo mundo, al reino de Mictlantecutli, para obtener de éste los huesos y las cenizas de las anteriores generaciones de la

humanidad y volver a crear con ellos a los seres humanos. Al principio el regente del inframundo se negó a entregarle los huesos y las semillas preciosas. Con ardides venció Quetzalcóatl la resistencia de Mictlantecutli, pero cuando ya tenía los huesos y regresaba con ellos cayó en un hoyo que Mictlantecutli le había preparado y ahí se le rompieron; por eso es que los nuevos seres tuvieron estaturas diferentes y no alcanzaron el tamaño de los anteriores gigantes.

Finalmente Quetzalcóatl llegó a Tamoanchan, donde estaban reunidos los dioses, y les hizo entrega de su carga. En seguida la diosa Ciuacóatl-Quilaztli molió los huesos y formó con ellos una masa que depositó en un recipiente. Entonces Quetzalcóatl se sangró el sexo y derramó su sangre divina en el recipiente y los demás dioses hicieron también sacrificios. Así, dos años después, que fue el año del diluvio, los dioses crearon a los macehuales como antes los había, y hasta el cumplimiento de los trece años no pintan en sus códices otra cosa que aconteciese. Luego los dioses se preguntaron: ¿Qué comerán los macehuales? Entonces Quetzalcóatl, quien sabía que la hormiga roja conocía el lugar donde estaban escondidos los alimentos preciosos, le preguntó insistentemente por ellos. Al fin la hormiga roja cedió a sus ruegos y les indicó el sitio donde se encontraba el maíz. Convertido en hormiga negra, Quetzalcóatl llegó con la hormiga roja a la montaña que llaman Tonacatépetl, donde se guardaba el maíz. Lo tomó y lo llevó a Tamoanchan; ahí lo mascaron los dioses y luego lo pusieron en la boca de los hombres, que así se hicieron robustos.

3.3 Sustitución

En este breve apartado tratamos la operación de sustitución de gran relevancia en la lógica de primer orden. Hemos intentado reducirlo, en lo posible, pero no podemos eliminar el carácter eminentemente técnico del material, por lo que hemos pospuesto hasta el final del capítulo el desarrollo más detallado del procedimiento de sustitución.

Es común en matemáticas remplazar una variable por alguna expresión que denote un objeto del tipo que la variable representa. En lógica de primer orden esta operación se lleva a cabo al colocar un término en lugar de una variable libre.

En el resto de la sección fijamos un lenguaje $\mathcal{L}$ y acordamos que cualquier término, fórmula, etc. se refiere a este lenguaje.

Definición 3.3.1. Sean u un término, una variable x. Definimos la sustitución del término u por la variable x en el término t, $t_x(u)$, como sigue.

(i) Si t es una variable y,

$$y_x(u) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x \\ y, & \text{en otro caso..} \end{cases}$$

(ii) Si t es un símbolo de constante c, $c_x(u) = c$.

(iii) Si t es un símbolo de n-función f y $t_1, \ldots, t_n$ son términos,

$$(f(t_1, \ldots, t_n))_x(u) = f((t_1)_x(u), \ldots, (t_n)_x(u)).$$

Con esto queda definido como sustituir un término en lugar de una variable en un término. A continuación proporcionamos la definición correspondiente para fórmulas.

Definición 3.3.2. Sean u un término y x una variable.

(i) Si t_1, t_2 son términos, $(t_1 = t_2)_x(u) \equiv ((t_1)_x(u) = (t_2)_x(u))$.

(ii) Sean R un símbolo de n-relación y $t_1, \ldots, t_n$ términos,

$$R(t_1, \ldots, t_n)_x(u) \equiv R(t_1)_x(u), \ldots, (t_n)_x(u).$$

(iii) Si φ es un fórmula, $(\neg\varphi)_x(u) \equiv \neg\varphi_x(u)$.

(iv) Si φ, ψ son fórmulas, $(\varphi \vee \psi)_x(u) \equiv \varphi_x(u) \vee \psi_x(u)$.

(v) Si φ es una fórmula y v es una variable,

$$(\exists v\varphi)_x(u) \equiv \begin{cases} \exists v\varphi, & \text{si } v \text{ es } x \\ \exists v\varphi_x(u), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La parte semántica de la sustitución puede presentar algunas complicaciones. Por ejemplo, si $\forall x\varphi$ es verdadera, sería razonable esperar que $\varphi_x(u)$ también sea verdadera; es decir,

$$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[\alpha] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_x(u)[\alpha],$$

o lo que es equivalente, $\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u)$. En forma análoga, podríamos esperar que $\models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi$ sea verdadera. Aquí surgen complicaciones, a saber, considere el lenguaje $\mathcal{L} = \{<, +, \cdot, S, 0\}$, donde S es la función sucesor, así como la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0\rangle$ con la interpretación usual. La sustitución $\varphi_x(y)$ donde $\varphi \equiv \exists y(S(x) = y)$. Obtenemos $\exists y(S(y) = y)$; es claro que $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$ pero no es cierto que $\mathfrak{A} \models \varphi_x(y)$. El problema radica en que la variable y en $S(y)$ entra en el alcance del cuantificador $\exists y$. En la vida real, cambiamos la variable cuantificada y sólo entonces llevamos a cabo la sustitución, esto es, $\exists z(S(x) = z)_x(y) \equiv \exists z(S(y) = z)$ que tiene el significado que pretendemos.

Para evitar dificultades como las que recién describimos, debemos asegurarnos, antes de sustituir un término u en lugar de la variable x, que ninguna ocurrencia libre de x aparece en el alcance de $\exists y$ para ninguna variable y que ocurra en u.

Definición 3.3.3. Sea φ una fórmula, x una variable y u un término. Decimos que u se puede sustituir libremente en lugar de x o que x es libre para u en φ, en símbolos $sust(\varphi, u, x)$, si ocurre alguna de las siguientes condiciones.

(i) φ es atómica.

(ii) Para alguna ψ, φ es $\neg\psi$ y u se puede sustituir libremente por x en ψ.

(iii) $\varphi \equiv \psi \vee \theta$ y u se puede sustituir libremente por x en ψ y θ.

(iv) $\varphi \equiv \exists y\psi$ y (1) $x \notin lib(\varphi)$ o (2) u se puede sustituir libremente por x en ψ y y no aparece en u.

De ocurrir lo anterior, decimos que $\varphi_x(u)$ es una sustitución libre.

Ahora debemos cerciorarnos de que la sustitución recién descrita cumple con nuestras expectativas. Para corroborarlo, como es natural, requerimos una serie de resultados ciertamente técnicos.

Lema 3.3.4. *Sean $\mathfrak{A}$ una estructura, x una variable y u un término. Si $a = u^{\mathfrak{A}}[\alpha]$, entonces*

(i) Sea t un término, $(t_x(u))^{\mathfrak{A}}[\alpha] = t^{\mathfrak{A}}[\alpha^{x/a}]$.

(ii) Sea θ una fórmula, si u se puede sustituir libremente por x en θ, entonces

$$\mathfrak{A} \models \theta_x(u)[\alpha] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \theta[\alpha^{x/a}].$$

Demostración. (i) Es inmediata por inducción en la construcción de t. Por ejemplo, si t es la variable x, se sigue que

$$(t_x(u))^{\mathfrak{A}}[\alpha] = u^{\mathfrak{A}}[\alpha] = a = \alpha^{x/a}(x) = t^{\mathfrak{A}}[\alpha^{x/a}].$$

(ii) Procedemos por inducción en la construcción de θ. El caso más relevante es $\theta \equiv \exists y\varphi$. Supongamos que u se puede sustituir libremente por x en θ. Si (1) $x \notin lib(\theta)$, entonces $\theta_x(u)$ es θ y para cada $z \in lib(\theta)$, $\alpha(z) = \alpha^{x/a}(z)$, de donde se sigue la equivalencia que buscamos.

Ahora supongamos (2) $x \in lib(\theta)$, que $sust(\varphi, u, x)$ y que y no aparece en u. Por consiguiente, x y y son variables distintas, $\theta_x(u) \equiv \exists y\varphi_x(u)$, y

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \theta_x(u)[\alpha] &\Leftrightarrow \text{ para alguna } b \in A \ \ \mathfrak{A} \models \varphi_x(u)[\alpha^{y/b}]\\ &\Leftrightarrow \text{ para alguna } b \in A \ \ \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{y/b,x/a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y\varphi[\alpha^{x/a}].\end{aligned}$$

Sólo requerimos la hipótesis de que y no aparece en u para probar que $a = u^{\mathfrak{A}}[\alpha] = u^{\mathfrak{A}}[\alpha^{y/b}]$, así que la segunda equivalencia es una instancia de la hipótesis de inducción. ☐

Corolario 3.3.5. *Sean u_1, u_2 términos. Entonces*

(i) Si t es un término, $\models u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2)$.

(ii) Si θ es una fórmula tal que $sust(\theta, u_1, x)$ y $sust(\theta, u_2, x)$. Se sigue que

$$\models u_1 = u_2 \to [\theta_x(u_1) \leftrightarrow \theta_x(u_2)].$$

☐

Proposición 3.3.6. *Para cualesquier θ, x y u, si $sust(\theta, u, x)$, entonces*

$$\models \forall x\theta \to \theta_x(u) \quad y \quad \models \theta_x(u) \to \exists x\theta.$$

Demostración. La segunda afirmación se sigue de la primera, si aplicamos ésta a $\neg\theta$, por lo que basta probar la primera. Fijamos $\mathfrak{A}$ y α. Por el lema previo, podemos establecer las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \forall x\theta[\alpha] &\Leftrightarrow \text{ para toda } a \in A, \mathfrak{A} \models \theta[\alpha^{x/a}]\\ &\Rightarrow \text{ para } a = u^{\mathfrak{A}}[\alpha], \mathfrak{A} \models \theta^{[}\alpha^{x/a}]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \theta_x(u)[\alpha].\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.7. *Para cualesquier θ, x y u, si ninguna variable excepto x aparece en u, entonces $sust(\theta, u, x)$.*

Demostración. Se procede por inducción en la construcción de θ. □

Corolario 3.3.8. *Para cualesquier fórmula θ, variable x y símbolo de constante c,*

(i) $\models \forall x\theta \to \theta$ *y* $\models \forall x\theta \to \theta_x(c)$;

(ii) $\models \theta \to \exists x\theta$ *y* $\models \theta_x(c) \to \exists x\theta$.

Demostración. Un poco de reflexión da lugar a concluir que θ es $\theta_x(x)$, y que tanto x como c se pueden sustituir libremente en θ por x. □

Proposición 3.3.9. *Para cualquier conjunto Γ de fórmulas, cualesquier fórmulas ψ, θ y variable x con $x \notin lib(\theta)$ y para cada $\varphi \in \Gamma$, $x \notin lib(\varphi)$, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $\Gamma \models \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \forall x\psi$.
2. $\Gamma \models \psi \to \theta \Leftrightarrow \Gamma \models \exists x\psi \to \theta$.

Demostración. La implicación $\Leftarrow$ de (1) se sigue del corolario 3.3.8. Suponga que $\Gamma \models \psi$ y que $\mathfrak{A} \models \Gamma[\alpha]$. Entonces para cualquier $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha^{x/a}]$ para cada $\varphi \in \Gamma$, por lo que $\mathfrak{A} \models \psi[\alpha^{x/a}]$. Como a fue arbitrario, $\mathfrak{A} \models \forall x\psi[\alpha]$. (2) se prueba en forma similar. □

El lector debe recordar que al final de este capítulo se encuentra un estudio detallado del proceso de sustitución.

Luego que ambos cayeron y se quemaron, los dioses se sentaron a esperar por dónde saldría el sol. Pasado un rato vieron que el cielo se ponía colorado y clareaba por todas partes, pero no sabían de qué lado iba a salir el sol, de manera que veían hacia todas las direcciones. Sólo Quetzalcóatl, Tezcatlipoca, Xipe Tótec y otros pocos vaticinaron que Nanauatzin, convertido en sol, aparecería por el oriente. Y en efecto, por ese rumbo surgió el sol, colorado y radiante. Era tan resplandeciente que nadie lo podía mirar sin lastimarse los ojos. Tras él salió la luna, también luminosa y brillante, a tal punto que los dioses se preguntaron: ¿Será bueno que vayan ambos a la par? ¿Será bueno que igualmente alumbren? Acordaron que no podía ser así, de modo que uno de ellos arrojó un conejo a la luna que le ofuscó el resplandor, le oscureció la cara y quedó como hoy está, con su luz disminuida.

Hecho esto los dioses descubrieron consternados que el sol y la luna permanecían inmóviles en la orilla del cielo que da al oriente. Durante cuatro días el sol no se movió, ni la luna. Atemorizados, dijeron los dioses: ¿Cómo podremos vivir? ¿No se menea el sol? Entonces decidieron hacer un sacrificio supremo para darle movimiento al sol. Resolvieron ofrendar sus vidas para que con la sangre divina de los dioses el sol tuviera fuerza e iniciara su recorrido por el universo. «Muramos todos y hagámosle que resucite por nuestra muerte» dijieron. Y esto fue lo que se hizo, de modo que cada uno dio su sangre para darle movimiento al sol. Luego, con los vestidos que dejaron los dioses muertos, y con sus joyas de jade y pieles de serpiente de jaguar, sus devotos hicieron unos envoltorios a los que se puso el nombre de los dioses desaparecidos. Y en adelante a esos bultos mortuorios se les reverenció como si fueran los mismos dioses que se sacrificaron en Teotihuacán.

Pero no bastó el sacrificio de los dioses para satisfacer el hambre de sangre de este nuevo sol y por eso los seres humanos, siguiendo el ejemplo de los dioses, tuvieron que sacrificarse ellos mismos.

Conjuntos definibles

Recuerde que un conjunto definible b en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tiene la forma

$$b = \{x \in A : \mathfrak{A} \models \varphi(x, \vec{y})\},$$

donde los elementos $\vec{y}$ son parámetros, elementos que viven en A y φ es una $\mathcal{L}$-fórmula; es muy conveniente notar la posible presencia de los parámetros. Existen, por supuesto, conjuntos definibles sin parámetros. Pero la presencia de parámetros nos permite garantizar que los conjuntos finitos en cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ son definibles, simplemente porque si $b = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, entonces

$$b = \{x \in A : \mathfrak{A} \models x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_n\}$$

donde hemos usado los elementos de b como parámetros. Es claro que esta situación no se generaliza a subconjuntos $b \subseteq A$ infinitos, pues no podemos usar una cantidad infinita de parámetros en una fórmula de primer orden.

Si un conjunto b es definible mediante la fórmula $\theta(x, \vec{y})$ en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, también su complemento $A - b$ es definible, a saber, por la fórmula $\neg\theta(x, \vec{y})$. Un conjunto cuyo complemento es finito se llama cofinito. Por consiguiente, todo conjunto cofinito es definible (mediante parámetros).

Definición 3.3.10. Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es mínima cuando todo subconjunto de su dominio que es definible (mediante parámetros) es finito o cofinito.

Pensamos sólo en subconjuntos del universo, no de sus productos cartesianos. Si A es infinito, el subconjunto de $A \times A$ definido por la fórmula $x = y$ no es finito ni cofinito.

Es claro que las estructuras finitas son mínimas, por lo que las interesantes son las infinitas. En una estructura mínima, para definir subconjuntos podemos usar exclusivamente el 2-predicado $=$.

Ya antes habíamos tratado la noción de simetría. Grosso modo, una simetría es un ordenamiento de los elementos de una estructura que no cambia la forma en la que los elementos están relacionados. Una permutación de un conjunto A es simplemente una biyección $f : A \longrightarrow A$.

Definición 3.3.11. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Una permutación f de A es una simetría de $\mathfrak{A}$ si para todo símbolo de n-relación R y para cualesquier $a_1, \ldots, a_n \in A$ se cumple en $\mathfrak{A}$ que

$$R(a_1, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad R(f(a_1), \ldots, f(a_n)). \tag{✹}$$

Las simetrías no sólo preservan relaciones, también preservan las propiedades definibles.

 **Teorema 3.3.12.** *Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y f una simetría de $\mathfrak{A}$. Entonces, para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquier $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ se cumple que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]. \tag{✻}$$

Demostración. Procedemos por inducción en la construcción de la fórmula φ. En ocasiones, abusaremos de la notación y escribiremos $\theta(f(\vec{x}))$ en lugar de $\theta(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ para $\mathcal{L}$-fórmulas $\theta(\vec{x})$.

Caso atómico. φ es una fórmula primitiva. Es inmediato del hecho de que f es una simetría, así que (✻) se cumple para cualquier fórmula atómica.

Negación. Sea $\varphi(\vec{x}) \equiv \neg\psi(\vec{x})$ y suponemos que la afirmación se cumple para ψ. En tal caso

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{x}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{x}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{x}] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[f(\vec{x})] \qquad \text{hipótesis de inducción} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[f(\vec{x})] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{x}]. \end{aligned}$$

Conjunción o disyunción. El procedimiento es similar al caso de la negación.

Cuantificación Digamos que $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists y \psi(y, \vec{x})$ y supongamos que la afirmación se cumple para ψ. Si $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{x}]$, $\mathfrak{A} \models \exists y \psi(y, \vec{x})$, por lo que existe $y \in A$ con $\mathfrak{A} \models \psi[y, \vec{x}]$, de donde se sigue por la hipótesis de inducción, que $\mathfrak{A} \models \psi[f(y), f(\vec{x})]$, de modo que $\mathfrak{A} \models \exists y \psi(y, f(\vec{x}))$, esto es, $\mathfrak{A} \models \varphi[f(\vec{x})]$. La recíproca es completamente similar, usando el hecho de que f es sobre. ◻

Como una ilustración de este teorema considere la siguiente situación. Suponga que $X \subseteq A$ está definido mediante una fórmula sin parámetros $\varphi(x)$ y que f es una simetría de $\mathfrak{A}$. Entonces, $f[X] = X$. Sin duda, si $a \in X$, $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ y como f es una simetría, $\mathfrak{A} \models \varphi[f(a)]$, de donde se desprende que $f(a) \in X$, así que $f[X] \subseteq X$. Si $b \in X$, como f es sobre, sabemos que existe $a \in X$ con $f(a) = b$. Observe que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a]$$

pues de no ser este el caso, tendríamos

$$A \models \neg\varphi[a]$$

lo que implicaría

$$A \models \neg\varphi[\underbrace{f(a)}_{=b}]$$

una contradicción. En consecuencia, $X \subseteq f[X]$.

Mediante un argumento análogo, se confirma que si $X \subseteq A$ es definible mediante una fórmula con parámetros $\varphi(x, \vec{b})$ y f es una simetría que deja fijos a éstos, la imagen de X es X. Por tanto, si para un X dado y cualquier conjunto finito de parámetros, se puede encontrar una simetría que deja fijos los parámetros, es decir, $f(b_1) = b_1$, $f(b_2) = b_2$, ..., $f(b_n) = b_n$, la imagen de X debe ser X. En consecuencia, si para un X dado y cualquier conjunto finito de parámetros podemos encontrar una simetría que fije los parámetros y mueva algún elemento de X fuera de X, esto mostraría que X no es definible con parámetros, lo que se usa para verificar que ciertas estructuras no son mínimas.

Antes definimos el tipo de un elemento de una gráfica. Ahora, generalizamos esta noción.

Definición 3.3.13. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una sucesión finita de elementos del universos de $\mathfrak{A}$, el tipo de $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathfrak{A}$ es el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas $\varphi(\vec{x})$ tales que $\varphi[\vec{a}]$ se cumple en $\mathfrak{A}$.

Así, el tipo de una sucesión finita es el conjunto de sus propiedades en primer orden. Los tipos son fáciles de definir, pero no necesariamente de describir. En ocasiones, se pueden clasificar todos los tipos posibles de acuerdo con un criterio bien definido, pero esto ocurre en pocos casos. Podemos establecer el teorema 3.3.12 en términos de tipos. Si $f : A \longrightarrow A$ es una simetría de $\mathfrak{A}$, para cualesquier $\vec{a} \in A$ su tipo es el mismo que el tipo de $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$. Las simetrías preservan tipos.

Una estructura trivial consiste en un universo no vacío y nada más, no hay relaciones, funciones o constantes interpretadas. Digamos que A es el dominio de tal estructura $\mathfrak{A}$ y sean $\vec{a} \in A$, $\varphi(x, \vec{a})$ una fórmula con una variable libre x y los parámetros indicados y X el subconjunto definido por la fórmula con esos parámetros. Si X está contenido en el conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de parámetros, X debe ser finito. En otro caso, contiene un elemento b fuera del conjunto de parámetros. Mostraremos que X debe contener todos esos elementos, por lo que es cofinito. Así, supongamos que

b no es un parámetro. Como b está en el conjunto definido por $\varphi(x,\vec{a})$, ocurre que $\mathfrak{A} \models \varphi[b,\vec{a}]$. Sean c otro elemento de A que no es parámetro y $f : A \longrightarrow A$ tal que $f(b) = c$, $f(c) = b$, y para otros elementos $a \in A$, $f(a) = a$. Es claro que f es una permutación de A, y como $\mathfrak{A}$ no interpreta relación alguna, f satisface (✻) por vacuidad. Más aún, f no es la única simetría de $\mathfrak{A}$. Considere la expansión $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ mediante símbolos de constante $c_1, \ldots, c_n$. Convertimos $\mathfrak{A}$ en una $\mathcal{L}'$-estructura $\mathfrak{A}'$ interpretando cada c_i como a_i. Se sigue que f es también una simetría de $\mathfrak{A}'$. Del teorema 3.3.12 se desprende que $\varphi(b,\vec{a})$ se cumple en $\mathfrak{A}'$, lo que corrobora que c está en el conjunto definido por $\varphi(x,\vec{a})$.

Para ilustrar un poco todos estos hechos, consideremos a la estructura $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. En general, si a, b son elementos de un conjunto ordenado $(A, <)$, $a < b$, y no hay elementos entre a y b, decimos que b es el sucesor de a, y que a es el predecesor de b. Si b es sucesor de a, entonces b es el único elemento $x \in A$ tal que se cumple lo siguiente,

$$\mathfrak{A} \models a < x \wedge \forall y[a < y \to ((x < y) \vee (x = y))].$$

Esto confirma que si b es el sucesor de a, entonces b es definible en $\langle A, <, a \rangle$, donde a interpreta el nuevo símbolo de constante c. Se sigue que si a es definible (sin parámetros) en $\langle A, < \rangle$, así lo es b. Un argumento similar se cumple para predecesores, así que, si b es sucesor de a, entonces a es definible en $\langle A, < \rangle$ si y sólo si b es definible (todo sin parámetros).

Como 0 es el menor elemento de $\mathbb{N}$ y esto es expresable en primer orden, 0 es definible en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Dado que 1 es sucesor de 0, 1 es definible, por lo que 2 es definible como sucesor de 1, etc. Todo número natural es definible. Para cada número natural existe una propiedad de primer orden que identifica ese número en forma unívoca en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Esto implica que si a, b son naturales distintos, los tipos de a y b en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ son diferentes. Cada natural tiene su tipo y es único. Ya que toda simetría aplica elementos a elementos del mismo tipo, $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ carece de simetrías que no sean la identidad, esto es, $f(x) = x$ es la única simetría, la simetría trivial. Una estructura cuya única simetría es la trivial se llama rígida. Por lo tanto, $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ es rígida.

3.4 Sobre conjuntos definibles

Ejemplo 3.4.1. Considere el lenguaje de los anillos $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, y sea R una $\mathcal{L}$-estructura que es un anillo. Tomamos $p(X) \in R[X]$. Entonces, $Y = \{x \in R : p(x) = 0\}$ es un conjunto definible. Suponga que $p(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ y sea $\varphi(v, w_0, \ldots, w_n)$ la fórmula

$$w_n \cdot \underbrace{v \cdots v}_{n \text{ veces}} + \cdots + w_1 \cdot v + w_0 = 0.$$

En lo sucesivo abreviamos esta fórmula como $w_n v^n + \cdots + w_1 v + w_0 = 0$. Entonces, $\varphi(v, a_0, \ldots, a_n)$ define a Y.

Ejemplo 3.4.2. Con el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ tomamos al conjunto de los reales $\mathbb{R}$. Sea $\varphi(x, y)$ la fórmula

$$\exists z(z \neq 0 \wedge y = x + z^2).$$

Note que si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ si y sólo si $\mathbb{R} \models \varphi[a, b]$, de suerte que el orden en los reales es definible sin parámetros, o $\varnothing$-definible.

Ejemplo 3.4.3. Con el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ consideramos al anillo $\mathbb{Z}$, y sea

$$X = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m < n\},$$

que resulta definible, de hecho, $\varnothing$-definible. Sin duda, por el teorema de Lagange, cualquier entero no negativo es la suma de cuatro cuadrados. Sea $\varphi(x, y)$ la fórmula

$$\exists z_1, z_2, z_3, z_4(z_1 \neq 0 \wedge y = x + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2),$$

por lo que $X = \{(m, n) \in Z^2 : \mathbb{Z} \models \varphi(m, n)\}$.

Ejemplo 3.4.4. Sean F un campo y $\mathfrak{M} = \langle F[X], +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ el anillo de polinomios con coeficientes en F. Se verifica que F es definible en $\mathfrak{M}$, pues F es el conjunto de unidades de $F[X]$ y queda definido por la fórmula $x = 0 \vee \exists y(xy = 1)$.

Ejemplo 3.4.5. Sea $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{C}(X), +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ el campo de las funciones racionales en una variable. Se afirma que $\mathbb{C}$ es definible em $\mathbb{C}(X)$ mediante la fórmula,

$$\exists x, y(y^2 = v \wedge x^3 + 1 = v).$$

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ encontramos x, y tales que $y^2 = x^3 + 1 = z$. Suponga que h es una función racional no constante, y que existen funciones racionales no constantes f, g

tales que $h = g^2 = f^3 + 1$. Por consiguiente, $t \mapsto (g(t), g(t))$ es una función racional no constante de un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ en la curva E dada por la ecuación $y^2 = x^3 + 1$. Pero E es una curva elíptica y se sabe que no existen tales funciones.

Un argumento similar constata que $\mathbb{C}$ es el conjunto de funciones racionales f tales que f y $f + 1$ son potencias cuárticas. Estas ideas se generalizan, para probar que $\mathbb{C}$ es definible en cualquier extensión algebraica finita de $\mathbb{C}(X)$.

Ejemplo 3.4.6. Sea $\mathfrak{M} = \langle Q_p, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ el campo de los números p-ádicos. Entonces, $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos es definible en $\mathfrak{M}$. Suponga que $p \neq 2$ (el caso $p = 2$ queda como ejercicio) y sea $\varphi(x) \equiv \exists y(y^2 = pa^2 + 1)$. Se afirma que $\varphi(x)$ define a $\mathbb{Z}_p$.

Primero suponga que $y = pa^2 + 1$ y sea v la valuación p-ádica. Ya que $v(pa^2) = 2v(a) + 1$, si $v(a) < 0$, entonces $v(pa^2)$ es un entero impar negativo y $v(y^2) = v(pa^2 + 1) - v(pa^2)$. Por otra parte, $v(y^2) = 2v(y)$, es un entero par. Si $\mathfrak{M} \models \varphi[a]$, entonces $v(a) \geq 0$, así que $a \in \mathbb{Z}_p$.

Ahora, suponga que $a \in \mathbb{Z}_p$ y sean $F(X) = X^2 - (pa^2 + 1)$ y $\overline{F}$ la reducción de F módulo p. En virtud de que $v(a) \geq 0$, $v(pa) > 0$, $\overline{F}(X) = X^2 - 1$ y $\overline{F}' = 2X$. Por tanto, $\overline{F}(1) = 0$ y $\overline{F}' \neq 0$, de suerte que por el lema de Hensel, existe $b \in \mathbb{Z}_p$ tal que $F(b) = 0$, de donde se sigue que $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$.

Ejemplo 3.4.7. Considere la estructura de los racionales $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$, y sean

$$\varphi(x, y, z) \equiv \exists a, b, c(xyz^2 + 2 = a^2 + xy^2 - yc^2)$$

$$\psi(x) \equiv \forall y, z([\varphi(y, z, 0) \wedge \forall w(\varphi(y, z, w) \rightarrow \varphi(y, z, w + 1))] \rightarrow \varphi(y, z, x)).$$

Se comprueba, un resultado complicado, que $\psi(x)$ define a los enteros en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 3.4.8. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de los anillos ordenados y $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1\rangle$ el campo ordenado de los reales. Suponga que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es A-definible, donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, la cerradura topológica de X también es A-definible. En efecto, sean $\varphi(\vec{v}, \vec{a})$ la fórmula que define a X, y $\psi(\vec{v}, \vec{w})$ la fórmula

$$\forall \epsilon \left[\epsilon > 0 \rightarrow \exists y_1, \ldots, y_n(\varphi(\vec{y}, \vec{w}) \wedge \sum_{i=1}^{n} (v_i - y_i)^2 < \epsilon) \right],$$

por lo que $\vec{b}$ pertenece a la cerradura de X si y sólo si en $\mathbb{R}$ se cumple $\psi[\vec{b},\vec{a}]$.

Proposición 3.4.9. *Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Si $X \subseteq M^n$ es A-definible, $A \subseteq M$, entonces cualquier $\mathcal{L}$-automorfismo de $\mathfrak{M}$ que deja fijo a A, fija a X, esto es, si σ es un automorfismo de M, y $\sigma(a) = a$ para toda $a \in A$, entonces $\sigma(X) = X$.*

Demostración. Sean $\psi(\vec{v},\vec{a})$ la $\mathcal{L}$-fórmula que define a X, donde $\vec{a} \in A$, y $\vec{b} \in M^n$. Si $j : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ es un isomorfismo, entonces $\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{N} \models \varphi(j(\vec{a}))$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \models \psi[\vec{b},\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\sigma(\vec{b}),\sigma(\vec{a}))\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\sigma(\vec{b}),\vec{a}).\end{aligned}$$

En otras palabras, $\vec{b} \in X$ si y sólo si $\sigma(\vec{b}) \in X$ como se busca. ❐

Corolario 3.4.10. *El conjunto $\mathbb{R}$ no es definible en el campo de los números complejos.*

Demostración. Si $\mathbb{R}$ fuese definible, sería definible sobre un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{C}$ y sean $r, s \in \mathbb{C}$ algebraicamente independientes sobre A con $r \in \mathbb{R}$ y $s \notin \mathbb{R}$. Existe un automorfismo σ de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma \restriction A$ es la identidad y $\sigma(r) = s$. Por tanto, $\sigma(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ no es definible sobre A. ❐

La prueba funciona porque $\mathbb{C}$ tiene muchos automorfismos. La situación respecto a $\mathbb{R}$ es diferente, porque cualquier automorfismo de los reales debe fijar a los racionales, y como el orden es definible, se debe preservar por automorfismos. Dado que los racionales son densos en $\mathbb{R}$, el único automorfismo de los reales es la identidad. La mayoría de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ no son definibles (existen $2^{2^{\aleph_0}}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sólo $2^{\aleph_0}$ definiciones posibles).

Para que los seres humanos se alegraran, los dioses hicieron crecer en la tierra la planta de maguey, de la que sacaron el pulque. Y aun antes de que los dioses crearan los primeros seres humanos, Tezcatlipoca había traído el fuego a la tierra, y para esto había sacado la lumbre de unos palos, y así se empezó a hacer fuego con los pedernales, palos que tienen corazón. Ya con el fuego hubo fiestas de muchas grandes hogueras.

Todo esto ocurrió cuando reinaba la oscuridad y aún no había sol. Pero después de 26 años de la creación de la tierra, los dioses acordaron crear un nuevo sol. En el año 13 Ácatl, en Teotihuacán, el lugar sagrado, se reunieron todos los dioses y dispusieron ayunos y sacrificios para propiciar el nacimiento del sol. Luego los dioses preguntaron: ¿Quién tendrá el cargo de alumbrar el mundo? A estas palabras respondió el dios llamado Tecuciztécatl, quien dijo: Yo tomo el cargo de alumbrar al mundo. Otra vez hablaron los dioses y dijieron: ¿Quién será el otro? Pero esta vez los dioses se miraron entre sí y se preguntaron quién podría ser el otro que alumbrara el mundo, pero no hubo quién se ofreciera. Por fin se

fijaron en un dios al que nadie tomaba en cuenta, que no hablaba, apenas se limitaba a oír, y tenía el cuerpo lleno de tumores y llagas. Dijéronle; Sé tú el que alumbres, bubosito! Y el dios llagado y humilde, llamado Nanaualtzin, obedeció de buena voluntad.

3.5

Apéndice

En este apartado incluimos diversos resultados que, por su naturaleza, pueden complicar demasiado una primera lectura del libro. Con esto queremos decir que pueden omitirse en un primer momento y estudiarlos en detalle una vez que se ha ganado la suficiente madurez.

Nuestra intención es demostrar que cada término y fórmula tienen una forma única de leerse o representarse. Dado que el resultado es eminentemente técnico, puede ser difícil su comprensión en una primera lectura.

Puesto que la coma y los paréntesis sólo sirven para facilitar la lectura de fórmulas y términos, en el siguiente resultado supondremos que no se usa coma o paréntesis; así, $f(t_1, \ldots, t_n)$ es lo mismo que $ft_1 \cdots t_n$.

Definición 3.5.1. Definimos el peso ρ de una cadena w de símbolos:

$\rho(f) = n - 1$ si $f \in \mathcal{F}$ y la valencia de f es n.
$\rho(v) = \rho(c) = -1$ si $v \in Var, c \in \mathcal{C}$.
$\rho(w) =$ es la suma de los pesos de los símbolos en w si w es una cadena de símbolos de variable, constante y función.
$\rho(\lambda) = 0$ si λ es la palabra vacía o no es una cadena de símbolos de variables, constantes o funciones.

Si $w = b_0 b_1 \cdots b_n \cdots$ es una cadena, un segmento inicial v de w tiene la forma $v = b_0 \cdots b_l$ con $l \geq 0$, o bien v es la cadena vacía.

Una cadena w satisface la regla de los pesos si el peso de w es -1 y el peso de segmentos iniciales propios son ≥ 0.

 **Teorema 3.5.2.** *Sea w una cadena de variables, símbolos de constante o símbolos de función. Entonces w es un término si y sólo si satisface la regla de los pesos.*

Demostración. Supondremos que w es un término y mostraremos que satisface la regla de los pesos. Procedemos por inducción en la altura n de w. Si $n = 0$, w es una variable o un símbolo de constante, por lo que su peso es -1 y no tiene segmentos iniciales propios.

Supongamos que es cierta la afirmación para términos de altura n y la demostramos para alturas $n+1$. Sean $t_1, \ldots, t_m \in Tm_n(\mathcal{L})$ y f un símbolo de m-función. La hipótesis de inducción asegura que la afirmación se cumple para $t_1, \ldots, t_m$. Sea $t = ft_1 \cdots t_m$. Tenemos $\rho(t) = \rho(f) + \rho(t_1) + \cdots + \rho(t_m) = m - 1 + m(-1) = -1$.

Sea u un segmento inicial de t. Existen $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y un segmento inicial u_i de t_i tales que

$$u = ft_1 \cdots u_i.$$

Note que si $i = m$, u_i es necesariamente un segmento inicial propio de t_i, pero si $i \neq m$, u_i puede ser igual a t_i o $u_i = \lambda$.

$$\begin{aligned} \rho(u) =& \rho(f) + \rho(t_1) + \rho(t_2) + \cdots + \rho(t_{i-1}) + \rho(u_i) \\ =& m - 1 + (i-1)(-1) + \rho(u_i) \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\ =& m - i + \rho(u) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\rho(u_i)$ es -1 o ≥ 0 (dependiendo de si $u_i = t_i$ o no). Se sigue que $\rho(u) \geq m - i - 1$ y $\rho(u) \geq 0$ si $i < m$. Si $i = m$, $u_i \neq t_i$ (de lo contrario u_i sería t), así que $\rho(u) = \rho(u_i) \geq 0$.

Para la recíproca, supongamos que la cadena w satisface la regla de los pesos y procedemos por inducción en la longitud $|w|$ de w (es decir, la cantidad de símbolos que aparecen en w). La palabra vacía λ no satisface la regla de los pesos pues $\rho(\lambda) = 0$. Si $|w| = 1$ y satisface la regla de los pesos, $\rho(w) = -1$, por lo que w es una variable o una constante; en cualquier caso es un término. Si $k > 1$, supongamos que cualquier cadena w con $|w| < k$ que satisfaga la regla de los pesos es un término.

Sea w una cadena de longitud k que satisface la regla de los pesos, digamos

$$w = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k,$$

donde las α_i son variables o símbolos de función o constante, así que $\rho(\alpha_i) \geq -1$ para toda i. Se cumple $\rho(w) = -1$ y para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, $\rho(\alpha_1 \cdots \alpha_i) \geq 0$. Como $k > 1$, α_1 es un segmento inicial de w, así que $\rho(\alpha_1) \geq 0$, lo que muestra que α_1 debe ser un símbolo de $l+1$-función ($l = \rho(\alpha_1) \geqq 0$). Si $l = 0$, la cadena $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k$ satisface la regla de los pesos (suprimiendo el símbolo inicial no cambia el peso total y tampoco el peso de ningún segmento inicial propio). Ya que la longitud de esta cadena es $k-1$, la hipótesis de inducción se puede aplicar para todo $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k$ que sea un término, por lo que w lo es pues α_1 es un símbolo de 1-función en este caso.

¿Qué ocurre si $l \geq 1$?

Sea[1] $\beth : \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$\beth(i) = \rho(\alpha_1 \cdots \alpha_i) = \rho(\alpha_1) + \cdots + \rho(\alpha_i).$$

Se cumple $\beth(i) = n$ para alguna $n > 0$, $1 \leq i < k$, y $\beth(k) = -1$. El paso de $\beth(i)$ a $\beth(i+1)$ añade un entero $\rho(\alpha_{i+1})$ (≥ -1), por lo que la función $\beth$ transita de su valor inicial l a su valor final -1 y debe pasar por cada valor intermedio $l-1, l-2, \ldots, 1, 0$ al menos una vez (esta función no puede decrecer más de 1 en cada paso).

Sea j_1 ($j_2, \ldots, j_l$ respectivamente) el primer entero p en $\{1, 2, \ldots, k\}$ para el cual

$$\beth(p) = (l-1) \qquad (l-2, \ldots, 0 \text{ respectivamente}).$$

Hacemos $j_0 = 1$ y $j_{l+1} = k$, así que $\beth(j_0) = l$ y $\beth(j_{l+1}) = -1$.

Se debe cumplir

$$j_0 = 1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_{l+1} = k,$$

pues la función $\beth$ no puede transitar de $\beth(1) = l$ a $\beth(j_2) = l-2$ sin pasar al menos una vez por $l-1$, por lo que $j_0 < j_1$. En forma similar, se muestra que $j_2 < j_3$, etcétera.

Definimos

$$\begin{aligned} t_1 &= \alpha_2 \cdots \alpha_{j_1}, & t_2 &= \alpha_{j_1+1} \cdots \alpha_{j-2}, \\ t_l &= \alpha_{j_{l-1}+1} \cdots \alpha_{j_l}, & t_{l+1} &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Probaremos que cada una de estas $l+1$ cadenas es un término. Puesto que α_1 es un símbolo de $l+1$-función y $w = \alpha_1 t_1 \cdots t_{l+1}$, esto mostrará que w es un término.

Sea h un entero tal que $1 \leq h \leq l+1$. Se cumple $t_h = \alpha_{j_{h-1}+1} \cdots \alpha_{j_h}$, por lo que

$$\rho(t_h) = \beth(j_h) - \beth(j_{h-1}) = l - h - (l - (h-1)) = -1.$$

Más aún, si t_h tiene un segmento inicial cuyo peso es negativo, significaría que existe $i \in \{j_{h-1}+1, \ldots, j_h - 1\}$ tal que

$$\rho(\alpha_{j_{h-1}+1} \cdots \alpha_i) = \beth(i) - \beth(j_{h-1}) = \beth(i) - (l - (h-1)) < 0,$$

así que

$$\beth(i) \leq l - h.$$

Pero $\beth(j_{h-1}) = l - h + 1$. Según el argumento usado antes, la función $\beth$ debe pasar por $l-h$ para algún entero entre j_{h-1} e i, es decir, estrictamente menor que j_h, lo que contradice la definición de j_h.

Hemos demostrado que t_h satisface la regla de los pesos y que su longitud es $< k$. Por hipótesis de inducción resulta que t_h es un término. ❐

Lema 3.5.3. *Para cualquier término t, ninguno de sus segmentos iniciales propios es un término.*

[1] La letra $\beth$ (alfabeto hebreo) se llama beth.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la regla de los pesos, pues si t es un término y u es un segmento inicial propio de t, el peso de u es ≥ 0, por lo que u no puede ser un término. ❐

Teorema 3.5.4. *Para cualquier término t de $\mathcal{L}$ ocurre exactamente una de las siguientes afirmaciones:*
1. t es una variable de $\mathcal{L}$.
2. t es un símbolo de constante de $\mathcal{L}$.
3. Existen un único entero $k \geq 1$, un único símbolo de l-función de $\mathcal{L}$ y una única l-ada $(u_1, \ldots, u_k) \in Tm^k(\mathcal{L})$ tales que $t = fu_1 \cdots u_l$.

Demostración. Sea $t \in Tm(\mathcal{L})$. Por definición ocurre (1) o (2) o (3). Pero en (3) debemos probar unicidad. Es claro que estos casos se excluyen entre sí (para ver esto basta escrutar el primer símbolo de t).

Resta entonces probar la unicidad en (3). Considere $k, h \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{F}$ símbolos de k-, h-función, respectivamente, y $k + h$ términos $t_1, t_2, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_h$; suponga que

$$t = ft_1 \cdots t_k = gu_1 \cdots u_h. \qquad (\diamond)$$

De ($\diamond$) concluimos directamente que $f = g$ por ser los primeros símbolos, de donde se sigue que $h = k$. Supongamos que existe $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ tal que

$$t_1 = u_1, \quad t_2 = u_2, \quad \ldots \quad t_{i-1} = u_{i-1} \quad \text{y } t_i \neq u_i.$$

Después de simplificar la expresión llegamos a

$$t_i t_{i+1} \cdots t_k = u_i u_{i+1} \cdots u_h,$$

lo que prueba que t_i o u_i es un segmento inicial propio del otro, lo cual no puede ocurrir según el lema 3.5.3 ❐

Sustituciones

Realizar sustituciones en una fórmula o término dado es más común de lo que pensamos. Suele ocurrir que necesitemos sustituir una variable por otra, o bien una variable por un término. Si bien esta operación parece inocua, la realidad es otra.

Definimos $s_x(t)$ como el término que se obtiene al sustituir cada aparición de x por t en s. Formalmente, procedemos por recursión en la construcción de s:

- Si $s = x$, $s_x(t) = t$
- Si $s = y$, $y \neq x$, $s_x(t) = y$
- Si $s = f(s_1, \ldots, s_n)$, $s_x(t) = f((s_1)_x(t), \ldots, (s_n)_x(t))$

Para estudiar el comportamiento semántico de $s_x(t)$ fijamos una $\mathcal{L}$-estructura arbitraria $\mathfrak{A}$ y una $\mathfrak{A}$-asignación σ. Recuerde que el valor de s en $\mathfrak{A}$ respecto a σ es $s^{\mathfrak{A}}[\sigma]$ y como $\mathfrak{A}$ está fija, escribimos simplemente $s[\sigma]$.

Podemos definir una función de A en A como

$$f(u) = s[\sigma^{x/u}] \qquad \text{para toda } u \in A.$$

En particular, ya que $\sigma^{x/\sigma(x)} = \sigma$,

$$f(\sigma(x)) = s[\sigma]. \tag{✯}$$

En $s_x(t)$, t toma el lugar de x en s. Es de esperar que $s_x(t)[\sigma]$ dependa de $t[\sigma]$ de la misma forma que $s[\sigma]$ depende de $\sigma(x)$; esto es, se afirma que

$$s_x(t)[\sigma] = f(t[\sigma]). \tag{✰}$$

Si combinamos (✯) con (✰) y usamos la definición de f obtenemos la afirmación

$$s_x(t)[\sigma] = s[\sigma^{x/a}],$$

donde $a = t[\sigma]$.

Recordamos por comodidad el siguiente resultado.

Lema 3.5.5. *Si s, t son $\mathcal{L}$-términos, x una variable y σ una $\mathfrak{A}$-asignación,*

$$s_x(t)[\sigma] = s[\sigma^{x/a}],$$

donde $a = t[\sigma]$.

□

Quisiéramos realizar el mismo desarrollo con fórmulas μ. La $\mathfrak{A}$-asignación σ y la fórmula μ dan lugar a una función de A en $\{V, F\}$:

$$f(u) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/u}}(\mu) \qquad \text{para cada } u \in A, \tag{☆}$$

por lo que deberíamos definir $\mu_x(t)$ de tal forma que

$$\mu_x(t)[\sigma] = f(t[\sigma]). \tag{❦}$$

Por desgracia encontramos dificultades. Por definición de $\mathfrak{A}$-asignación, $f(u)$ como en (☆) depende de u sólo en las ocurrencias libres de x en μ, así que debemos definir $\mu_x(t)$ de tal forma que t sólo se sustituya por las apariciones libres de x en μ y no por las ocurrencias acotadas.[2]

[2]Además, si se sustituye t por toda aparición de x en μ corremos el riesgo de que la fórmula resultante no sea tal. Por ejemplo, $\mu \equiv \forall x(x = y)$ daría lugar a $\forall t(t = y)$, que no es una fórmula a menos que t sea una variable.

Pero aun tomando esta providencia, surge otro problema. Por ejemplo, sea $\mu \equiv \forall\, y(y = x)$, con x, y como variables distintas. En este caso,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/u}}(\mu) = V$$

si y sólo si $u = v$ para toda $v \in A$.

De manera intuitiva, μ dice que el valor de x es igual a todo elemento del universo. En consecuencia,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/u}}(\mu) = V$$

si y sólo si A tiene exactamente un elemento y (✯) se convierte en

$$f(u) = \begin{cases} V, & \text{si } A \text{ tiene un elemento} \\ F, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, si sustituimos y por x en μ (que es libre) obtenemos $\forall\, y(y = y)$, una fórmula lógicamente válida:

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\forall\, y(y = y)) = V$$

para cualquier σ. Si A tiene más de un elemento, arribamos a la desigualdad

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\forall\, y(y = y)) \neq f(y[\sigma]),$$

por lo que no podemos tomar $\forall\, y(y = y)$ como resultado de $\mu_x(y)$ si esperamos que (☆) se cumpla.

Es evidente que nuestra pretensión es que $\mu_x(t)$ diga sobre t lo que μ dice sobre x. Pero en nuestro ejemplo $\forall\, y(y = x)$ dice que el valor de x es igual a cada individuo, mientras que $\forall\, y(y = y)$ no dice nada sobre el valor de y; simplemente establece que todo individuo es igual a sí mismo.

¿Qué está mal? La dificultad surge al sustituir una ocurrencia libre de x por y en $\forall\, y(y = x)$, pues esta aparición nueva de y cae dentro de la férrea voluntad del cuantificador $\forall\, y$. Para salir de este predicamento, recurrimos a una situación familiar en el cálculo integral. El valor de la integral

$$\int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt{23}} x \arctan(y + \sqrt{y^2}))dy$$

depende del valor de x, pero no del de y (una variable de integración se comporta en forma similar a una variable cuantificada). Si queremos sustituir una expresión que contenga y por x en el integrando, primero debemos cambiar la variable de integración, digamos

$$\int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt{23}} x \arctan(z + \sqrt{z^2}))dz,$$

donde z no aparece en la expresión que queremos introducir. Esta integral tiene exac-

tamente el mismo valor que la original, pero ahora podemos efectuar la sustitución sin incurrir en un ilícito.

Con este procedimiento en mente, si queremos sustituir y por x en $\forall y(x = y)$ primero debemos transformar $\forall y(x = y)$ en $\forall z(x = z)$. Es fácil probar que estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes. Una vez hecha la transformación, podemos sustituir y por x para obtener $\forall z(y = z)$, cuyo significado es que el valor de y es igual al de cada individuo, precisamente lo que tanto anhelábamos.

Primero definiremos $\mu_x(t)$ para aquellos casos en los que la sustitución de t por x en μ no quede atrapada por algún cuantificador en μ, por lo que no requerimos ningún cambio de variable. Después definiremos $\mu_x(t)$ en los casos restantes, advirtiendo qué cambios deben efectuarse en μ antes de que tenga lugar la sustitución.

Decimos que t es libre de sustituirse por x en μ, lo que denotaremos como $sust(\mu, t, x)$, cuando ninguna ocurrencia libre de x en μ está en una subfórmula de μ de la forma $\forall y\nu$, donde y aparece en t. Una forma de explicar esta complicada oración es: podemos sustituir t por x en μ si al efectuar tal sustitución ninguna variable v de t queda en el alcance de un cuantificador Qv de μ, en aquellas subfórmulas de μ donde x aparece libre. Mucho tememos que la explicación resultó casi tan complicada como la oración original, pero esperamos que haya aclarado un poco el panorama.

Si t es libre de sustituirse por x en μ, definimos $\mu_x(t)$ como el resultado de sustituir t por cada ocurrencia libre de x en μ. Observe que, como $sust(\mu, t, x)$, cada aparición de variables que se hayan introducido mediante la sustitución es libre en $\mu_x(t)$.

Para lidiar más fácilmente con los subíndices cuando sea necesario, en lo sucesivo escribiremos $\mu^x(t)$ en lugar de $\mu_x(t)$, entendiendo que ambas notaciones son absolutamente equivalentes y admisibles en cualquier momento.

Definición 3.5.6. Definimos la sustitución de t por x en una fórmula μ por recursión en la construcción de fórmulas.

★ Si μ es la fórmula atómica $P(s_1, \ldots, s_n)$ entonces $sust(\mu, t, x)$ y $\mu_x(t) = P(s_1^x(t), \ldots, s_n^x(t))$, ($P$ puede ser la igualdad $=$, en cuyo caso $n = 2$).

★ Si $\mu \equiv \neg\nu$, entonces $sust(\mu, t, x)$ si y sólo si $sust(\nu, t, x)$ y en este caso $\mu_x(t) = \neg(\nu_x(t))$.

★ Si[3] $\mu \equiv \nu \to \eta$, se cumple $sust(\mu, t, x)$ si y sólo si $sust(\nu, t, x)$ y $sust(\eta, t, x)$ y en este caso $\mu_x(t) \equiv \nu_x(t) \to \eta_x(t)$.

★ Si $\mu \equiv \forall y\nu$, se cumple $sust(\mu, t, x)$ si y sólo si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

1. x no es libre en μ, en cuyo caso $\mu_x(t) \equiv \mu$.
2. x es libre en μ (en particular $x \neq y$), $sust(\nu, t, x)$ y y no aparece en t, en cuyo caso $\mu_x(t) \equiv \forall y(\nu_x(t))$.

Es sencillo corroborar que cuando ninguna variable de t tiene una aparición acotada en μ, podemos decir $sust(\mu, t, x)$. Además, siempre se cumple $sust(\mu, x, x)$ y $\mu_x(x) = \mu$.

Lema 3.5.7. *Si $sust(\mu, t, x)$, entonces para toda $\mathfrak{A}$-asignación σ,*

$$\mu_x(t)[\sigma] = \mu[\sigma^{x/a}],$$

donde $a = t[\sigma]$.

Demostración. Procedemos por inducción en la construcción de μ. En realidad el único caso difícil es $\mu \equiv \forall y\nu$, por lo que el resto de los casos queda como ejercicio.

Primero suponga que x no es libre en μ. Entonces

$$\mu_x(t)[\sigma] = \mu[\sigma] = \mu[\sigma^{x/t}].$$

Asumamos que x es libre en μ, $sust(\nu, t, x)$ y y no aparece en t. Se sigue que

$$\mu_x(t)[\sigma] = \forall y(\nu_x(t))[\sigma]. \qquad (\diamond)$$

Por hipótesis de inducción,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\nu_x(t)) = V \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/u}}(\nu_x(t)) = V \quad \text{para toda } u \in A. \qquad (\blacklozenge)$$

La hipótesis de inducción nos permite decir que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/u}}(\nu_x(t)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/u,x/a'}}(\nu), \qquad (\clubsuit)$$

donde $a' = t[\sigma^{y/u}] = t[\sigma] = a$.

Además, x, y son diferentes (de lo contrario x no sería libre en μ). Por tanto,

$$\sigma^{y/u,x/a} = \sigma^{x/a,y/u}$$

[3]Usamos $\to$ como conectivo básico por pura ocurrencia; podríamos usar otros, da lo mismo.

pues no hay diferencia en aplicar primero el cambio a x y luego el cambio a y o hacerlo al revés (habría diferencia si $x = y$).

En consecuencia, podemos escribir (✣) como

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/u}}(\nu_x(t)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a,y/u}}(\nu). \tag{✣}$$

Se sigue que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a,y/u}}(\nu) = V \text{ para toda } u \in A \quad \Leftrightarrow \quad \text{para todo } y\ \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}}(\nu) = V.$$

Si combinamos esto con (✧) y (✦) obtenemos el resultado buscado.

□

Definición 3.5.8. Si z es una variable que no es libre en ν pero $sust(\nu, z, x)$, decimos que $\forall z \nu_x(z)$ surge de $\forall x \nu$ mediante un cambio alfabético. Note que si z no aparece en ν, ciertamente z satisface ambas condiciones.

Un cambio alfabético es análogo al cambio de variable de integración. Observe que esta operación es reversible. Porque si z no es libre en ν, puesto que $sust(\nu, z, x)$, las ocurrencias libres de z en $\nu_x(z)$ son precisamente aquellas que se originan de las apariciones libres de x en ν al realizar la sustitución.

Se sigue que ninguna ocurrencia libre de z en $\nu_x(z)$ puede estar en el alcance de algún cuantificador $\forall x$, es decir, se cumple $sust(\nu_x(z), x, z)$.

Asimismo, x no puede aparecer libre en $\nu_x(z)$ ya que esto significaría que x y z son la misma variable, por lo que $\nu_x(z) = \nu$, pero se supuso que x no es libre en ν. En consecuencia, $\forall x \nu$ se puede obtener de $\forall z \nu_x(z)$ mediante un cambio alfabético.

Lema 3.5.9. *Si $\forall z \nu_x(z)$ surge de $\forall x \nu$ mediante un cambio alfabético, estas fórmulas son lógicamente equivalentes.*

Demostración. Sea σ una $\mathfrak{A}$-asignación. Entonces

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\forall z \nu_x(z)) = V \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/u}}(\nu_x(z)) = V \text{ para toda } u \in A. \tag{✣}$$

Según el lema 3.5.7,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/u}}(\nu_x(z)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/u,x/z'}}(\nu), \tag{✤}$$

donde $z' = z[\sigma^{z/u}]$. Pero $z[\sigma^{z/u}] = u$ por definición de $\sigma^{z/u}$; si usamos esto y el hecho de que z no es libre en ν, obtenemos

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/u,x/z'}}(\nu) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/u}}(\nu), \tag{✣}$$

y se sigue que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/u}}(\nu) = V \text{ para toda } u \in A \quad \Leftrightarrow \quad \text{para toda } x\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\nu) = V.$$

Reunimos esto con (✣), (✤) y (✢) para lograr nuestros objetivos. ❐

Considere una fórmula dada μ y suponga que tiene una subfórmula universal $\forall y\nu$. Remplacemos cada aparición de $\forall y\nu$ en μ por $\forall z\nu_y(z)$, que se origina en $\forall y\nu$ mediante un cambio alfabético (es decir, z no es libre en ν pero $sust(\nu, z, y)$).

Diremos que μ' es una variante de μ ($\mu \sim \mu'$) si μ se puede transformar en μ' mediante una cantidad finita de prescripciones como la recién descrita. Se incluye el caso en el que la cantidad de tales etapas es 0, así que $\mu \sim \mu$.

Formalmente, para definir variante procedemos por recursión en la construcción de μ:

Definición 3.5.10.

- ✯ Si μ es atómica, entonces μ es su única variante.
- ✯ Si $\mu \equiv \neg\nu$, las variantes de μ son fórmulas de la forma $\neg(\nu')$, donde ν' es una variante de ν.
- ✯ Si $\mu \equiv \nu \to \eta$, las variantes de μ son de la forma $\nu' \to \eta'$, donde ν' y η' son variantes de ν y η respectivamente.
- ✯ Si $\mu \equiv \forall y\nu$, las variantes de μ son de la forma $\forall y\nu'$, donde ν' es una variante de ν y las fórmulas $\forall z\nu'_y(z)$ se obtienen de tal $\forall y\nu'$ mediante un cambio alfabético.

Se corrobora con facilidad que $\sim$ es una relación de equivalencia (por ejemplo, la simetría se sigue de que el cambio alfabético es reversible).

No es complicado cerciorarse de que si $\mu \sim \mu'$, las únicas diferencias entre μ y μ' son las ocurrencias acotadas de otras variables en μ'. Pero si el i-ésimo símbolo[4] de μ es una ocurrencia libre de una variable, el i-ésimo símbolo de μ' es una aparición libre de la misma variable. En forma similar, si un símbolo que no es una variable aparece en μ en la i-ésima posición, el mismo símbolo aparece en μ' en el mismo puesto.

Ejemplo 3.5.11. 1. Considere $\mu \equiv \forall x\forall y(P(x,y) \to R(y,x))$. Una variante es $\mu' \equiv \forall x\forall z(P(x,z) \to R(z,x))$; otra variante es $\mu'' \equiv \forall u\forall z(P(u,z) \to R(z,u))$.

2. Suponga que $\mu \equiv A(x,y,z) \to [\forall x(B(x) \leftrightarrow C(z) \wedge \forall y(R(x,y) \wedge \neg S(u)]$. Una variante es $\mu' \equiv A(x,y,z) \to [\forall x(B(x) \leftrightarrow C(z) \wedge \forall w(R(x,w) \wedge \neg S(u)]$, de donde se obtiene $\mu'' \equiv A(x,y,z) \to [\forall x_1(B(x_1) \leftrightarrow C(z) \wedge \forall w(R(x_1,w) \wedge \neg S(u)]$.

[4]Recuerde que μ es una cadena de símbolos.

Lema 3.5.12. *Si $\mu \sim \mu'$ entonces $\mu \equiv \mu'$, es decir, son lógicamente equivalentes.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema 3.5.9. ❐

Dada una fórmula μ y una cantidad finita de variables $y_1, \ldots, y_n$, siempre podemos encontrar una variante μ' de μ tal que $y_1, \ldots, y_n$ no aparezcan acotadas en μ'. Suponga, por ejemplo, que μ tiene una subfórmula $\forall y_1 \nu$. Se puede remplazar por $\forall z \nu_{y_1}(z)$, donde z no aparece en ν (por lo que $sust(\nu, z, y)$) y es diferente de $y_1, \ldots, y_n$. Después de una cantidad finita de dichos remplazos, μ se transforma en μ' con la propiedad buscada. En particular, si todas las variables que aparecen en un término dado t están entre las variables y_i, se cumple $sust(\mu', t, x)$.

Ahora estamos capacitados para definir $\mu_x(t)$ aun cuando no se cumpla $sust(\mu, t, x)$. Simplemente escogemos alguna variante μ' de μ tal que $sust(\mu', t, x)$ y definimos $\mu_x(t)$ como $\mu'_x(t)$. Para lograr que $\mu_x(t)$ esté definida en forma única, debemos escoger μ' mediante una regla bien determinada, para lo cual procedemos por recursión. Supongamos que las variables son $\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Definición 3.5.13. Dados x y t, definimos $Vnt(\mu) = \mu'$ para cada μ como sigue:

- Si μ es atómica, $Vnt(\mu) = \mu$.
- Si $\mu \equiv \neg\nu$, $Vnt(\mu) \equiv \neg Vnt(\nu)$.
- Si $\mu \equiv \nu \to \eta$, $Vnt(\mu) \equiv Vnt(\nu) \to Vnt(\eta)$.
- Si $\mu \equiv \forall y \nu$, distinguimos tres casos:
  1. Cuando x no es libre en μ, $Vnt(\mu) \equiv \mu$.
  2. Si x es libre en μ pero y no aparece en t, $Vnt(\mu) \equiv \forall y Vnt(\nu)$.
  3. Si x es libre en μ pero y aparece en t, $Vnt(\mu) \equiv \forall z Vnt(\nu_y(z))$, donde z es la primera variable (es decir, la v_i de menor índice) tal que z no aparece en t y $Vnt(\mu)$ surge de $\forall y Vnt(\nu)$ mediante un cambio alfabético.

Entonces definimos $\mu_x(t)$ como $Vnt(\mu)_x(t)$, con la definición dada en 3.5.6.

Si comparamos esta definición de $Vnt(\mu)$ con las definiciones 3.5.6 y 3.5.10, se verifica con facilidad que $Vnt(\mu)$ realmente es una variante de μ y se cumple $sust(Vnt(\mu), t, x)$. Además, si $sust(\mu, t, x)$, $Vnt(\mu) = \mu$. Se sigue que la definición 3.5.13 es consistente con la definición 3.5.6, esto es, cuando ambas estén definidas, dan el mismo resultado, lo que corrobora que $\mu_x(t)$ está definida para cualesquier μ, x, t.

El siguiente lema generaliza el lema 3.5.7 y muestra que $\mu_x(t)$ tiene la propiedad semántica requerida.

Lema 3.5.14. *Para cualesquier μ, x, t y σ se cumple*

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_x(t)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}}(\mu),$$

donde $a = t[\sigma]$.

Demostración. Según la definición 3.5.13 $\mu_x(t) = \nu_x(t)$, donde $\nu(\equiv \mu)$ es alguna variante de μ tal que $sust(\nu, t, x)$. En consecuencia, $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_x(t)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\nu_x(t))$. De acuerdo con el lema 3.5.7, $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\nu_x(t)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}}(\nu)$, pero como $\mu \sim \nu$, $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}} = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}}(\mu)$ por el lema 3.5.12. ❐

Como una aplicación podemos suscribir lo siguiente.

Lema 3.5.15. *Sean Φ un conjunto de fórmulas y $\neg\forall\, x\mu \in \Phi$. Sea y una variable que no es libre en Φ (es decir, no es libre en ninguna $\varphi \in \Phi$). Si Φ es satisfacible, así[5] lo es $\{\Phi, \neg\mu_x(y)\}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \Phi[\sigma]$. Como $\neg\forall\, x\mu \in \Phi$, sabemos que $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\neg\forall\, x\mu) = V$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}} = F$ para alguna $a \in A$. Considere $\sigma^{y/a}$. Como y no es libre en Φ, se sigue que $\mathfrak{A} \models \Phi[\sigma^{y/a}]$.

Además, por el lema 3.5.14,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a}}(\mu_x(y)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a,x/b}}(\mu),$$

donde $b = y[\sigma^{y/a}] = a$. Por consiguiente,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a}}(\mu_x(y)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a,x/a}}(\mu). \qquad (✡)$$

Si y es la misma variable que x, $\sigma^{y/a,x/a} = \sigma^{x/a}$, por lo que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a,x/a}}(\mu) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x/a}}(\mu) = F. \qquad (✠)$$

Por otro lado, si $y \neq x$, y no puede ser libre en μ (porque y no es libre en $\neg\forall\, x\mu$), así que se cumple (✠).

En cualquier caso, podemos inferir de (✡) y (✠) que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{y/a}}(\mu_x(y)) = F,$$

es decir,

$$\mathfrak{A} \models \neg\mu_x(y)[\sigma^{y/a}].$$

❐

[5]Note que por las definiciones 3.5.6 y 3.5.13 $(\neg\mu)_x(t) \equiv \neg(\mu_x(t))$, por lo que podemos escribir sencillamente $\neg\mu_x(t)$.

En lo sucesivo podríamos requerir que un término t tome el lugar de una constante c (en lugar de una variable).

Definición 3.5.16. La fórmula $\mu_c(t)$ se obtiene al sustituir t por cada aparición de c en μ.

En la práctica usamos $\mu_c(t)$ sólo cuando ninguna aparición de c en μ está en el alcance de un cuantificador cuya variable aparezca en t.

También necesitamos realizar sustituciones simultáneas de variables[6] $x_1, \ldots, x_n$ por $t_1, \ldots, t_n$ en μ; debemos generalizar el lema 3.5.14. No basta sustituir las t_i una por una. Por ejemplo, t_1 puede contener x_2, así que si primero sustituimos x_1 por t_1, la fórmula $\mu_{x_1}(t_1)$ tendrá nuevas apariciones de x_2 (libres) que se introducen durante la sustitución. Si ahora sustituimos x_2 por t_2, entonces t_2 remplazará estas ocurrencias libres de x_2, lo cual no es necesariamente conveniente.

Definimos $\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$, el resultado de sustituir en forma simultánea las t_i por las x_i en μ por recursión en n.

El caso $n = 1$ ya está (Definición 3.5.13).

Para $n > 1$, nuestra hipótesis de inducción es que

$$\mu_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s_1, \ldots, s_{n-1})$$

ya se definió para términos $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Definición 3.5.17. Si x_n no es libre en μ,

$$\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Si x_n es libre en μ, entonces

$$\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n) = (\mu_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s_1, \ldots, s_{n-1}))_{x_n,z}(t_n, x_n),$$

donde z es la primera variable que no parece en μ y en ningún $t_1, \ldots, t_n$, y $s_i = t_i^{x_n}(z)$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

De modo que primero sustituimos z en lugar de x_n en $t_1, \ldots, t_{n-1}$, para después sustituir los términos resultantes $s_1, \ldots, s_{n-1}$ simultáneamente en lugar de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ en μ (la hipótesis de inducción es que sabemos cómo hacerlo). Después, sustituimos t_n en lugar de x_n. Finalmente remplazamos z por x_n. El papel de z es el de remplazar x_n en posiciones en las que no queremos que aparezca t_n. Con seguridad podemos remplazar, después de esto, t_n en lugar de x_n en los lugares correctos y regresar x_n en lugar de z.

[6] En lo que resta de la sección supondremos que $x_1, \ldots, x_n$ representan n variables distintas.

Para probar que esta definición es semánticamente correcta, demostramos el siguiente lema.

Lema 3.5.18. *Se cumple*

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n}}(\mu),$$

donde $a_1 = t_1[\sigma], \ldots, a_n = t_n[\sigma_n]$.

Demostración. Procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ el resultado ya se ha demostrado (lema 3.5.14). Sea $n > 1$; el caso en que x_n no es libre en μ queda como ejercicio, en cambio si x_n es libre en μ, por la definición 3.5.17 y el lema 3.5.14, ocurre que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/b_n}}((\mu_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s_1,\ldots,s_{n-1}))_{x_n}(t_n)),$$

donde $b_n = x_n[\sigma]$. Apelamos al teorema 3.5.14 para afirmar que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/x_n,x_n/a'}}(\mu_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s_1,\ldots,s_{n-1})),$$

donde $a' = t_n[\sigma^{z/x_n}]$. Como se escogió z de forma que no aparezca en t_n, tenemos que $a' = t_n[\sigma] = a_n$. Aplicamos la hipótesis de inducción para llegar a

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/x_n,x_n/t_n,x_1/s_1,\ldots,x_{n-1}/s_{n-1}}}(\mu), \tag{✟}$$

donde $s_i = t_i[\sigma^{x_n/z}]$. Se sigue del lema 3.5.5 que

$$s_i = t_i[\sigma^{z/x_n,x_n/t_n,x_1/z'}] \quad i = 1,\ldots,n-1, \tag{✞}$$

donde

$$z' = z[\sigma^{z/x_n,x_n/t_n}]. \tag{✝}$$

Es claro que podemos simplificar (✞):

$$s_i = t_i[\sigma^{z/x_n,x_n/z'}] \quad i = 1,\ldots,n-1. \tag{✜}$$

Ya que z es diferente de x_n, de (✝) concluimos que $z' = x_n$ por lo que (✜) da lugar a

$$s_i = t_i[\sigma^{z/x_n,x_n/x_n}].$$

En virtud de que z no parece en t_i, inferimos que

$$s_i = t_i[\sigma^{x_n/x_n} = t_i[\sigma] = a_i.$$

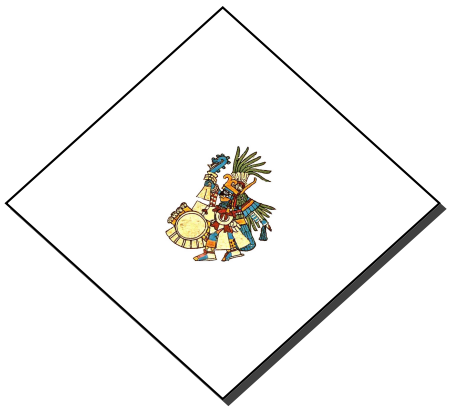
Podemos escribir (✟) como

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{z/x_n,x_1/t_1,\ldots,x_n/t_n}}(\mu),$$

y como z no es libre en μ, de hecho ocurre que

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma}(\mu_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathcal{A}_{\mathfrak{A},\sigma^{x_1/t_1,\ldots,x_n/t_n}}(\mu),$$

como se afirmó. ◻



3.6 ➠ Ejercicios

1. Sean A, B subconjuntos definibles de una estructura $\mathfrak{M}$.

   a) Muestre que $A \cup B$ es definible.

   b) Muestre que $A \cap B$ es definible.

   c) Muestre que $A - B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$ es definible.

2. Sea U el universo de una estructura $\mathcal{U}$. Suponga que $A \subseteq U^3$ y $B \subseteq U^3$ son subconjuntos definibles de M.

   a) Muestre que $A \times B \subseteq U^6$ es definible.

   b) Suponga que transformamos el orden de las n-adas. Considere el conjunto de los (z, x, y) tales que $(x, y, z) \in A$. Muestre que este conjunto es definible.

   c) Muestre que $C \subseteq U^2$ es definible, donde C es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que (x, y, z) está en A para alguna z.

   d) Muestre que $D \subseteq U^2$ es definible, donde D es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que $(x, y, z) \in A$ para alguna z y $(x, y, z) \in B$ para alguna z.

   e) Muestre que $E \subseteq U^2$ es definible, donde E es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que para alguna z, (x, y, z) está en A y B.

3. Definimos la distancia $d(a, b)$ entre dos vértices a, b de una gráfica como el menor número de aristas en una trayectoria de a a b. Cuando no existe tal trayectoria, $d(a, b) = \infty$. Recuerde que $\boldsymbol{\mathcal{L}}_G$ es el lenguaje para gráficas.

   a) Pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_G$-fórmula $\delta_n(x, y)$ tal que dada cualquier gráfica $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \models \delta_n(a, b)$ si y sólo si $d(a, b) = n$. [Sugerencia: defina las fórmulas δ_n por inducción en n.]

   b) ¿Existe una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_G$-fórmula $\delta_\infty(x, y)$ tal que, dada cualquier gráfica $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \models \delta_\infty(a, b)$ si y sólo si $\delta(a, b) = \infty$? [Sugerencia: No, use el teorema de compacidad, aunque éste aparece en el segundo volumen.]

4. (a) Defina un $\boldsymbol{\mathcal{L}}_G$-enunciado φ tal que φ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes y, para cualquier modelo $\mathfrak{G}$ de φ, $\mathfrak{G}$ es una gráfica conexa.

   (b) Encuentre una gráfica conexa que no sea modelo del enunciado φ de (a).

5. (a) Defina un $\mathcal{L}_G$-enunciado φ tal que $\neg\varphi$ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes y $\mathfrak{G} \models \varphi$ para toda gráfica conexa $\mathfrak{G}$.

   (b) Encuentre una gráfica que no sea conexa y sea modelo de φ del inciso (a).

6. (a) Defina una $\mathcal{L}_G$-enunciado ψ tal que ψ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes y para todo modelo finito $\mathfrak{G}$ de ψ, $|G|$ es par.

   (b) Encuentre una gráfica finita $\mathfrak{G}$ tal que $|G|$ es par y $\mathfrak{G}$ no es modelo del enunciado ψ de (a).

7. (a) Defina un $\mathcal{L}_G$-enunciado φ tal que $\neg\varphi$ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes y para cualquier gráfica finita $\mathfrak{G}$, si $|G|$ es par, entonces $\mathfrak{G} \models \varphi$.

   (b) Encuentre un modelo finito $\mathfrak{G}$ para el enunciado φ de (a) tal que $|G|$ es impar.

8. Muestre que los enunciados

$$\forall x \exists y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge R(y,z))$$

   y

$$\exists x \forall y \exists z (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge R(y,z))$$

   no son equivalentes mediante una gráfica que sea modelo de uno de los enunciados pero no del otro.

9. Suponga que encuentra una gráfica $\mathfrak{G}$ con aristas múltiples, es decir, puede existir más de un borde entre dos vértices de $\mathfrak{G}$. Describa $\mathfrak{G}$ como una $\mathcal{L}$-estructura para un lenguaje adecuado $\mathcal{L}$.

10. Demuestre que si t y u son términos tales que $sust(\varphi, t, x)$ y $sust(\varphi, u, x)$ pero no contienen a x, entonces:

    ❶ $\models \forall x(x = t \to [\varphi \leftrightarrow \varphi_x(t)]$

    ❷ $\models \exists x(x = t \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi_x(t) \leftrightarrow \forall x(x = t \to \varphi)$

    ❸ $\models \forall x([x = t \vee x = u] \to [\varphi \to (\varphi_x(t) \vee \varphi_x(u))])$

    ❹ $\models \forall x([x = t \vee x = u] \to [(\varphi_x(t) \wedge \varphi_x(u)) \to \varphi])$

    ❺ $\models \exists x[(x = t \vee x = u) \wedge \varphi] \leftrightarrow \varphi_x(t) \vee \varphi_x(u)$

    ❻ $\models \forall x[(x = t \vee x = u) \to \varphi] \leftrightarrow \varphi_x(t) \wedge \varphi_x(u)$

11. Dado un entero $n \geq 2$ y una relación binaria S en un conjunto E, un ciclo de orden n (o un n-ciclo) para S es una n-ada $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1)$ de elementos de E que satisfacen $(a_1, a_2) \in S$, $(a_2, a_3) \in S$,..., $(a_{n-1}, a_n) \in S$. El orden estricto usual en $\mathbb{R}$ no tiene n-ciclos, en cambio la relación binaria en $\{1,2,3\}$ dada por $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ tiene 3-ciclos pero no 2-ciclos.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con sólo un símbolo de 2-relación R. Considere, para todo $n \geq 2$, la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula φ_n:

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \neg(R(x_1, , x_2) \wedge R(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, x_n) \wedge R(x_n, x_1)).$$

Fijemos $\boldsymbol{T} = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. Decimos que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ está libre de ciclos cuando para toda $n \geq 2$, $R^{\mathfrak{A}}$ no tiene n-ciclos; en caso contrario, decimos que la estructura tiene ciclos. Es claro que los modelos de $\boldsymbol{T}$ son las $\mathcal{L}$-estructuras libres de ciclos.

a) Para todo $n \geq 2$, exhiba un modelo de la fórmula

$$\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi_n.$$

b) Pruebe que si ψ es un $\mathcal{L}$-enunciado consecuencia de $\boldsymbol{T}$, existe al menos un entero $p \geq 2$ tal que ψ se satisface en toda $\mathcal{L}$-estructura en la que la interpretación de R no tenga ciclos de orden menor o igual que p.

c) Muestre que todo $\mathcal{L}$-enunciado que sea consecuencia de $\boldsymbol{T}$ tiene al menos un modelo que tiene ciclos.

[Sugerencia: (a) Tome como universo $\mathbb{Z}_{n+1}$, y como interpretación de R sea $\overline{R}$ el conjunto definido por: para cualesquier elementos $a, b \in \mathbb{Z}_{n+1}$, $(a, b) \in \overline{R}$ si y sólo si $b = a + 1$. En otras palabras, $\overline{R}$ es la suma en $\mathbb{Z}_{n+1}$. El tuplo $(0, 1, \ldots, n)$ es un $(n+1)$-ciclo para $\overline{R}$, por lo que la estructura recién definida no satisface φ_{n+1}. Más aún, verifique que si $2 \leq k \leq n$, no hay k-ciclos en la estructura; deduzca que la estructura satisface $\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

(b) Si $\boldsymbol{T} \models \psi$, por compacidad, existe $\boldsymbol{T}' \subseteq \boldsymbol{T}$ finito tal que $\boldsymbol{T}' \vdash \psi$. Encuentre un entero $p \geq 2$ tal que $\boldsymbol{T}' \subseteq \{\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_p\}$; infiera que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\} \vdash \psi$, lo que significa que ψ se satisface en cualquier estructura que no tenga ciclos de longitud $\leq p$.

(c) Sean ψ un enunciado consecuencia de $\boldsymbol{T}$ y $p \geq 2$ tal que ψ se satisface en cualquier $\mathcal{L}$-estructura que no tenga ciclos de longitud $\leq p$. Considere un modelo de la fórmula

$$\varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \cdots \wedge \varphi_p \wedge \neg\varphi_{p+1}$$

((a) garantiza la existencia de tal modelo); ψ se satisface en este modelo que contiene al menos un ciclo de longitud $p + 1$.

12. Sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ y $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$-estructura con universo $\mathbb{N}$ e interpretación natural de los símbolos en $\mathcal{L}$.

a) ¿Qué conjunto define $\varphi(x) \equiv \forall y(y \cdot x = y)$?

b) ¿Qué conjunto define $\psi(x) \equiv \exists y(\forall z(y \cdot z = z \wedge y + y + y + y + y = x)$?

c) ¿Qué conjunto define la fórmula $\theta(x) \equiv \forall y, z(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x)$?

d) Confirme que el conjunto $\{p \in \mathbb{N} : p \text{ es primo}\}$ es $\mathcal{L}$-definible.

13. En el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0\}$ y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con universo $\mathbb{R}$ y la interpretación natural. Demuestre que el conjunto de reales positivos es definible, así como el conjunto de números algebraicos.

14. Escriba fórmulas $\varphi_0(x), \varphi_3(x)$ en el lenguaje de la teoría de gráficas que expresen que el grado de un vértice x es 0, respectivamente 3.

15. Considere $G = \{a, b, c\}$ con $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, a)\}$. Confirme que la gráfica (G, R) es rígida, es decir, carece de simetrías que no sean la identidad.

16. $\mathcal{L}$ consiste en un símbolo de 2-predicado R. Sea $\mathfrak{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura con universo $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ y $R^{\mathfrak{M}}$ es la relación $|$ («divide»); es decir, $R^{\mathfrak{M}}$ está definida para los enteros $m, n \geq 2$ por la condición $(m, n) \in R^{\mathfrak{M}}$ si y sólo si $m|n$.

    a) Para cada una de las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas con una variable libre x, describa el conjunto definido en M por ella.

    $$\begin{aligned}
    \psi_1 &\equiv \forall y(R(y, z) \to x = y)\\
    \psi_2 &\equiv \forall y \forall z((R(y, x) \wedge R(z, x) \to (R(y, z) \vee R(z, y))\\
    \psi_3 &\equiv \forall y \forall z(R(y, x) \to (R(z, y) \to R(x, z))\\
    \psi_4 &\equiv \forall t \exists y \exists z(R(t, x) \to (R(y, t) \wedge R(z, y) \wedge \neg R(t, z))
    \end{aligned}$$

    b) Describa una $\mathcal{L}$-fórmula $\sigma(x, y, z, t)$ tal que para cualesquier a, b, c y d en M, $\mathfrak{M}$ satisface $\sigma(a, b, c, d)$ si y sólo si d es el máximo divisor común de a, b, c.

    c) Sea θ el $\mathcal{L}$-enunciado

    $$\begin{aligned}
    &\forall x \forall y \forall z((\exists t(R(t, x) \wedge R(t, y) \wedge \exists t(R(t, y) \wedge R(t, z)) \to\\
    &\exists t \forall u(R(u, t) \to (R(u, x) \wedge R(u, z))).
    \end{aligned} \tag{❑}$$

    1) ¿Se satisface θ en $\mathfrak{M}$?
    2) Dé un ejemplo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que si remplazamos $\mathfrak{M}$ por $\mathfrak{A}$ en la pregunta previa, la respuesta es diferente.

[Sugerencia: ψ_1 se satisface por un entero $n \in \mathfrak{M}$ si y sólo si n es el único divisor de n, es decir, n es primo.

ψ_2 se satisface por n si y sólo si cualesquier dos divisores de n son comparables mediante la relación divide. Cualquier número que sea potencia de un primo tiene esta propiedad: ¡verifíquelo!

Por otro lado, un elemento de M que no sea potencia de un primo tiene al menos dos divisores primos distintos (note que $1 \notin M$), por lo que tal elemento no satisface ψ_2.

Si ψ_3 se satisface por $n \in M$, entonces n satisface la siguiente consecuencia de ψ_3:

$$\forall y((R(y,x) \wedge R(y,y)) \to R(x,y)).$$

Así que, todo divisor de n debe ser un múltiplo de n, lo que es tanto como decir que todo divisor de n debe ser n, como para ψ_1. Se sigue que un número que no sea primo no satisface ψ_3; por otra parte, si n es primo, si r divide a n y si s divide a r, $s, n, r \in M$, entonces $r = s = n$, por lo que n divide a s; verifique que n satisface ψ_3.

Compruebe que ψ_4 es equivalente a

$$\forall t(R(t,x) \to \exists y \exists z(R(y,t) \wedge R(z,y) \wedge \neg R(t,z)).$$

Verifique que $\exists y \exists z(R(y,t) \wedge R(z,y) \wedge \neg R(t,z))$ es equivalente a

$$\neg \forall y \forall z(R(y,t) \to (R(z,y) \to R(t,z)).$$

Esta última fórmula es $\neg \psi_3^x(t)$. En consecuencia, ψ_4 es equivalente a

$$\forall t(R(t,x) \to \neg \psi_3[t]).$$

Para que $n \in M$ satisfaga ψ_4, es necesario y suficiente que ningún divisor de n satisfaga ψ_3, es decir, que no tenga divisores primos. Concluya que el conjunto es vacío.

b) Considere la fórmula

$$\begin{aligned} R(x,t) \wedge R(t,y) \wedge R(t,z) \wedge ((R(u,x) \wedge R(u,y) \wedge R(u,z) \\ \to R(u,t), \end{aligned}$$

que se satisface por $(a,b,c,d) \in M$ si y sólo si d es un divisor común de a, b, c y todo divisor común de a, b, c es divisor de d.

c) (i) Cambie el nombre de las variables acotadas en θ y sáquelas usando las reglas usuales; obtenga sucesivamente las siguientes fórmulas equivalentes a θ:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y \forall z((\exists v(R(x,x) \wedge R(v,y)) \wedge \exists w(R(w,y) \wedge R(w,z)) \\ &\to \exists t \forall u(R(u,t) \to (R(u,x) \wedge R(u,z))) && (\star) \\ &\forall x \forall y \forall z(\exists v \exists w((R(v,x) \wedge R(v,y)) \wedge (R(w,y) \wedge R(w,z)) \\ &\to \exists t \forall u(R(u,t) \to (R(u,x) \wedge R(u,z))) && (\bigstar) \\ &\forall x \forall y \forall z \forall v \forall w \exists t \forall u(((R(v,x) \wedge R(v,y) \wedge (R(w,y) \wedge \\ &R(w,z)) \to (R(u,t) \to (R(u,x) \wedge R(u,z))). && (\textcircled{\star}) \end{aligned}$$

(ii) Considere la fórmula $\theta \equiv \exists t \forall u(R(u,t) \to R(u,x) \wedge R(u,z))$. Se satisface en $\mathfrak{M}$ (cuando x se interpreta como a, y como c) si y sólo si existe $d \in M$ cuyos

divisores en $\mathfrak{M}$ dividen a y c; esto significa que a, c tienen al menos un divisor común en $\mathfrak{M}$ o que a, c no son primos relativos. Compruebe que θ no se satisface en $\mathfrak{M}$; $(a, b, c) = (2, 6, 3)$ es un contraejemplo.

(iii) $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, = \rangle$ es modelo de θ.]

17. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje que sólo tiene un símbolo de 1-predicado O y dos símbolos de 2-predicado I, R. Considere las siguientes fórmulas.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \neg R(x,x)\\
\varphi_2 &\equiv \forall x (O(x) \to \neg R(x,x))\\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \forall z ((O(x) \wedge O(y) \wedge I(x,z) \wedge I(z,y)) \to O(z))\\
\varphi_4 &\equiv \forall x \forall y \forall z ((O(z) \wedge O(y) \wedge O(z) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\\
\varphi_5 &\equiv \forall x \forall y ((O(x) \wedge O(y)) \to (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,x))\\
\varphi_6 &\equiv \forall x \forall y ((O(x) \wedge R(x,y) \to O(y))\\
\varphi_7 &\equiv \forall x \forall y ((O(x) \wedge R(y,x) \to O(y))\\
\varphi_8 &\equiv \forall x \exists y \exists z (R(y,x) \wedge R(x,z))\\
\varphi_9 &\equiv \forall x \exists y \exists z (O(x) \to (R(y,x) \wedge R(x,z) \wedge O(y) \wedge O(z))\\
\varphi_{10} &\equiv \forall x \forall y \exists z ((O(x) \wedge O(y) \wedge R(x,y)) \to (R(x,z) \wedge R(z,y) \wedge O(z))).
\end{aligned}$$

a) Tome la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M}$ cuyo universo es $Pot(\mathbb{N})$; la interpretación de $O(x)$ es «x es infinito y su complemento es infinito», la interpretación de I es la relación de contención $\subseteq$ y $(A, B) \in R^{\mathfrak{M}}$ si $A \subseteq B$ y $|A| = |B - A|$ (aquí $|X|$ significa la cardinalidad del conjunto X). Para cada una de las 10 fórmulas dadas, determine si se satisface en $\mathfrak{M}$.

b) Añadimos un símbolo de 1-predicado D a $\mathcal{L}$. ¿Es posible interpretar D en $\mathfrak{M}$ de tal suerte que se satisfagan las siguientes fórmulas?

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\equiv \forall x \forall y ((D(x) \wedge D(y)) \to (I(x,y) \vee I(y,x))\\
\psi_2 &\equiv \forall x \forall y \exists z ((D(x) \wedge D(y) \wedge I(x,y) \wedge \neg(y = x)) \to\\
&\qquad (D(z) \wedge I(x,z) \wedge I(z,y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))\\
\psi_3 &\equiv \forall x \exists y \exists z (D(x) \to (D(y) \wedge D(z) \wedge I(x,y) \wedge I(z,x) \wedge\\
&\qquad \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z))\\
\psi_4 &\equiv \exists x D(x).
\end{aligned}$$

[Sugerencia: a) Verifique que los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$. La fórmula φ_1 no se satisface en $\mathfrak{M}$ pues $\varnothing \subseteq \varnothing$ y $|\varnothing| = |\varnothing - \varnothing|$; así, $\mathfrak{M} \models \exists x R(x,x)$. Note que para todo subconjunto no vacío X de $\mathbb{N}$, $(X, X) \notin R^{\mathfrak{M}}$ pues $|X| \geq 0$ y $|X - X| = 0$.

Ya que los elementos de $O^{\mathfrak{M}}$ son infinitos, $\mathfrak{M} \models \varphi_2$. Suponga que X, Y son elementos de $O^{\mathfrak{M}}$ y $Z \subseteq \mathbb{N}$ con $X \subseteq Z \subseteq Y$; entonces Z es infinito y $\mathbb{N} - Z$ es infinito. Se sigue que $Z \in O^{\mathfrak{M}}$, por lo que $\mathfrak{M} \models \varphi_3$. Sean $X, Y, Z \in O^{\mathfrak{M}}$ con

$(X, Y) \in R^{\mathfrak{M}}$ y $(Y, Z) \in R^{\mathfrak{M}}$; se cumple $X \subseteq Y \subseteq Z$ y los complementos $Y - X$, $Z - Y$ son infinitos, así que $Z - X$ es infinito pues $Z - X = (Z - Y) \cup (Y - X)$; en consecuencia, $(X, Z) \in R^{\mathfrak{M}}$ y $\mathfrak{M} \models \varphi_4$.

Para cualesquier subconjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, no se puede cumplir $(X, Y) \in R^{\mathfrak{M}}$ y $(Y, X) \in R^{\mathfrak{M}}$ simultáneamente, a menos que $X = Y = \varnothing$; como $\varnothing \notin O^{\mathfrak{M}}$, concluya que $\mathfrak{M} \models \varphi_5$.

Note que $2\mathbb{N} \in O^{\mathfrak{M}}$ y $(2\mathbb{N}, \mathbb{N}) \in R^{\mathfrak{M}}$ pues $\mathbb{N} \notin O^{\mathfrak{M}}$, así que $\mathfrak{M} \not\models \varphi_6$. Para cualesquier subconjuntos X, Y de $\mathbb{N}$ tales que $X \in O^{\mathfrak{M}}$ y $(Y, X) \in R^{\mathfrak{M}}$, Y es un subconjunto de X que debe ser infinito (de lo contrario $X - Y$ sería finito y $(X - Y) \cup Y = X$ también lo sería); más aún, $\mathbb{N} - Y$, que contiene a $\mathbb{N} - X$, también debe ser infinito; en consecuencia $Y \in O^{\mathfrak{M}}$ y $\mathfrak{M} \models \varphi_7$.

Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es finito con cardinalidad impar, no existe ninguna partición de X en dos subconjuntos de la misma cardinalidad, por lo que ningún subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ puede satisfacer $(Y, X) \in R^{\mathfrak{M}}$, de donde se sigue que $\mathfrak{M} \not\models \varphi_8$.

Si X es un elemento de $O^{\mathfrak{M}}$, podemos encontrar una partición $\{Y, Y'\}$ de X en subconjuntos infinitos y una partición de $\mathbb{N} - X$ en subconjuntos infinitos $\{Z_1, Z_2\}$. Si hacemos $Z = X \cup Z_1$, se observa que Y y Z pertenecen a $O^{\mathfrak{M}}$, que $(Y, X) \in R^{\mathfrak{M}}$ y que $(X, Z) \in R^{\mathfrak{M}}$; se sigue que $\mathfrak{M} \models \varphi_9$. Sean X, Y dos elementos de $O^{\mathfrak{M}}$ con $(X, Z) \in R^{\mathfrak{M}}$, y entonces el conjunto $Y - X$ es infinito (pues es equipotente a X); así, $X \subseteq Z \subseteq Y$ y los conjuntos $X, Z - X = X_1$, $Y - Z = X_2$, y $\mathbb{N} - Z$ son infinitos, lo que demuestra que $(X, Z) \notin R^{\mathfrak{M}}$, $(Z, Y) \in R^{\mathfrak{M}}$, y $Z \in O^{\mathfrak{M}}$; en consecuencia, $\mathfrak{M} \models \varphi_{10}$.

(b) Sean D_1 un subconjunto de $Pot(\mathbb{N})$ y $\mathfrak{M}'$ la expansión de $\mathfrak{M}$ que se obtiene al interpretar el símbolo D como el conjunto D_1. Para que las cuatro fórmulas en consideración se satisfagan en $\mathfrak{M}'$, es necesario y suficiente que D_1 no sea vacío (fórmula ψ_4) y que la relación inclusión restringida a D_1 sea un orden total (fórmula ψ_2) que no tiene menor o mayor elemento (fórmula ψ_3). Ahora construimos un subconjunto D_1 de $Pot(\mathbb{N})$ que tenga esas propiedades. Primero definimos un subconjunto E_1 de $Pot(\mathbb{Q})$ que tenga las mismas propiedades: no es difícil; basta, por ejemplo, hacer $J_r = [-r, r] \cap \mathbb{Q}$ para cada racional $r > 0$ y entonces hacemos $E_1 = \{J_r : r \in \mathbb{Q}^*_+\}$; se cumple $E_1 \neq \varnothing$ y la relación de inclusión en E_1 es un orden total denso (si $0 < r < s$, y si $t = \frac{r+s}{2}$, entonces $J_r \subsetneqq J_t \subsetneqq J_s$) sin menor o mayor elemento.

Ahora pasamos de $Pot(\mathbb{Q})$ a $Pot(\mathbb{N})$: escoja una biyección f de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{N}$ (existe al menos una, ¿por qué?); f induce una biyección b de $Pot(\mathbb{Q})$ sobre $Pot(\mathbb{N})$ (para toda $X \in Pot(\mathbb{Q})$, $b(X) = \{f(x) : x \in X\}$) que es un isomorfismo entre las estructuras $\langle Pot(\mathbb{Q}), \subseteq\rangle$ y $\langle Pot(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ (¡Compruébelo!). Se sigue que el subconjunto $D_1 = b(E_1)$ de $\mathbb{N}$ responde la pregunta.]

18. El espectro de una $\mathcal{L}$-fórmula φ es el conjunto de cardinalidades de modelos finitos de φ, es decir, el conjunto de naturales n tales que φ tiene un modelo de cardinalidad n. Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$, exhiba,

cuando sea posible, un ejemplo de un lenguaje $\mathcal{L}$ y un $\mathcal{L}$-enunciado satisfacible cuyo espectro finito es el subconjunto dado:

a) $\varnothing$.

b) $\mathbb{N}$.

c) $\mathbb{N}^+$.

d) $\{n \in \mathbb{N}^+ : \exists\, p \in \mathbb{N}(n = 2p)\}$.

e) $\{n \in \mathbb{N}^+ : \exists\, p \in \mathbb{N}(n = p^2)\}$.

f) $\{3\}$.

g) $\{1, 2, 3, 4\}$.

h) $\mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, k\}$.

i) El conjunto de números no primos.

j) El conjunto de números primos.

[Sugerencia: Por ejemplo, sean $0, 1$ símbolos de constante, f de 1-función, g, $+$, $\times$ de 2-función, U y V símbolos de 1-relación y R de 2-relación. Para probar que el conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ es el espectro de una fórmula φ, debemos mostrar, por un lado, que la cardinalidad de todo modelo finito de φ es un elemento de X y, por otro lado, que para todo elemento $n \in X$ existe un modelo de φ cuya cardinalidad es n.

(a) Imposible. El universo de cualquier estructura es no vacío.
(b) $\mathcal{L} = \{=\}$; $\varphi \equiv \forall\, x(x = x)$.
(c) $\mathcal{L} = \{f\}$; $\varphi \equiv \forall\, x(ff(x) = x \wedge \neg(f(x) = x))$. Sea (M, h) un modelo finito de φ. Entonces h es una involución (es decir, $h \circ h = h$ es la identidad) de M en M que no tiene puntos fijos. La relación binaria $\approx$ definida en M por

$$a \approx b \Leftrightarrow h(a) = b \text{ o } h(b) = a,$$

es de equivalencia y sus clases de equivalencia contienen exactamente 2 elementos. Como las clases constituyen una partición de M, la cardinalidad de M es un número par. Recíprocamente, para un número par $n = 2p$ obtenemos un modelo de φ de cardinalidad n tomando $\{1, 2, \ldots, n\}$ como el universo e interpretando f como la aplicación

$$f(k) = \begin{cases} k + p, & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ k - p, & \text{si } p + 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

(d) $\mathcal{L} = \{U, g\}$; φ es la conjunción de las fórmulas

$$\psi \equiv \forall\, x \exists\, y \exists\, z(U(y) \wedge U(z) \wedge x = g(y, z)),$$

y

$$\theta \equiv \forall x \forall y \forall z \forall t((U(x) \wedge U(y) \wedge U(z) \wedge U(t) \wedge g(x,y) = g(z,t)) \rightarrow (x = z \wedge y = t)).$$

Sea $\mathfrak{M} = \langle M, U^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$ un modelo finito de φ. Entonces la restricción de $g^{\mathfrak{M}}$ a $U^{\mathfrak{M}} \times U^{\mathfrak{M}}$ es una biyección de $U^{\mathfrak{M}} \times U^{\mathfrak{M}}$ sobre M; se sigue que la cardinalidad de M es la de $U^{\mathfrak{M}} \times U^{\mathfrak{M}}$, que es un cuadrado perfecto. Recíprocamente, para todo entero $n \geq 1$, si n es un cuadrado perfecto, por ejemplo $n = p^2$, es fácil verificar que la fórmula φ se satisface en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M} = \langle M, U^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}} \rangle$, la aplicación de $M \times M$ sobre M que a cada pareja (a, b) asocia $ap + b$ si $a, b \in U^{\mathfrak{M}}$ y 0 en otro caso.

(e) $\mathcal{L} = \{=\}$; φ es la fórmula

$$\exists y \exists x \exists z(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(x = z) \wedge \forall t(t = x \vee t = t \vee t = z)).$$

(f) $\mathcal{L} = \{=\}$; $\varphi \equiv \exists x \exists y \exists z \exists t \forall u(u = x \vee u = y \vee u = z \vee u = t)$.

(g) $\mathcal{L} = \{=\}$; $\varphi \equiv \exists v_0 \exists v_1 \cdots \exists v_k \bigwedge_{0 \leq i < j \leq k} \neg(v_i = v_j)$.

(h) $\mathcal{L} = \{U, V, s\}$; hacemos

$$\begin{aligned}
\alpha &\equiv \forall x \forall y(x = y);\\
\beta &\equiv \forall x \exists y \exists z(U(y) \wedge V(z) \wedge x = g(y,z));\\
\gamma &\equiv \forall x \forall y \forall z \forall t((U(x) \wedge V(y) \wedge U(z) \wedge V(t) \wedge g(x,y) = g(z,t)\\
&\qquad \rightarrow (x = z \wedge y = t));\\
\delta &\equiv \exists x \exists y(U(x) \wedge U(y) \wedge \neg(x = y)) \wedge \exists z \exists t(V(z) \wedge V(t) \wedge \neg(z = t));
\end{aligned}$$

y tomamos

$$\varphi = (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma \wedge \delta)).$$

(i) $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \times, R\}$ (el lenguaje de los campos con un símbolo de relación binaria). Sea ι la conjunción de los axiomas para un campo junto con una fórmula que expresa que la interpretación de R es un orden total; sea ς la fórmula

$$\forall x R(0,x) \wedge \forall x(\exists y(R(x,y) \wedge \neg(x = y)) \rightarrow (R(x, x+1) \wedge \forall t((R(x,t) \wedge \neg(x = t) \rightarrow R(x+1, t))).$$

Definimos

$$\varphi \equiv \iota \wedge \varsigma.$$

Sea $\mathfrak{K} = \langle K, 0, 1, +, \times, \leq \rangle$ un modelo finito de F; K es un campo finito con una relación de orden $\leq$ para la cual 0 es el menor elemento y en el que todo elemento a que tenga una cota superior estricta tiene una cota inferior estricta (un sucesor), a saber, $a + 1$. Sea $<$ el orden estricto asociado con $\leq$. Recuerde que la característica de K es el menor entero $m > 0$ tal que $m1 = 0$ ($m1$ denota al

elemento $1+1+\cdot+1$, con m repeticiones de 1; además la característica es un número primo, que denotaremos p). La satisfacción de la fórmula ς muestra que tenemos (si, para todo entero j, denotamos el elemento $j1$ por j)

$$0 < 1 < 2 < \cdots < p-1,$$

(así que la cardinalidad de K es al menos p) y que para todo entero k con $0 \leq k \leq p-2$, no hay ningún elemento de K que esté estrictamente entre k y $k+1$. Ya que el orden es total y 0 es menor que cualquier elemento de K distinto de $0, 1, \ldots, p-1$ debe ser estrictamente mayor que $p-1$.

Se sigue que si la cardinalidad de K es estrictamente mayor que p, podemos encontrar un elemento $b \in K$ para el cual $p-1 < b$; $p-1$ tiene entonces una cota superior estricta, por lo que de acuerdo a la fórmula ς, es estrictamente menor que $p-1+1 = p > 0$ ya que p es la característica de K. Se tendría entonces $0 < p-1$ y $p-1 < 0$, por lo que $0 < 0$ por transitividad, lo cual es absurdo. Se sigue que la cardinalidad de K es igual a p (y $\mathfrak{K}$ es isomorfo al campo $\mathbb{Z}_p$). En consecuencia, la cardinalidad de cualquier modelo finito de φ es un número primo.

En forma recíproca, para todo número primo p, si $\leq$ el orden total de $\mathbb{Z}_p$ definido por: $\overline{0} \leq \overline{1} \leq \cdots \leq \overline{p-1}$ (donde $\overline{k}$ es la clase de equivalencia de k módulo p), entonces la estructura $\langle \mathbb{Z}_p, 0, 1, +, \times, \leq \rangle$ es un modelo de φ de cardinalidad p ¡verifíquelo!

19. Recuerde que $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, donde $0, 1, \ldots, n-1$ son realmente clases de equivalencia.

    a) El lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en un símbolo de 1-función f. Considere las siguientes $\mathcal{L}$-estructuras:

    $$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \langle \mathbb{Z}_n, f^{\mathfrak{A}_1} \rangle, \quad f^{\mathfrak{A}_1}(x) = x+1 \\ \mathfrak{A}_2 &= \langle \mathbb{Z}_n, f^{\mathfrak{A}_2} \rangle, \quad f^{\mathfrak{A}_2}(x) = x+2. \end{aligned}$$

    Para cada una de estas estructuras, determine que subconjuntos son $\mathcal{L}$-definibles.

    b) El lenguaje $\mathcal{L}'$ tiene un símbolo de 2-función g. Considere las siguientes $\mathcal{L}'$-estructuras:

    $$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \langle \mathbb{Z}_3, g^{\mathfrak{B}_1} \rangle \\ \mathfrak{B}_2 &= \langle \mathbb{Z}_6, g^{\mathfrak{B}_2} \rangle \\ \mathfrak{B}_3 &= \langle \mathbb{R}, g^{\mathfrak{B}_3} \rangle. \end{aligned}$$

    donde $g^{\mathfrak{B}_1}(x,y) = x+y$, $g^{\mathfrak{B}_2}(x,y) = x+y$, $g^{\mathfrak{B}_3}(x,y) = xy$.
    Para cada estructura determine que subconjuntos son $\mathcal{L}'$-definibles.

c) El lenguaje $\mathcal{L}''$ consiste en un símbolo de 2-predicado R. Considere la $\mathcal{L}''$-estructura $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

1) ¿Cuáles subconjuntos de $\mathbb{R}$ son $\mathcal{L}''$-definibles en esta estructura?
2) ¿Cuáles subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son $\mathcal{L}''$-definibles en esta estructura?

[Sugerencia: El siguiente es un método para determinar los subconjuntos definibles del universo (o de algún producto cartesiano de éste) en un modelo $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ de un lenguaje $\mathcal{L}$. Suponga que hemos determinado una cantidad finita de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de M^k que son definibles en $\mathfrak{M}$ y que constituyen una partición de M^k. También suponga que para todo índice i entre 1 y n y que para cualesquier $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ y $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ de A_i existe un automorfismo de $\mathfrak{M}$ que transforma α en β, es decir, transforma a_1 en b_1, a_2 en b_2, ..., a_k en b_k (esta propiedad se satisface en forma automática por aquellos A_i que contienen sólo un elemento; el automorfismo en cuestión se reduce a la identidad).

En estas circunstancias, para todo subconjunto X de M^k que es definible en $\mathfrak{M}$, cada uno de los A_i está contenido en X o es ajeno a X. Entonces es fácil concluir que todo subconjunto de M^k definible en $\mathfrak{M}$ debe ser la unión de conjuntos elegidos entre los $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En otras palabras, el álgebra booleana de subconjuntos de M^k que son definibles en $\mathfrak{M}$ es la subálgebra de $Pot(M^k)$ generada por $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Esta subálgebra tiene 2^n elementos.

(a) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_n$ definible en $\mathfrak{A}_1$ y $k \in A$. Para todo elemento $h \in \mathbb{Z}_n$, la aplicación $\varphi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $\varphi(x) = x + h - k$ es una biyección que conmuta con la aplicación $x \mapsto x + 1$ (lo que significa que para todo $x \in \mathbb{Z}_n$, $\varphi(x + 1) = \varphi(x) + 1$); así que φ es un automorfismo de $\mathfrak{A}_1$. Puesto que A es definible, se sigue que h, que es igual a $\varphi(k)$, pertenece a A. Por consiguiente, $A = \mathbb{Z}_n$ pues los únicos subconjuntos definibles de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathfrak{A}_1$ son $\varnothing$ y $\mathbb{Z}_n$.

En la misma forma (remplazando $\mathfrak{A}_1$ por $\mathfrak{A}_2$ y $x \mapsto x + 1$ por $x \mapsto x + 2$), pruebe que los únicos subconjuntos de $\mathbb{Z}_n$ definibles en $\mathfrak{A}_2$ son $\varnothing$ y $\mathbb{Z}_n$.

(b) En la estructura $\mathfrak{B}_1$, el conjunto $\{0\}$ está definido por la fórmula $g(v_0, v_0) = v_0$, y el conjunto $\{1, 2\}$ por la negación de esta fórmula. Así que la aplicación $x \mapsto x + x$ es un automorfismo de la estructura que intercambia los elementos 1 y 2. Concluya que hay cuatro subconjuntos de $\mathbb{Z}_3$ definibles en $\mathfrak{B}_1$: $\varnothing, \mathbb{Z}_3, \{0\}$ y $\{1, 2\}$.

En la estructura $\mathfrak{B}_2$, los conjuntos $\{0\}, \{3\}, \{2, 4\}$ y $\{1, 5\}$ son definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} \theta_0 &\equiv g(v_0, v_0) = v_0 \\ \theta_3 &\equiv g(g(v_0, v_0), g(v_0, v_0)) = g(v_0, v_0) \wedge \neg\theta_0 \\ \theta_{24} &\equiv g(v_1, v_1) = v_0 \wedge \neg\theta_0 \\ \theta_{15} &\equiv \neg\theta_0 \wedge \neg\theta_3 \wedge \neg\theta_{24}. \end{aligned}$$

Más aún, la aplicación $x \mapsto -x$ es un automorfismo de $\mathfrak{B}_2$ que intercambia 2 y 4, por un lado, y 1 y 5, por el otro. Por lo tanto, se satisfacen las circunstancias descritas al principio y se concluye que los subconjuntos de $\mathbb{Z}_6$ definibles en $\mathfrak{B}_2$ son los 16 elementos del álgebra generados por $\{0\}, \{3\}, \{2,4\}$ y $\{1,5\}$, a saber:

$$\begin{array}{l}\varnothing, \{0\}, \{3\}, \{2,4\}, \{1,5\}, \{0,3\}, \{0,2,4\}, \{0,1,5\},\\ \{2,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{0,2,3,4\},\\ \{0,1,3,5\}, \{0,1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}, \mathbb{Z}_6.\end{array}$$

Finalmente, considere la estructura $\mathfrak{B}_3$. Los conjuntos $\{0\}, \{1\}, \{-1\}$ y $\mathbb{R}^+$ están definidos por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &\equiv \forall v_1 g(v_1, v_0) = v_0\\ \varphi_1 &\equiv \forall v_1 g(v_1, v_0) = v_1,\\ \varphi_{-1} &\equiv \forall v_1 g(v_1, g(v_0, v_0)) = v_1 \wedge \neg\varphi_1\\ \varphi_{\mathbb{R}^+} &\equiv \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_0.\end{aligned}$$

Todas las combinaciones booleanas de estos cuatro conjuntos son definibles, en particular, $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\mathbb{R}^- - \{-1\}$.

Si α es un real distinto de cero, la aplicación $\psi[\alpha]$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que, a cada real x, asocia

$$\begin{array}{rl} 0 & \text{si } x = 0,\\ x^\alpha & \text{si } x > 0,\\ -(-x)^\alpha & \text{si } x < 0,\end{array}$$

es una biyección que conmuta con la aplicación $(x, y) \mapsto xy$ (para cualesquier reales x, y, $\psi[\alpha](x, y) = \psi[\alpha](x)\psi[\alpha](y)$); así que éste es un automorfismo de la estructura $\mathfrak{B}_3$. Sean a, b dos elementos de $\mathbb{R}^+ - \{1\}$; $\ln b / \ln a$ es entonces un real $\neq 0$ y el automorfismo $\psi[\ln b / \ln a]$ transforma a en b. Obtenemos la misma conclusión cuando remplazamos $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ por $\mathbb{R}^- - \{-1\}$; suponga que a y b pertenecen a $\mathbb{R}^- - \{1\}$ y considere el automorfismo $\psi[\ln(-b)/\ln(-a)]$.

En esta forma se observa que los cinco conjuntos $\{0\}, \{1\}, \{-1\}, \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\mathbb{R}^- - \{1\}$ que son definibles en $\mathfrak{B}_3$ y constituyen una partición de $\mathbb{R}$, satisfacen las condiciones descritas en los preliminares. Se sigue que el álgebra booleana de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son definibles en $\mathfrak{B}_3$ es la subálgebra de $Pot(\mathbb{R})$ generada por $\{0\}, \{1\}, \{-1\}, \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\mathbb{R}^- - \{-1\}$, la cual contiene 32 elementos.

(c) Los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ definibles en $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ son $\varnothing$ y $\mathbb{R}$. Para (ii)

considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \text{ definido por } R(v_0,v_1) \wedge \neg(v_0 = v_1) \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \text{ definido por } R(v_1,v_0) \wedge \neg(v_0,v_1). \end{aligned}$$

Sean $\alpha = (a,b)$ y $\beta = (c,d)$ dos elementos de $\mathbb{R}^2$. Si ambos pertenecen a A_1, entonces $a = b$, $c = d$ y la función $f(x) = x + c - a$ es un automorfismo de $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ que transforma α en β. Si α y β pertenecen a A_2 (respectivamente, a A_3), entonces $a < b$ y $c < d$ (respectivamente, $a > b$ y $c > d$); el real $\frac{d-c}{b-a}$ es estrictamente positivo y la aplicación

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

es un automorfismo de $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ que transforma α en β. Así que las condiciones descritas al inicio se satisfacen y se deduce que hay 8 subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definibles: $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$, A_1, A_2, A_3, y los tres siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_2 \cup A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \\ A_1 \cup A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\} \\ A_1 \cup A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}. \end{aligned}$$

20. Muestre que los únicos subconjuntos del universo de una estructura trivial que son definibles sin parámetros son el conjunto vacío y el universo entero. [Sugerencia: suponga que a, b son elementos del universo y que $\varphi(a)$ se cumple en la estructura. Defina una simetría f tal que $f(a) = b$.]

21. Averigüe si el enunciado

$$\varphi \equiv \exists\, x[G(x) \vee F(x)] \rightarrow [\exists\, xF(x) \rightarrow \exists\, x \neg G(x)]$$

es lógicamente válido o no, y dé la prueba o contraejemplo correspondiente.

22. Encuentre un lenguaje finito $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y un conjunto finito de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-enunciados S que tenga un modelo infinito pero no uno finito.

In icuac huetzi intlan pipiltotonti, in tenanhuan itlacoyocco contlaza in quimichin, anoce inpilhuan quimilhuia: «Itlacoyocco xictlali in quimichin». Yehica quil intlacamo yuh quichihuazque, amo huel ixhuaz in itlan piltontli, zan tlancotoctic yez.

Cuando caen los dientes de los niños, sus madres los echan en el agujero del ratón, o quizá les dicen a sus hijos: «Ponlo en el agujero del ratón». «Porque dizque si así no lo hicieran, no podrían nacer los dientes de los niños, sólo serían desdentados».

Códice Florentino , libro V, capítulos 4, 5

4

Teoría de conjuntos

En este capítulo exploramos un lenguaje formal particular e importante: el lenguaje de la teoría de conjuntos. Una vez que lo conozcamos, presentamos el sistema axiomático basado en él, que sirve como fundamento a la matemática: la teoría de Zermelo-Fraenkel-axioma de elección (ZFE). Después desarrollaremos algunos resultados en el marco de esta teoría, pero no pretendemos llegar muy lejos con este formalismo; lo que si trataremos de establecer son varios resultados de la teoría de conjuntos, mayormente sin demostración, que son indispensables para realizar estimaciones de tamaños de conjuntos. Sólo formulamos los hechos, el lector interesado en su demostración habrá de referirse a un texto de Teoría de Conjuntos, por ejemplo [HrJe99], [ViRoMi00], [Le02], [Di08] o [Cu16]. De hecho, en [FeVi17] el lector puede encontrar un curso avanzado pero accesible de teoría de conjuntos, comenzando desde los axiomas y repasando los hechos básicos hasta llegar a grandes cardinales. Pero es importante recalcar que la primera parte de este capítulo desarrolla resultados del lenguaje formal de la teoría de conjuntos a partir de un cierto conjunto de axiomas, lo que se encuentra en el espíritu de lo que hemos venido haciendo. En cambio, la segunda parte, por llamarla de alguna manera, se aparta de esta filosofía y sólo recopila resultados y posiblemente técnicas útiles en lo sucesivo, situación que refleja en buena medida la realidad. Es decir, la lógica matemática y la teoría de conjuntos son disciplinas estrechamente relacionadas, una requiere de la otra para desarrollarse; a su vez, cada una plantea algunos problemas que la otra responde, dando lugar a nuevas métodos y resultados. Esta simbiosis es, quizá, única en las matemáticas y resulta aún mas relevante porque ambas disciplinas son la base de ella.

Hemos incluido varios resultados y nociones que tal vez no son estrictamente indespensables, a la vista de lo que acabamos de disertar, pero que describen claramente cuál sería el orden apropiado de aprendizaje de teoría de conjuntos.

4.1 El lenguaje y los axiomas de la teoría de conjuntos

Como ya dijimos, en este apartado nos referiremos de manera breve a un lenguaje muy especial, pero ciertamente importante, el lenguaje de la teoría de conjuntos. Este lenguaje es fundamental porque, precisamente, sirve como medio para expresar la teoría de conjuntos, en la que se basan las matemáticas. También daremos un breve vistazo a los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección, una de las versiones más socorridas de la teoría de conjuntos moderna. Es difícil sobrestimar la relevancia de esta teoría en las matemáticas actuales.

El lenguaje de la teoría de conjuntos (LTC) consiste en los siguientes símbolos.

- Símbolos lógicos
  - Variables: $v_0, v_1, \ldots, x, y, z, , \ldots$
  - Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Cuantificadores: $\forall\, , \exists$
  - Paréntesis y coma: (,)
- Símbolos no lógicos:
  - Símbolos de función: no hay.
  - Símbolos de constante: no hay.
  - Símbolos de predicado: $\{\in, =\}$, donde $\in, =$ son símbolos de 2-relación.

Las fórmulas atómicas de nuestro lenguaje son de la forma

$$v_n = v_m$$

o

$$v_n \in v_m.$$

Las fórmulas de LTC se definen recursivamente como en cualquier lenguaje formal,

- Si φ es una LTC-fórmula, también lo es $\neg\varphi$.
- Si φ, ψ son LTC-fórmulas, también lo son

$$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi.$$

- Si φ es una LTC-fórmula, así lo son

$$\forall\, v_n \varphi \qquad \text{y} \qquad \exists\, v_n \varphi.$$

Por lo recién descrito, una estructura de interpretación del lenguaje LTC consiste en un universo e interpretaciones de los predicados $\in$ y $=$, donde este último se interpreta generalmente en la forma natural, es decir, que las LTC-estructuras respeten igualdad. Los elementos del universo se conocen como conjuntos.

Puesto que en LTC disponemos de la pertenencia $\in$, se acostumbra abreviar ciertas LTC-fórmulas de la siguiente forma:

- La fórmula $\forall x(x \in z \to \varphi(x))$ se abrevia como $\forall x \in z(\varphi(x))$
- La fórmula $\exists x(x \in z \wedge \psi(x))$ se abrevia como $\exists x \in z(\psi(x))$.

Esta forma de escritura de las LTC-fórmulas se conoce como cuantificación acotada; esta noción puede parecer, en este inicio, sin mayor importancia. No obstante, las fórmulas que carecen de cuantificación o sólo tienen cuantificación acotada, desempeñan un papel destacado en la teoría de conjuntos.

En vista de que el lenguaje LTC dispone de pocos símbolos no lógicos, es de anticipar que algunas de las expresiones usuales en matemáticas se traduzcan en LTC mediante expresiones demasiado complicadas. Es por ello que se introducen continuamente abreviaciones. Presentamos algunos ejemplos.

LTC-fórmula	Abreviatura
$\forall v_n((v_n \in x) \to (v_n \in y))$ donde $v_n \neq x, y$.	$x \subseteq y$
$\forall v_n((v_n \in x) \leftrightarrow \exists v_m((v_n \in v_m) \wedge (v_m \in y)))$ donde $n \neq m$ y $v_n, v_m \neq x, y$.	$x = \bigcup y$
$\forall v_n((v_n \in x) \leftrightarrow (v_n = y))$ donde $v_n \neq x$;	$x = \{y\}$
$\forall v_n((v_n \in x) \leftrightarrow ((v_n = y) \vee (v_n = z)))$ donde $v_n \neq x$;	$x = \{y, z\}$
$\forall v_n((v_n \in x) \leftrightarrow ((v_n = \{y\}) \vee (v_n = \{y, z\})))$ donde $v_n \neq x, y, z$;	$x = (y, z)$
$x = \bigcup\{y, z\}$	$x = y \cup z$

donde hemos usado la definición usual de $(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$.

Los axiomas de ZFE

Usaremos la notación, ya mencionada en varias ocasiones, de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para identificar a $x_1, \ldots, x_n$ como las variables libres de φ. Si $a, b, c, \ldots$ son conjuntos, podemos susitituirlos en φ remplazando algunas variables libres. Por ejemplo, considere la fórmula $\varphi(x, y, z) \equiv \exists u(u \in x \vee u \in y \vee u \in z)$. Podemos tomar el conjunto a y remplazar cada aparición libre de x por a, para obtener la fórmula

$\theta(y,z) \equiv \exists u(u \in a \vee u \in y \vee u \in z)$. Podemos remplazar cada ocurrencia libre de y por el conjunto b, dando lugar a la fórmula

$$\psi(z) \equiv \exists u(u \in a \vee u \in b \vee u \in z).$$

La aparición de estos conjuntos, que no son variables o símbolos de constante, es una situación no exclusiva de teoría de conjuntos. Se dice, en este caso, que las fórmulas θ y ψ contienen parámetros (los conjuntos a y a, b, respectivamente). Un ejemplo más concreto es

$$\rho(x) \equiv \forall y(x \in y \to (x = \varnothing \vee x \notin a),$$

una fórmula con variable libre x y dos parámetros: a y el conjunto vacío.

Antes de formular los axiomas de nuestra teoría, vale la pena ejercitarse con la traducción de enunciados comunes a nuestro lenguaje LTC.

1. Existe un conjunto con al menos dos elementos.

$$\exists u, x, y(x \neq y \wedge x \in u \wedge y \in u).$$

2. Los conjuntos a, b son ajenos

$$\forall x(\neg(x \in a \wedge x \in b)).$$

También podemos expresarlo como

$$\neg\exists x(x \in a \wedge x \in b).$$

3. Existe un único conjunto que contiene a los conjuntos a, b y a ningún otro

$$\exists u(a \in u \wedge b \in u \wedge \forall z((z \neq a \wedge z \neq b) \to z \notin u) \wedge \\ \forall w((a \in w \wedge b \in w \wedge \forall z((z \neq a \wedge z \neq b) \to z \notin w) \to u = w).$$

4. En teoría de conjuntos se establece como definición de la pareja ordenada (a, b) el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Exprese que dos parejas ordenados son iguales si y sólo si coinciden coordenada a coordenada.

$$\forall u, v, w, z((u, v) = (w, z) \leftrightarrow (u = w \wedge v = z)).$$

5. El conjunto f es una función de a en b

$$\forall z(z \in f \to \exists u, v(u \in a \wedge v \in b \wedge z = (u, v) \wedge \\ \forall u, u', v, v'(((u, v) \in f \wedge (u', v') \in f \wedge u = u') \to v = v'))).$$

6. El conjunto z es el producto cartesiano de los conjuntos a, b.

$$\forall u \in z \exists v \in a \exists w \in b((v, w) \in z) \wedge \forall v \in a \forall w \in b \exists u \in z((v, w) = u).$$

Enseguida damos las expresiones en LTC de nuestros axiomas; debemos tener cuidado en los axiomas de comprensión, regularidad y remplazo pues en ellos usamos la noción de que un elemento a satisface una fórmula φ. Ya sabemos qué quiere decir esto en un modelo; en el caso de los axiomas de ZFE nos referimos al universo V de todos los conjuntos, que ni siquiera es un conjunto, por lo cual nuestras nociones previas no necesariamente se cumplen. Para no complicar más las cosas, el lector sabrá disculpar lo que llamaremos, eufemísticamente, abuso de notación.

❶ Primero nos aseguramos de que exista al menos un conjunto; esto lo afirma el axioma de *existencia (Ex)*:

$$\exists x \forall y \neg(y \in x),$$

el cual asevera que existe un conjunto sin elementos.

❷ Queremos que nuestros conjuntos estén determinados por sus elementos, lo que expresamos mediante el *axioma de extensionalidad (Ext)*:

$$\forall x \forall y(\forall w(w \in x \leftrightarrow w \in y) \leftrightarrow x = y).$$

En palabras, x y y tienen los mismos elementos si y sólo si x y y son iguales.

❸ La existencia de una pareja no necesariamente ordenada es nuestro siguiente postulado, *el axioma de par (Par)*. Dados los conjuntos a, b, se garantiza la existencia del conjunto $\{a, b\}$. Formalmente,

$$\forall x, y \exists z(\forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)).$$

❹ Es natural formar la unión de conjuntos y que ésta resulte un conjunto; con este fin se introduce el axioma de *unión* (Un):

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w)).$$

Note que $y = \bigcup x$.

❺ El siguiente axioma asegura que podemos extraer subconjuntos de un conjunto dado siempre que esta extracción esté dictada por una fórmula de nuestro lenguaje. El axioma de *comprensión* (Comp) o separación (Sep) es el siguiente. Para cada LTC-fórmula $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cierta la afirmación

$$\forall x_1 \cdots x_n \forall x_{n+1} \exists x_{n+2} \forall x_{n+3} (x_{n+3} \in x_{n+2} \leftrightarrow (x_{n+3} \in x_{n+1} \wedge \varphi(x_{n+3}, x_2, \ldots, x_n))).$$

Así, $x_{n+2} = \{x_n \in x_{n+1} : \varphi(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n)\}$. Para cada conjunto a existe un conjunto b que está conformado por los elementos de a que satisfacen φ. Aquí estamos suponiendo que x_{n+1} representa a a, x_{n+2} a b y $x_2, \ldots, x_n$ representan los parámetros de la fórmula φ, es decir, elementos fijos del universo.

❻ También es natural suponer que la familia de subconjuntos de un conjunto dado es un conjunto, como lo asegura el axioma de *potencia* (Pot):

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \to w \in x)).$$

Aquí $y = Pot(x)$.

❼ Si bien ya aseguramos que exista un conjunto (el conjunto vacío), ninguno de los axiomas confirma que exista o que podamos construir un conjunto infinito. Para ello sirve el axioma de *infinito* (Inf):

$$\exists x_1 (\overbrace{\exists x_2 (x_2 \in x_1 \wedge \forall x_3 \neg (x_3 \in x_1))}^{x_2 = \varnothing \text{ está en } x_1} \wedge \forall x_2 \exists x_3 (\underbrace{x_2 \in x_1 \to (x_3 \in x_1 \wedge \forall x_4 (x_4 \in x_3 \leftrightarrow (x_4 \in x_2 \vee x_4 = x_2)))}_{\text{Si } x_2 \in x_1 \to x_2 \cup \{x_2\} \in x_1})).$$

Existe un conjunto que contiene al conjunto vacío y es cerrado respecto a la operación sucesor $x \mapsto x \cup \{x\}$.

❽ En presencia del resto de los axiomas, el siguiente axioma se puede parafrasear diciendo que la imagen de un conjunto respecto a una función es un conjunto. Formalmente, el axioma de *remplazo* (Remp) se expresa a continuación.

$$\forall x \exists y \varphi(x, y, \vec{z}) \to \forall u \exists v \forall x \in u \exists v \in v \varphi(x, y, \vec{z}).$$

En palabras: suponga que φ depende de 2 variables x, y y tiene parámetros $\vec{z}$. Si para cada conjunto x existe un conjunto y que juntos validan φ, dado un conjunto u podemos construir un conjunto v que contiene a los testigos de φ para elementos que viven en u.

❾ No permitimos que un conjunto sea miembro de sí mismo, lo que se desprende del axioma de *regularidad* (Reg). Para cada LTC-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en la que

no aparezca x_{n+1}, la siguiente aseveración es cierta:

$$\forall x_2 \cdots \forall x_n(\exists x_{n+1}\varphi(x_{n+1},\ldots,x_n) \rightarrow$$
$$\exists x_{n+1}(\varphi(x_{n+1},x_2,\ldots,x_n) \wedge \forall x_{n+2}(x_{n+2} \in x_{n+1} \rightarrow \neg\varphi_{x_{n+1}}(x_{n+2},x_2,\ldots,x_n)).$$

Si una propiedad es cierta para al menos un conjunto, entonces podemos encontrar un testigo de la propiedad que sea el menor posible respecto a $\in$.

Note que en los axiomas de comprensión, remplazo y regularidad intervienen esquemas de fórmulas por medio de LTC-fórmulas.

⑩ Finalmente, el axioma de *elección* (AE) asegura que para todo conjunto no vacío a formado por conjuntos ajenos entre sí, existe un conjunto b que intersecta cada elemento de a en exactamente un elemento; en otras palabras, podemos elegir un elemento de cada miembro de a.

$$\forall x_1 \overbrace{\exists x_2((\forall x_3(x_3 \in x_1}^{x_1=a,x_3=a,x_2=b} \rightarrow (\overbrace{\exists x_4(x_4 \in x_3)}^{x_3\neq\varnothing}) \wedge \forall x_5 \forall x_6((x_5 \in x_1 \wedge$$
$$x_6 \in x_1 \wedge \neg(x_5 = x_6)) \rightarrow \neg\exists x_4(x_4 \in x_5 \wedge x_4 \in x_6))) \wedge$$
$$\forall x_3(x_3 \in x_1 \rightarrow \exists x_4(x_4 \in x_3 \wedge x_4 \in x_2 \wedge$$
$$\forall x_5((x_5 \in x_3 \wedge x_5 \in x_2) \rightarrow x_5 = x_4)))).$$

Rara vez se utiliza, en forma directa el axioma de elección. Suele recurrirse a él mediante alguna de sus bien conocidas equivalencias: el principio del buen orden y el lema de Zorn.

Para enunciar ambas afirmaciones requerimos cierta notación. Si a es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria en a, decimos que

- $\leq$ es reflexiva si $\forall x \in a(x \leq x)$.
- $\leq$ es transitiva si $\forall x,y,z \in a(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$.
- $\leq$ es total o lineal si $\forall x,y \in a(x = y \vee x \leq y \vee y \leq x)$.

La relación $\leq$ en a es un orden parcial, y también decimos que $(a,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (cpo) si $\leq$ es transitiva y reflexiva. Un conjunto linealmente (o totalmente) ordenado $(a,\leq)$ es un cpo en el que $\leq$ es total. Si $(a,\leq)$ es parcialmente ordenado, pueden existir $x,y \in a$ que no sean comparables respecto a $\leq$. Una cadena c en un cpo $(a,\leq)$ es un subconjunto de a que es totalmente ordenado respecto al orden que hereda c de a. Si $(a,\leq)$ es un cpo, decimos que $x \in a$ es un elemento máximo si para todo $y \in a$ $\neg(x < y)$; el elemento $z \in a$ es una cota superior de $c \subseteq a$ si $x \leq z$ para todo $x \in c$. El elemento $z \in a$ es el menor elemento de $c \subseteq a$ si $z \in c$ y para todo $y \in c$, $x \leq y$.

Sea $(a,\leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Decimos que $(a,\leq)$ está bien ordenado o que $\leq$ es un buen orden en a si se cumple que para todo subconjunto $b \subseteq a$ con

$b \neq \varnothing$, b tiene menor elemento respecto a $\leq$. En particular, a tiene menor elemento respecto a $\leq$.

El principio del buen orden (PBO) afirma que en todo conjunto a podemos encontrar una relación binaria $\leq$ tal que $(a, \leq)$ es un conjunto bien ordenado. Otra forma acostumbrada de decir esto es que todo conjunto se puede bien ordenar.

El lema de Zorn (LZ) es la siguiente afirmación: sea $(a, \leq)$ un cpo en el que toda cadena $c \subseteq a$ tiene cota superior. Entonces $(a, \leq)$ tiene un elemento máximo.

Ahora podemos presentar formulaciones equivalentes al axioma de elección.

Teorema 4.1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1. *El lema de Zorn*
2. *El principio del buen orden*
3. *El axioma de elección.*

□

A continuación mostramos varios ejemplos de la relación de consecuencia lógica $\Sigma \models \varphi$ en el reino de la teoría de conjuntos. Para comprobar esta relación entre Σ y φ, recurrimos a la definición de la misma: suponemos que $\mathfrak{A}$ es una estructura que satisface Σ y probamos que φ se cumple en $\mathfrak{A}$. Trabajamos en $\mathfrak{A}$ y mostramos que se cumple φ.

1. Sea $\Sigma = \{Ext, Ex\}$, y φ es el enunciado que afirma que el conjunto vacío $\varnothing$ es único. Expresamos φ como

$$\forall z((\forall y(y \notin z)) \to z = \varnothing). \qquad (\bigstar)$$

   Esto es, si z es cualquier conjunto que carece de elementos, entonces $z = \varnothing$. El axioma de existencia pertenece a Σ, por lo que en $\mathfrak{A}$ existe un conjunto vacío al que denotamos con $\varnothing$. De acuerdo con el axioma de extensionalidad, que se cumple en $\mathfrak{A}$, para que dos conjuntos sean iguales deben tener exactamente los mismos elementos. En forma equivalente, dos conjuntos son distintos si y sólo si existe algún conjunto que es elemento de uno pero no del otro. Para comprobar φ en $\mathfrak{A}$, tomamos un elemento z arbitrario en A que carezca de elementos, según la expresión de φ en ($\bigstar$). Si z fuera distinto de $\varnothing$, debiera existir un conjunto $a \in A$ que (pertenezca a z y no $\varnothing$) o (que pertenezca a $\varnothing$ pero no a z). Ambas opciones son imposibles en $\mathfrak{A}$, pues $\varnothing$ es vacío, lo mismo que z.

2. Sean $\Sigma = \{Comp\}$ y $\varphi \equiv \forall x, y \exists z(z = x - y)$. Aquí hemos empleado $x - y$ para el conjunto de elementos de x que no pertenecen a y. Debemos probar que en $\mathfrak{A}$ existe tal z. Tomamos $a, b \in A$ arbitrarios, debemos probar que existe $c = a - b$.

$$c = \{x \in a : x \notin b\}$$

   Según Comp, c existe y es precisamente el que buscamos.

3. Sea $\Sigma = \{Ext, Par, Un\}$ tome como φ la aseveración de que para cualesquier conjuntos a, b, c existe un único conjunto que los contiene como elementos y no tiene más elementos. Formulamos φ como

$$\forall u, v, w \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow (y = u \vee y = v \vee y = w))$$

Probemos φ en $\mathfrak{A}$, para lo cual tomamos elementos arbitrarios $a, b, c \in A$ y mostremos que existe un z que los contiene como elementos y a ningún otro. Aplicamos el axioma Par a a, para obtener el conjunto $\{a, a\}$ que por Ext es igual a $\{a\}$. Volvemos a aplicar Par, pero esta vez a b, c, para obtener el conjunto $\{b, c\}$. De acuerdo con el axioma de unión aplicado a los conjuntos $\{a\}$ y $\{b, c\}$, logramos el conjunto $\{a, b, c\}$. Note que este es el conjunto z que buscamos.

Resta confirmar la afirmación de unicidad. Supongamos que existiera otro conjunto z' que contiene única y exclusivamente a los conjuntos a, b, c. Si z' fuera diferente a z, por Ext debería existir un conjunto x en z que no pertenece a z' o viceversa, pero esto es imposible por la definición de z y z'.

4. Sea φ la afirmación de que para todo conjunto x, $\{x\}$ es un conjunto y que $x \cap \{x\} = \varnothing$. Como Σ considere $\{Ex, Ext, Reg, Par\}$. Trabajamos en $\mathfrak{A}$ y sea $a \in A$ arbitrario. Como antes, por Par sabemos que existe el conjunto $\{a\}$. Ahora examinamos el axioma de regularidad. Considere la fórmula $\psi(z, x) \equiv (z \in x)$; si tomamos un conjunto $c \in A$ no vacío, se cumple

$$\mathfrak{A} \models \exists z (z \in c).$$

Así, con $c = \{a\}$, ocurre lo anterior. De acuerdo con Reg,

$$\mathfrak{A} \models \exists z (\psi(z, c) \wedge \forall u \in z (\neg \psi(z, c))).$$

Pero, si $z \in c = \{a\}$, $z = a$, así que ningún elemento de z $(= a)$ puede ser elemento de c $(= \{a\})$, de donde se sigue que $a \cap \{a\} = \varnothing$.

Aquí es importante retomar la formulación del axioma Reg dada arriba. Note que va precedida por cuantificadores universales $\forall x_2, \cdots, \forall x_n$. Esto es lo que nos permite tomar cualquier conjunto, como el c dado, una vez que sabemos que c es un elemento del universo.

5. Continuemos con el inciso previo con el mismo $\Sigma = \{Ex, Ext, Union, Reg, Par\}$ mostremos $\Sigma \models \theta$ con las siguientes variantes de θ. Primero considere $\theta(x) \equiv \forall x \neg x \in x$. De no ser cierto θ en $\mathfrak{A}$, existíria $a \in A$ tal que $a \in a$, lo que da lugar a que $a \in a \cap \{a\}$, en oposición a lo que recién mostramos.

Ahora consideremos la existencia de «ciclos», es decir, situaciones de la forma

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \cdots \ni a_n \ni a_1$$

Nuestra afirmación es que Σ implica lógicamente la inexistencia de ciclos. Con-

sideramos como $\theta \equiv \neg(x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots \ni x_n \ni x_1)$. Si existieran ciclos en $\mathfrak{A}$, digamos

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \cdots \ni a_n \ni a_1$$

por Par, existe $u = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Con $\psi(x,z) \equiv x \in z$ como antes, ocurre que

$$\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x,u)$$

Por Reg, debería existir v tal que

$$\mathfrak{A} \models \exists v(\psi(v,u))$$

y tal que ningún elemento de w de v puede satisfacer $\psi(w,u)$. Pero esto es imposible, ya que $v \in u$, v debe ser algún a_i y siempre podemos encontrar a_j tal que $a_j \in a_i$ y $a_j \in u$. Esta contradicción corrobora la inexistencia de ciclos.

6. Probemos $\{Ext, Comp\} \models \neg\exists x \forall y(y \in x)$, esto es, en presencia de Comp no existe un conjunto que contenga a todos los conjuntos.

   Supongamos que sí existiera el conjunto de todos los conjuntos y llamémoslo V. Por Comp existe el conjunto

   $$b = \{x \in V : x \notin x\}$$

   porque $x \notin x$ es una fórmula de LTC y hemos supuesto que V es un conjunto en A. En consecuencia, b es un elemento de A y tenemos derecho a preguntarnos si $b \in b$ o $b \notin b$; alguna de las dos debe ser cierta. Si $b \in b$, por la propiedad que define a a b tendríamos $b \notin b$, una contradicción.

   De ocurrir $b \notin b$, la propiedad que define a b no puede cumplirse para b, esto es, $b \in b$, otra vez una contradicción. Esto muestra que no puede existir el conjunto de todos los conjuntos.

   De esta conclusión se deduce que para cualquier conjunto a existe un conjunto x tal que $x \notin a$.

7. Confirmemos que $\{Pot, Comp\} \models \forall x \neg(Pot(x) \subseteq x)$. Recuerde que $\subseteq$ es una abreviación que antes describimos. Supongamos que el resultado es falso. Entonces existe un conjunto x tal que $Pot(x) \subseteq x$; $Pot(x)$ es un conjunto por Pot. Sea

   $$b = \{u \in x : u \notin u\}$$

   Por Comp b es un conjunto, $b \subseteq x$, esto es, $b \in Pot(x)$. La afirmación es que $b \notin x$; si esto se cumple note que habremos encontrado un elemento de $Pot(x)$ que no pertenece a x, contrario a nuestra suposición $Pot(x) \subseteq x$. Para verificar la afirmación, suponga que $b \in x$. Entonces podemos preguntarnos si b pertenece a b o no y llegar a una contradicción, en cualquiera de los casos, lo que corrobora la afirmación.

Esta es otra demostración de que no existe el conjunto V de todos los conjuntos, pues si existiera tal V, necesariamente $Pot(V) \subseteq V$.

4.2 Algunos resultados y desarrollos en teoría de conjuntos

En el apartado previo desarrollamos algunos aspectos de la teoría de conjuntos axiomática, basándonos en la teoría ZFE. La teoría de conjuntos moderna continua así, desarrollandose a partir de ZFE. No pretendemos proseguir de esta manera, porque no habría espacio suficiente. Haremos uso de varios resultados de la teoría de números ordinales y cardinales sin demostración, pues nuestra intención es tan sólo presentar al lector resultados indispensables para la teoría de modelos. Ahora, nuestra disertación adquiere un carácter meramente descriptivo, operacional y posiblemente aburrido, pues se trata de formular definiciones y resultados casi siempre sin demostración; ocasionalmente presentamos alguna o un ejemplo para resaltar alguna figura importante.

Órdenes, conjuntos ordenados

Para aprender o recordar,

Definición 4.2.1. Una relación binaria R en un conjunto A es antisimétrica cuando para cualesquier $x, y \in A$, si $R(x,y)$ y $R(y,x)$, entonces $x = y$.

Así, la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc. es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Definición 4.2.2. Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A es un orden parcial si $\preccurlyeq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, esto es, para cualesquier $x, y, z \in A$ ocurre lo siguiente.

- $x \preccurlyeq x$.
- Si $x \preccurlyeq y$ y $y \preccurlyeq x$, entonces $x = y$.
- Si $x \preccurlyeq y$ y $y \preccurlyeq z$, entonces $x \preccurlyeq z$.

Definición 4.2.3. Sea $\preccurlyeq$ un orden parcial en A. La relación $\preccurlyeq$ es un orden total o lineal en A, cuando $\preccurlyeq$ es un orden parcial y para cualesquier $x, y \in A$ se cumple que $(x = y \vee x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$.

En este caso, diremos que $(A, \preccurlyeq)$ es un conjunto total o linealmente ordenado. Por ejemplo, $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, son linealmente ordenados. En cambio $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, no es linealmente ordenado, pues no ocurre $2|3$ y tampoco $3|2$ o $2 = 3$. Igualmente, si A es un conjunto con al menos dos elementos, entonces $\langle Pot(A), \subseteq \rangle$ no es una estructura totalmente ordenada.

Definición 4.2.4. Sea $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cualesquier $x, y \in A$ escribimos $x \prec y$ cuando $x \preccurlyeq y$ y $x \neq y$. La relación $\prec$ es el orden estricto asociado a $\preccurlyeq$.

Un orden estricto no es parcial porque no es reflexivo. Ahora, nos interesa introducir formalmente a los números naturales. Un conjunto I es inductivo, si $\varnothing \in I$ y siempre que $x \in I$, $x \cup \{x\}$ también pertenece a I. El axioma de infinito asegura la existencia de un conjunto inductivo, y con la ayuda de éste, definimos a $\omega = \mathbb{N}$ como el menor conjunto inductivo, o lo que es lo mismo, ω es la intersección de la familia de los conjuntos inductivos, que no es vacía. Formalmente procedemos como a continuación.

Teorema 4.2.5. *Existe exactamente un conjunto B con las siguientes propiedades.*

(i) $\varnothing \in B$.

(ii) *Para todo* $x \in B$, $x \cup \{x\} \in B$.

(iii) *Para cualquier subconjunto* $C \subseteq B$, *si* C *satisface (i) e (ii), es decir, si*

(a) $\varnothing \in C$.

(b) *Para todo* $x \in C$, *también* $x \cup \{x\}$ *pertenece a* C.

Entonces $C = B$.

El conjunto B del teorema se denota ω, el conjunto de todos los naturales, que también se representa como $\mathbb{N}$. En lo sucesivo, $0 = \varnothing$. Nuestro próximo resultado es el principio de inducción. Se define un orden lineal en $\omega = \mathbb{N}$: si $x, y \in \omega$, decimos que $x < y$ si $x \in y$.

Teorema 4.2.6. *Suponga que* $C \subseteq \omega$ *y se cumplen las siguientes condiciones.*

(i) $0 \in C$.

(ii) $\forall\, m \in C(m \cup \{m\} \in C)$.

Entonces $C = \omega$.

En la vida real matemática se acostumbra emplear el principio de inducción diciendo que si tenemos una propiedad P para números naturales, si el 0 satisface P, y del hecho de que n la satifaga, se sigue que $n+1$ también lo hace, podemos concluir que todos los naturales satisfacen P. En este caso, podemos conformar la colección

$$C = \{n \in \omega : P(n)\}$$

y entonces apelar al teorema 4.2.6. Pero esto sólo tiene sentido cuando C es un conjunto. Así que no cualquier «propiedad» puede entrar en juego. Como veremos esto es posible cuando P se puede expresar mediante una LTC fórmula. En la práctica, rara vez se corrobora esto, y se usan propiedades más o menos arbitrarias. Esto puede llevar a resultados erroneos, de no corroborarse que C es un conjunto. Ahora formulamos el principio de inducción en términos de LTC fórmulas.

 **Teorema 4.2.7** (Principio de inducción)**.** *Sea* $\varphi(x)$ *una LTC fórmula, posiblemente con parámetros. Suponga que,*

(a) $\varphi(0)$ *se cumple.*

(b) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ *implica* $\varphi(n+1)$.

Entonces φ *se cumple para todo natural.*

Definición 4.2.8. Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Decimos que $(X, \leq)$ es un conjunto bien ordenado o que $\leq$ bien ordena a X, cuando para cada subconjunto $A \subseteq X$ no vacío, se cumple que A tiene menor elemento respecto a $\leq$.

 **Teorema 4.2.9** (Buen orden en ω)**.** *Sea* $A \subseteq \omega$ *no vacío. Entonces* A *tiene menor elemento respecto a* $<$.

Recursión sobre los naturales es un método muy utilizado para definir objetos, funciones, etc. Una función definida recursivamente es aquella que se define en términos de valores obtenidos previamente usando la función que se está definiendo. Una función h en ω está definida recursivamente si su valor en 0 es el primero en especificarse y el resto de los valores se definen usando valores previos. De hecho, el pimer valor puede ser en cualquier número natural $a \geq 0$. La forma de determinar los valores posteriores es mediante una o varias funciones conocidas. Por ejemplo, sea $f : A \longrightarrow A$ una función y suponga que el valor inicial de una función $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$, está dado por $h(0) = a$ para alguna $a \in A$ fija, y que para lograr el siguiente valor $h(1)$ usamos el valor inicial $h(1) = f(h(0)) = f(a)$. En foma similar, para $h(2)$ debemos conocer $f(h(1))$; continuando de esta forma, se pueden determinar más y más valores de h.

Una forma más compacta de escribir a h es como sigue.

✧ $h(0) = a$.

✧ $h(n+1) = f(h(n))$.

De esta forma se calculan $h(0), h(1), \ldots, h(10^{10}), \ldots$ Pero, ¿realmente existe tal función?, es decir, ¿podemos demostrar que existe el conjunto h?

Suena razonable que exista tal función, pero no es claro como demostrar su existencia. Esto lo garantiza el teorema de recursión.

Teorema 4.2.10. *Sean A un conjunto y $a \in A$, y suponga que $f : A \longrightarrow A$. Entonces existe una única función $h : \omega \longrightarrow A$ tal que*

1. $h(0) = a$.

2. $h(n+1) = f(h(n))$ *para todo* $n \in \omega$.

A continuación establecemos una versión más general del teorema de recursión sobre ω. La generalización ocurre en dos puntos. En la versión original 4.2.10, la «receta» es una función de un conjunto A en él mismo y se apela al valor previo de la función que queremos definir. Ahora permitiremso que la función receta sea más general, y que la función a definir pueda emplear todos los valores previos. Una noción central en este contexto es la de clase definible. Como sabemos, la teoría ZFE trata exclusivamente con conjuntos, es decir, los axiomas hablan y trabajan con conjuntos. Existen colecciones grandes que no son conjuntos, llamadas clases propias, y se dispone de una forma de incorporar ciertas clases propias a nuestro trabajo.

Una clase K es definible cuando existe una LTC fórmula $\varphi(x)$, posiblemente con parámetros, tal que

$$K = \{x : \varphi(x)\},$$

es decir, K es la colección de aquellos conjuntos que satisfacen la fórmula φ. Una función clase F es aquella cuyo dominio no es un conjunto, sino una clase propia. Si este dominio es una clase definble al igual que la función misma, diremos que la función clase es definible. Así, F tiene la forma

$$y = F(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x, y, \vec{p}),$$

donde $\vec{p}$ son los parámetros, que pueden no estar presentes. En este caso, para cada conjunto x existe un conjunto y asociado por F, cuando $\varphi(x, y)$ se cumple. En este caso, y como abuso de notación, se acostumbre escribir $F : V \longrightarrow V$, notación que se debe usar con mucho cuidado.

Teorema 4.2.11 (Esquema de definición por recursión en ω)**.** *Sea $F : V \longrightarrow V$ una función clase definible. Entonces existe una única función $h : \omega \longrightarrow V$ tal que*

$$\forall\, n \in \omega (h(n) = F(h \restriction n)).$$

Note que ese teorema es realmente un esquema de teoremas. Dada una función clase definible F, obtenemos una instancia del teorema. Cada una de tales funciones da lugar a una instancia del teorema.

Ejemplo 4.2.12. Definimos que un conjunto x es transitivo cuando para cada $y \in x$ y todo $z \in y$ ocurre $z \in x$; es decir $Trans(x) \equiv \forall y \in x(y \subseteq x)$ expresa que x es transitivo. Sea x un conjunto arbitrario y suponga que u es un conjunto transitivo que contiene a x. Entonces

$$Z = \{w : Trans(w) \wedge x \subseteq w\}.$$

Z puede ser demasiado grande, es decir, puede no ser un conjunto pero sí es una clase definible, mediante la LTC fórmula $\theta(w)$ al lado derecho. Dado que $Z \neq \varnothing$, pues $u \in Z$, podemos establecer

$$C = \bigcap Z = \{w \in u : \theta(w)\}.$$

y C es un conjunto por Sep.

Afirmación 1. C es el menor conjunto transitivo que contiene a x.

Demostración de la afirmación 1. Es claro que $x \subseteq C$; probemos que C es transitivo. Sea $y \in C$ y $a \in y$. Entonces, $y \in w$ para cualquier $w \in Z$. Cada uno de estos w es transitivo, por lo que $a \in w$, de donde se sigue que $a \in C$.

Suponga que t es un conjunto transtivo que contiene a x. Entonces $t \in Z$ y $C \subseteq t$, por lo que C es el menor transitivo que contiene a x. (1)

Al conjunto C se le llama la cerradura transitva de x, y se denota como $CT(x)$.

Intuitivamente, ¿cómo se forma C? Note que si $x_1 \in x$ y $x_2 \in x_1$, x_2 debe estar en C, por lo que $\bigcup x \subseteq C$. Pero si, $x_3 \in x_2$, también x_3 debe pertenecer a C, así que $\bigcup\bigcup x = \bigcup^2 x \subseteq C$. Definimos, en general, $\bigcup^{n+1} x = \bigcup\bigcup^n x$ y $\bigcup^0 x = x$. Por tanto,

$$u = x \cup \bigcup x \cup \bigcup^2 x \cup \cdots \bigcup^n x \cup \cdots \subseteq C.$$

Afirmación 2. u es transitivo.

Demostración de la afirmación 2. Sea $y \in u$ y $z \in u$. En consecuencia, $y \in \bigcup^n x$ para alguna $n \in \omega$, de donde se sigue que $z \in \bigcup^{n+1} x \subseteq u$. (2)

Si probamos que u es un conjunto, habremos encontrado un conjunto transitivo que contiene a x, y por lo anterior, C existe, es decir, la cerradura transitiva de x existe. Pero, ¿cómo probamos que u existe? Bueno, para eso sirve el teorema de recursión.

Como un paso intermedio, podemos encontrar una función $g : \omega \longrightarrow V$ tal que $g(n) = \bigcup^n x$. Entonces, si $u = ran(g)$, lo habremos logrado. Definimos $F : V \longrightarrow V$

mediante la siguiente fórmula

$$y = F(x) \Leftrightarrow x = \varnothing \vee \neg(Fun(x) \wedge \exists\, n \in \omega(n = dom(x))) \vee \\ \vee\, y = x \cup \bigcup(ran(x)).$$

Así, F es una función clase y podemos apelar al teorema 4.2.11 para obtener una función $g : \omega \longrightarrow V$, tal que

$$g(n) = F(g \restriction n).$$

Note que $F(0) = x$, $F(1) = x \cup \bigcup x$, etc. que se puede corroborar por inducción. En general, $g(n) = x \cup \bigcup x \cdots \cup \bigcup^n x$, como se busca.

Retornemos a los conjuntos bien ordenados como preámbulo a los números ordinales. Una relación binaria R en un conjunto X está bien fundada, cuando todo subconjunto $Y \subseteq X$ no vacío tiene R-menor elemento, es decir, existe $m \in Y$ tal que para cualquier $x \in Y$, mRx.

Una relación binaria $\leq$ en X es un buen orden si $(X, \leq)$ está lineamente ordendo y la relación $\leq$ está bien fundada. Así, un conjunto linealmente ordenado $(x, \leq)$ está bien ordenado, cuando todo subconjunto $A \subseteq X$ no vacío tiene menor elemento $a \in A$, que denotaremos mín(A). De hecho, antes vimos que los naturales están bien ordenados con el orden usual.

Hecho 4.2.13. *Un conjunto linealmente ordenado $(x, \leq)$ está bien ordenado cuando y sólo cuando carece de una sucesión infinita $\leq$-decreciente estricta, es decir, no existe una sucesión $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ tal que*

$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

Demostración. Supongamos que $(x, \leq)$ está bien ordenado y que existe en él una sucesión infinita $\leq$-decreciente, para llegar a un contradicción. Digamos que tenemos la sucesión $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ tal que

$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

En tal caso, el rango de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene $\leq$-menor elemento, una contradicción.

Ahora considere un conjunto linealmente ordenado $(x, \leq)$ que carece se sucesiones infinitas $\leq$-decrecientes. De nos estar bien ordenado, existiría un subconjunto $a \subseteq x$, $a \neq \varnothing$ que no tiene $\leq$-menor elemento. Dado que a no es vacío, elegimos un elemento $x_1 \in a$. Ya que éste no puede ser el menor elemento de a, debe existir un elemento $x_2 \in a$ con $x_1 > x_2$; otra vez, x_2 no puede ser el menor elemento de a, de donde se deduce la existencia de $x_3 \in a$ con $x_1 > x_2 > x_3$; continuando de esta forma terminaríamos por construir una sucesión infinita decreciente en a y por tanto en x, algo a todas luces opuesto a nuestra hipótesis. ❐

Definición 4.2.14. Los conjuntos parcialmente ordenados $(X, \leq)$ y $(Y, \preccurlyeq)$ son (orden) isomorfos, o tienen el mismo tipode orden, cuando existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$ tal que

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a) \preccurlyeq f(b).$$

Si agrupamos o colectamos los conjuntos parcialmente ordenados, se suele elegir uno de ellos como representante de esa clase. A este representante se le llama el tipo de orden de la clase.

Si $x \in X$, y $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, el conjunto

$$O(x) = \{z \in X : z < x\},$$

es un segmento inicial de X. Sin embargo, no todo segmento inicial de un conjunto parcialmente (incluso lineamente) ordenado es de la forma $O(x)$, como lo ejemplifica el subconjunto $(-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ de $\mathbb{R}$. Por otro lado, tal contraejemplo no se puede encontrar entre conjuntos bien ordenados.

Proposición 4.2.15. *Cualquier segmento inicial propio S de un conjunto bien ordenado W es de la forma $O(\xi)$ para alguna $\xi \in W$.*

Este principio, importante por sí mismo, también nos permite probar el principio de inducción transfinita.

 **Teorema 4.2.16** (Principio de inducción transfinita)**.** *Si un conjunto A está bien ordenado, $B \subseteq A$ y para todo $x \in A$ el conjunto B satisface la condición*

$$O(x) \subset B \qquad \Rightarrow \qquad x \in B, \tag{✷}$$

entonces $B = A$.

Una forma de expresar este principio es que si el subconjunto de elementos de A que tienen una cierta propiedad menores que un elemento x, contiene a x (para cualquier x), entonces todos los elementos de A tienen la propiedad. Esto es similar al caso de inducción en los naturales.

Los siguientes resultados conducen a la aseveración importante de que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

Proposición 4.2.17. *Si $f : A \longrightarrow A$ es creciente estricta y A está bien ordenado, entonces $x \leq f(x)$ para toda $x \in A$.*

Corolario 4.2.18. *Si los conjuntos bien ordenados A, B son isomorfos, el isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es único.*

Corolario 4.2.19. *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a un segmento inicial propio suyo.*

Proposición 4.2.20. *Si A, B son conjuntos bien ordenados, ocurre exactamente una de las siguientes situaciones.*

1. *A, B son isomorfos.*

2. *A es isomorfo a un segmento inicial propio de B.*

3. *B es isomorfo a un segmento inicial popio de A.*

Para intentar extender las propiedades de los números naturales a conjuntos infinitos, debemos considerar el orden. Los naturales son un conjunto ordenado muy especial, y su función como instrumento para contar está relacionada con una propiedad particular. A saber, cuando se ha contado hasta n, aparece un número sucesor $n+1$. En otras palabras, tenemos un conjunto ordenado A con la propiedad de que en cada desmontaje $A = P + Q$, la parte final Q (cuando no es vacía) tiene un primer elemento. Aquí la notación $A = P + Q$ significa $A = P \cup Q$, donde los elementos de Q son mayores que los de P, P, Q son ajenos entre sí. Transferiremos esta propiedad a conjuntos arbitrarios.

Con los resultados previos podemos decir que dos conjuntos bien ordenados A, B se pueden comparar de acuerdo a si existe una función que respeta el orden de A en B, de B en A o son isomorfos. En cierto sentido, estos conjuntos son comparables por su «longitud», sin que realmente importe la naturaleza de sus elementos, sólo es relevante su buen orden.

Un número ordinal, o simplemento un ordinal es un conjunto transitivo cuyos elementos son conjuntos transitivos. Se acostumbra usar letras griegas minúsculas para denotar ordinales, $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \gamma$, etc. Note que si α, β, γ son ordinales y $\alpha \in \beta \in \gamma$, se sigue que $\alpha \in \gamma$ porque γ es transitivo. Esto justifica en parte que escribamos $\alpha < \beta$ en lugar de $\alpha \in \beta$. Así, el orden entre ordinales se establece como

$$\alpha < \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \in \beta.$$

También definimos $\alpha \leq \beta$ si $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$.

Proposición 4.2.21. *El conjunto vacío $\varnothing$ es un ordinal.*

Proposición 4.2.22. *Si α es un ordinal, también lo es $\alpha \cup \{\alpha\}$.*

Así, si α es un ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ también lo es y se conoce como el sucesor de α. Se denota $\alpha + 1$.

Proposición 4.2.23. *Si A es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup A$ es un ordinal.*

Proposición 4.2.24. *Todo elemento de un ordinal es un ordinal.*

Proposición 4.2.25. *La colección Or de todos los ordinales no es un conjunto.*

Recuerde que $\alpha < \beta$ si $\alpha \in \beta$. Con este orden, la clase Or se convierte en una clase linealmente ordenada, en el sentido del siguiente lema.

Lema 4.2.26. *Si α, β son ordinales, entonces $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$.*

Proposición 4.2.27. *El conjunto ω de los números naturales es un ordinal.*

Por consiguiente, existen ordinales sucesores y ordinales límite, como ω, es decir, ordinales para los que no existe un predecesor inmediato.

Dos herramientas importantes en teoría de conjuntos son las de probar empleando el principio de inducción transfinita y construir mediante el teorema de recursión transfinita. Comencemos con el principio de inducción.

Teorema 4.2.28 (El principio de inducción transfinita)**.** *Sea $\varphi(x)$ una LTC fórmula posiblemente con parámetros. Suponga que para todo ordinal α se cumple*

Entonces $\varphi(\alpha)$ es cierta para todo ordinal α.

En ocasiones, es conveniente reformular este principio como un enunciado que se asemeje más al principio de inducción en los naturales. La diferencia, quizá enorme, tal vez pequeña, es la presencia de ordinales límite, algo que no ocurre en los ordinales finitos.

Proposición 4.2.29 (Segunda versión del principio de inducción transfinita)**.** *Sea $\varphi(x)$ una LTC fórmula posiblemente con parámetros. Suponga que se cumplen las siguientes condiciones para todo ordinal α.*

(a) $\varphi(0)$ es cierta.

(b) Si $\varphi(\alpha)$ es cierta, también lo es $\varphi(\alpha+1)$.

(c) Si α es límite, y $\varphi(\beta)$ es verdadera para cada $\beta < \alpha$, se cumple $\varphi(\alpha)$.

Entonces, $\varphi(\alpha)$ es cierta para todo ordinal α.

Ahora pasamos al teorema de recursión. Una observación importante es que se puede formular para un cierto ordinal, quizá muy grande, lo que facilita el tratmiento porque entonces no enfrentamos clases propias. Pero éste no sería más que un caso particular del teorema general. No obstante, empezamos con un caso más simple

Teorema 4.2.30 (Recursión en Or)**.** *Sean $h : Or \times V \longrightarrow V$ una función clase definible y λ un ordinal. Entonces existe una única función $f : \lambda \longrightarrow V$ tal que para cada $\alpha \in \lambda$,*

$$f(\alpha) = h(\alpha, f \restriction \alpha).$$

Ahora presentamos la versión más general del teorema de recursión en ordinales.

Teorema 4.2.31 (Recursión transfinita en *Or*)**.** *Sea G una función clase definible. Entonces, existe una LTC fórmula que define una función clase F tal que $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ para todo ordinal α.*

Proposición 4.2.32 (Teorema de recursión en *Or* segunda versión)**.** *Sea G una función clase definible. Existe una LTC fórmula que define una función clase F tal que $F(z, \alpha) = G(z, F_z \restriction \alpha)$ para todo ordinal α y cada conjunto z.*

También es posible desarrollar una versión del teorema que, al calcular F, distinga los posibles casos para el ordinal α, que sea 0, sucesor o límite,

Proposición 4.2.33. *Sean G_1, G_2 y G_3 funciones clase definibles. Entonces, existe una LTC fórmula que define una función F tal que*

$$\begin{aligned} F(0) &= G_1(\varnothing) \\ F(\alpha+1) &= G_2(F(\alpha)) \qquad \text{para toda } \alpha \\ F(\alpha) &= G_3(F \restriction \alpha) \qquad \text{para todo ordinal límite } \alpha. \end{aligned}$$

Mediante el teorema de recursión en ordinales es posible demostrar el siguiente teorema, uno de los resultados fundamentales en la teoría de conjuntos bien ordenados, y en general de la teoría de conjuntos.

Teorema 4.2.34. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal. El ordinal y el isomorfismo son únicos.*

Pasemos ahora a los números cardinales y, en general, a la cardinalidad de conjuntos. Es probable que el lector haya encontrado situaciones en las que no basta distinguir entre conjuntos finitos e infinitos sino que se requiere decidir, entre conjuntos infinitos, cuál tiene más elementos. Como vimos, un conjunto A es numerable cuando es equipotente al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, mientras que es finito si existe una biyección con algún número natural n (es decir, A es equipotente con n).

Recuerde que dos conjuntos son equipotentes o tienen la misma cardinalidad, cuando existe una biyección entre ellos. Si A es equipotente con $\mathbb{N}$, $|A| = |\mathbb{N}|$, se acostumbra escribir como sigue.

El alfabeto hebreo

Definición 4.2.35. Si el conjunto A es numerable, escribiremos

$$|A| = \aleph_0$$

donde $\aleph_0$ se lee álef cero, álef es la primera letra del alfabeto hebreo. A $\aleph_0$ se le llama el primer cardinal infinito. El lector puede considerarlo como una abreviatura; si aparece $|B| = \aleph_0$ simplemente estamos diciendo que B es un conjunto numerable. En particular, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, y tenemos las siguientes abreviaturas, tomando en cuenta lo que sabemos sobre conjuntos finitos y numerables, donde la desigualdad compara tamaños.

- $\aleph_0 > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Si $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$, entonces $|A \cup B| = \aleph_0$, $|A \times B| = \aleph_0$.
- Si $|A| = \aleph_0$, entonces $|A^{<\omega}| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Definición 4.2.36. Si A, B son conjuntos, escibimos $|A| \leq |B|$ cuando existe una función $f : A \longrightarrow B$ inyectiva.

Ejemplo 4.2.37. Sea P el conjunto de todos los números primos y E el conjunto de todos los pares. Sea $f : P \longrightarrow E$, $f(p) = 2p$. Esta función es inyectiva. Así que, $|P| \leq |E|$, es decir, hay al menos tantos pares como primos.

Ejemplo 4.2.38. Recuerde que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denota al conjunto de todas las parejas (m, n) de números naturales. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = (n, 1) \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces f es inyectiva, por lo que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Pero también lo opuesto es cierto. Considere $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(m, n) = 2^m \cdot 3^n$.

Definición 4.2.39. Sean A, B conjuntos. Decimos que A y B tienen la misma cardinalidad, $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva entre A y B. Escribimos $|A| < |B|$ si $|A| \leq |B|$ y $|A| \neq |B|$.

Se puede demostrar, incluso sin suponer el axioma de elección, el siguiente resultado.

 **Teorema 4.2.40** (Cantor, Bernstein, Schröder). *Sean A, B conjuntos. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Véase [Hi05, Theorem 6.4.4, pág. 511]. □

Para probar que dos conjuntos, A y B, tienen el mismo tamaño debemos encontrar una función inyectiva de A a B y una función inyectiva de B a A.

Ejemplo 4.2.41. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales y E el de los pares.
$f(x) = 2x$ es una biyección entre $\mathbb{N}$ y E, por lo que $|\mathbb{N}| = |E|$.

Ejemplo 4.2.42. Sean $\mathbb{R}$ los reales e $I = (0,1)$. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow I$, $f(x) = \frac{2}{\pi} Arctanx$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ e I, así que $|\mathbb{R}| = |I|$.

Ya vimos que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, por lo que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Proposición 4.2.43. *La unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n un conjunto numerable. Sea U la unión de todos estos conjuntos. Cada A_n se puede numerar $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Sea $f(m,n)$ el m-ésimo elemento del n-ésimo conjunto A_n. Esto define una biyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow U$. Concluimos que U tiene el mismo número de elementos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Puesto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, U también lo es. □

Definición 4.2.44. Un conjunto A es innumerable cuando no es finito o numerable. Es decir, no existe una biyección entre A y algún número natural o con $\mathbb{N}$.

Otra forma de escribir que un conjunto A es innumerable es

$$|A| > \aleph_0.$$

Un ejemplo de conjunto innumerable lo constituye el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Recuerde que el conjunto de subconjuntos de A se llama *potencia de A*.

$$Pot(A) = \{z : z \subseteq A\}.$$

 **Teorema 4.2.45** (Cantor). *Para cualquier conjunto A, $|A| < |Pot(A)|$.*

El argumento de esta prueba ya lo hemos usado varias veces. Se conoce como el primer argumento diagonal de Cantor.

Demostración. Para probar que $|A| < |Pot(A)|$ debemos mostrar que

$$|A| \leq |Pot(A)| \text{ y } |A| \neq |Pot(A)|.$$

Considere $f : A \longrightarrow Pot(A)$, $f(a) = \{a\}$ para toda $a \in A$; f es inyectiva, por lo que $|A| \leq |Pot(A)|$.

Para cerciorarnos de que $|A| \neq |Pot(A)|$, debemos mostrar que no existe una biyección entre A y $Pot(A)$. Sea g una función inyectiva arbitraria de A en $Pot(A)$. Probemos que g no puede ser sobre. Suponga que sí lo es. Para cada elemento $a \in A$, a está en $g(a)$ o $a \notin g(a)$. Sea X el conjunto de $a \in A$ para los cuales $a \notin g(a)$

$$X = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como $X \in Pot(A)$ y g es sobre, existe $b \in A$ tal que $X = g(b)$. En consecuencia,

$$b \in g(b) \Leftrightarrow b \in X \Leftrightarrow b \notin g(b),$$

pues para que $b \in X$, $b \notin g(b)$, contradicción que muestra que g no puede ser sobre. ∎

Corolario 4.2.46. *Un conjunto numerable tiene una cantidad innumerable de subconjuntos. En particular, existe una cantidad innumerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$.*

∎

 **Teorema 4.2.47** (Cantor). *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es innumerable. Esto es, $|\mathbb{R}| > \aleph_0$.*

La demostración emplea el segundo argumento diagonal de Cantor.

Demostración. Supongamos lo contrario, que $\mathbb{R}$ es numerable. Entonces, con mayor razón, $(0,1)$ es numerable, por lo que podemos enumerar todos los elementos de $(0,1)$. Cada $x \in (0,1)$ tiene la forma

$$0.x_1x_2\ldots \qquad \text{donde } x_i \in \{0,\ldots,9\}.$$

Así que podemos hacer una lista de todos los números en $(0,1)$ como sigue:

$$\begin{array}{l} 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\ 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\ 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\ 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots \\ \vdots \end{array}$$

de tal manera que cada número $b \in (0,1)$ debe aparecer en esta lista. Si logramos construir un $b \in (0,1)$ que no aparezca en esta lista, habremos llegado a una contradicción, lo que demostraría que nuestra suposición de que $\mathbb{R}$ es numerable es incorrecta. Construyamos b de la siguiente forma,

$$b = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$$

donde

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} \neq 1, \\ 0 & \text{si } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Como b difiere de cada elemento de la lista, b no puede estar en ella. □

Definición 4.2.48. Un número cardinal, o un cardinal, es un ordinal κ tal que para ningún $\beta \in \kappa$ existe una función $f : \kappa \longrightarrow \beta$ inyectiva.

Proposición 4.2.49. *Cualquier número natural es un cardinal. El ordinal ω es un cardinal y todo cardinal infinito es un ordinal límite. El ordinal ω es el primer cardinal infinito.*

Así, los elementos de ω son los cardinales finitos. La colección de todos los ordinales es tan grande que no puede ser un conjunto, se dice que es una clase propia. Lo mismo ocurre con la colección de los cardinales. No obstante, podemos introducir un orden $<$ entre ordinales, y por tanto entre cardinales. De hecho, el orden $<$ es muy sencillo. En efecto, si α, β son ordinales, establecemos

$$\alpha < \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \in \beta.$$

Existen muchos ordinales infinitos que tienen el mismo tamaño (cardinalidad) que ω. En cambio, sólo el cardinal $\aleph_0$ tienen esa cardinalidad. En presencia del AE, todo conjunto se puede bien ordenar, y como vimos, para todo conjunto A existe un ordinal f y una biyección $f : \alpha \longrightarrow A$. Como consecuencia, mediante la biyección f podemos dotar a A de un buen orden, transfiriendo el buen orden de α a A. Entre ordinales y cardinales infinitos, no todo ordinal es un cardinal.

Proposición 4.2.50. *Sea α un ordinal. Entonces, α es un cardinal si y sólo si para ningún $\gamma \in \alpha$ existe una biyección $f : \alpha \longrightarrow \gamma$.*

Dado que en presencia del AE, cualquier conjunto A se puede bien ordenar, la siguiente definición tiene sentido para cualquier conjunto A.

Definición 4.2.51. Suponga que A es un cbo, entonces $|A|$ es el menor ordinal κ para el cual existe una función $f : A \longrightarrow \kappa$ inyectiva.

Lema 4.2.52. *Sea A un cbo y $|A| = \kappa$. Entonces κ es un cardinal.*

Lema 4.2.53. *Si κ es un cardinal, $|\kappa| = \kappa$.*

Lema 4.2.54. *Si $\kappa < \theta$ y existe $f : \kappa \longrightarrow \theta$ sobre, entonces θ no es un cardinal.*

Como antes mencionamos, la clase de los ordinales, y por tanto, de los cardinales está bien ordenada. También dijimos que $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito. Según el teorema de Cantor, existe un cardinal estrictamente mayor que $\aleph_0$, pues $Pot(\aleph_0) > \aleph_0$. Este cardinal $Pot(\aleph_0)$ se denota $2^{\aleph_0}$ y se llama el continuo; también se denota $\mathfrak{c}$. De hecho, dado cualquier cardinal κ infinito, el teorema de Cantor asegura la existencia de un cardinal λ mayor que κ. Esto nos permite definir la sucesión de los números álef.

Definición 4.2.55. El cardinal $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito. El cardinal $\aleph_1$ es el menor cardinal mayor que $\aleph_0$. En general, el cardinal $\aleph_{n+1}$ es el menor cardinal mayor que $\aleph_n$.

Se sigue que $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots < \aleph_n < \cdots$ para cada $n \in N$. No hay obstáculo alguno para continuar con esta construcción.

Definición 4.2.56. El cardinal $\aleph_\omega$ es el menor cardinal mayor que cada $\aleph_n$, $n \in \mathbb{N}$. En general, dado cualquier álef $\aleph_\alpha$, $\aleph_{\alpha+1}$ es el menor cardinal mayor que $\aleph_\alpha$. Si ya hemos definido los álef $\aleph_\beta$ para cada ordinal $\beta < \alpha$, donde α es un ordinal límite, entonces el álef $\aleph_\alpha$ es el menor cardinal mayor que cada $\aleph_\beta$, $\beta < \alpha$.

Tenemos la sucesión de los álef,

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \cdots \aleph_{\omega+\omega} < \cdots$$

Vale la pena mencionar que entre dos cardinales infinitos viven una infinidad de ordinales que no son cardinales. Por ejemplo, entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ existe $\aleph_1$ ordinales todos ellos de cardinalidad $\aleph_0$, es decir, numerables. En general, entre $\aleph_\alpha$ y $\aleph_{\alpha+1}$ existen $\aleph_{\alpha+1}$ ordinales todos de cardinalidad $\aleph_\alpha$.

Como dijimos, todo cardinal es a la vez ordinal. Cuando queremos tratar un álef $\aleph_\alpha$ como ordinal, se denota ω_α. Esto concierne, en particular, a las operaciones aritméticas entre ordinales y cardinales.

Se define la suma, producto y exponenciación entre ordinales. También podemos definir adición, multiplicación y exponenciación entre cardinales. Lamentablemente, sumar, multiplicar y efectuar exponenciación entre cardinales no es lo mismo que entre ordinales.

Se demuestra que cualquier cardinal es un álef. Así como definimos ordinal sucesor y límite, podemos hacer algo correspondiente para cardinales. Un álef $\aleph_\alpha$ es sucesor, cuando α es un ordinal sucesor; es un cardinal límite, si α es un ordinal límite. Así, $\aleph_1$ es un cardinal sucesor, mientras que $\aleph_\omega$ es un cardinal límite. Al cardinal $\aleph_0$ se le considera un cardinal límite.

No es frecuente que se use la notación de álef para denotar cardinales, sino, como ya dijimos, se emplean letras mínusculas griegas. En tal caso, si κ es un cardinal, el sucesor, como cardinal, de κ se denota κ^+. En general, κ^{++} es el sucesor del sucesor de κ, o el segundo sucesor de κ; con $\kappa^{(n)}$ denotamos el n-ésimo sucesor de κ.

La suma y el producto de dos cardinales es una operación inesperadamente sencilla. Si κ, λ son cardinales infinitos, definimos su suma de la siguiente manera. Buscamos

un conjunto A que tenga tamaño κ y un conjunto B de cardinalidad λ, tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $\kappa + \lambda = |A \cup B|$. El producto $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$. Se sigue que la suma y el producto son conmutativos y asociativos, el producto se distribuye sobre la suma. La exponenciación κ^λ se define como la cardinalidad del conjuntos de funciones de B a A, que se denota A^B. Afortunadamente, como dijimos, la suma y el producto de cardinales infinitos es muy sencilla. Si κ, λ son cardinales infinitos,

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}.$$

Si A, B son conjuntos, mediante A^B denotamos al conjunto de funciones $f : B \longrightarrow A$, así que $A^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ en A. Como todo conjunto, A^B tiene una cardinalidad y es

$$\left|A^B\right| = |A|^{|B|}.$$

Por ejemplo

$$\left|A^{\mathbb{N}}\right| = |A|^{\aleph_0}.$$

Un caso especialmente importante es cuando A es el número dos, es decir, $A = \{0, 1\}$. Se sigue que

$$2^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}.$$

Proposición 4.2.57. *Sea A un conjunto. Entonces,*

$$\left|2^A\right| = |Pot(A)|.$$

En particular,

$$|Pot(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Este cardinal $2^{\aleph_0}$ se conoce también como la cardinalidad del continuo y suele representarse como $\mathfrak{c}$.

Como mencionamos, todo cardinal es un álef, por lo que $2^{\aleph_0}$ es un álef. Lamentablemente, nuestro sistema axiomático no nos permite decir qué álef es $2^{\aleph_0}$. Lo que podemos decir es (teorema de Cantor)

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Por consiguiente,

$$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1.$$

También se pueden excluir algunos otros álef como posibles valores de la cardinalidad del continuo, pero formular esto correctamente es imposible en este punto. Una pregunta inmediata es, en vista de que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ¿qué podemos decir del tamaño de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{C}$? Recién establecimos que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, por lo que la cardinalidad de $\mathbb{C}$ es igual a la de $\mathbb{R}$. Antes vimos que el conjunto de los números reales es innumerable, pero ¿qué tan grande es? ¿qué álef le asociamos?

Proposición 4.2.58.

$$|Pot(\mathbb{N})| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|.$$

Por tanto, por lo antes dicho, en ZFE podemos asociarle un álef al tamaño de $\mathbb{R}$, no sabemos cuál, pero sí sabemos que este tamaño es $2^{\aleph_0}$. A continuación presentamos dos cuestiones fundamentales en la teoría de conjuntos. Hemos encontrado subconjuntos numerables de los números reales, subconjuntos propios del mismo tamaño que los reales (por ejemplo, lo irracionales, el intervalo $(0,1)$, etc.). Lo que no hemos presentado es, y de hecho es imposible hacerlo o probar que no se puede hacer en el sistema ZFE, un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga una tamaño intermedio, es decir que sea más grande que los naturales, pero menor que los reales. Se puede probar que la existencia de tal subconjunto es imposible de mostrar o refutar en la teoría ZFE. Suponer que existe o afirmar que no existe son enunciados que **son independientes de ZFE**. Esta noción de independencia es algo que sí podemos formalizar con nuestros conocimientos de lógica matemática. Recuerde que si Σ es un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados y φ es un $\mathcal{L}$-enunciado, la relación

$$\Sigma \models \varphi,$$

significa que siempre que $\mathfrak{A}$ sea un $\mathcal{L}$-modelo en el que se cumplen los enunciados en Σ, también lo hace φ. Por tanto, para probar

$$\Sigma \not\models \varphi,$$

basta encontrar una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ en la que se cumplan los enunciados en Σ, pero no φ. Si Σ es nuestra teoría ZFE y se cumple que

$$\Sigma \not\models \varphi \qquad \text{y} \qquad \Sigma \not\models \neg\varphi,$$

decimos que φ es un enunciado independiente de ZFE. En la práctica, probar que un enunciado ψ es independiente de ZFE se logra construyendo un modelo de ZFE en el que se cumpla ψ y otro modelo de ZFE en el que sea válida la negación de ψ. Esto es muy sencillo de formular, pero no así, de hacerlo realidad. Construir tales modelos de ZFE es, generalmente, una tarea sumamente complicada y suele recurrise a dos métodos principalmente. A saber, el método de forcing y al de modelos internos. Pero aún hay un problema mayor. De acuerdo con el segundo teorema de incompletud de Gödel, es imposible construir, en el marco de ZFE, un modelo de ZFE;[1] esto se expresa diciendo que ZFE no puede probar su propia consistencia. En consecuencia, en ZFE no sabemos si ZFE es consistente. Para averiguarlo tendríamos que usar una teoría más poderosa, pero de ésta tampoco tendríamos la certeza de su consistencia. No queda otra que suponer que ZFE es consistente y entonces construir los modelos antes mencionados. Esto es, lo que en realidad tenemos son pruebas de consistencia

[1] De hecho, el teorema de Gödel es más general. Afirma que una teoría que contenga a la aritmética de Peano, no puede probar su propia consistencia. Para una demostración de este teorema más general véase [FeVi13] y para el caso de ZFE, [FeVi17]. La aritmética de Peano se trata más adelante en este libro.

relativa; por ejemplo,

$$Con(ZFE) \rightarrow Con(ZFE + \varphi)$$

expresa que suponer que existe un modelo de ZFE nos permite construir un modelo de ZFE en el que se cumple φ. En esta situación, decimos que φ es consistente relativo con ZFE. Si φ y $\neg\varphi$ son consistentes relativos con ZFE, decimos que φ es independiente de ZFE.

Si regresamos al asunto del tamaño de los número reales, realmente la pregunta es ¿existe un conjunto Z que sea innumerable pero tenga tamaño estrictamente menor que $2^{\aleph_0}$? Por consiguiente, uno puede añadir que sí existe o que no existe tal Z a ZFE y crear una nueva teoría. Suponer que no existe tal conjunto se conoce como **la hipótesis del continuo (HC)**. Una nueva teoría surge como $\boldsymbol{ZFE + HC}$. Aceptar la existencia de tal Z, da lugar a la teoría $\boldsymbol{ZFE + \neg HC}$. Se demuestra que la HC es independiente de ZFE, lo mismo, por supuesto, que su negación.

En forma más general, si tenemos un conjunto A, Cantor demostró que

$$|A| < |Pot(A)|$$

Por lo tanto, tenemos derecho a establecer una pregunta correspondiente: ¿existe un conjunto B tal que $|A| < |B| < |Pot(A)|$? Suponer que dado cualquier A, nunca existe el conjunto B se conoce como la **Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC)**. Como antes, de esta hipótesis generamos dos nuevos sistemas axiomáticos (recuerde que hemos estado tarabajando en ZFE): $\boldsymbol{ZFE + HGC}$ y $\boldsymbol{ZFE + \neg HGC}$. Por cierto, en la literatura se escriben estas teorías como $\boldsymbol{ZFC + CH}, \boldsymbol{ZFC + GCH}$, etc. También es cierto que la HGC es independiente de ZFE.

La mayor parte de las matemáticas transcurren en ZFE, aunque la mayoría de los matemáticos no lo sepa; pero sí existe una parte importante, involucrando las más diversas áreas de las matemáticas, que dependen de trabajar en extensiones de ZFE, es decir, de añadir axiomas nuevos a nuestro aparato base.

HC No existe un conjunto B tal que

$$\aleph_0 < |B| < 2^{\aleph_0}$$

HGC Dado un conjunto A, no existe un conjunto B tal que

$$|A| < |B| < |Pot(A)|$$

En términos de álef, podemos expresar la HC y la HGC como sigue. La hipótesis

famosa es la Hipótesis del Continuo (HC)

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Su negación $\neg HC$ es entonces,

$$2^{\aleph_0} > \aleph_1.$$

La HGC se formula como,

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1},$$

para todo ordinal α.

4.3 Estimaciones de tamaño

Ahora trataremos el tamaño (cardinalidad) de las estructuras, que desempeña un papel relevante en la teoría de modelos. En particular, al hablar de modelos es importante distinguir entre infinitos. De hecho, este es un primer criterio para descartar que dos modelos sean isomorfos, noción fundamental en teoría de modelos. Requerimos algunas estimaciones de cardinalidades.

Proposición 4.3.1. *Si el lenguaje $\mathcal{L}$ es numerable, así lo es el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-fórmulas.*

Demostración. Definiremos una función inyectiva F del conjunto $Fml(\mathcal{L})$ de todas las $\mathcal{L}$-fórmulas en $\mathbb{N}$.

Como $\mathcal{L}$ es numerable, podemos asignar un número natural diferente a cada símbolo de $\mathcal{L}$. Por ejemplo:

Símbolo	Código
x_i	2^i
$\wedge$	3
$\vee$	5
$\rightarrow$	7
$\leftrightarrow$	11
$\neg$	13
$\exists$	17
$\forall$	19
R_i	23^i
f_j	27^j
c_k	29^k

Entonces a cada $\mathcal{L}$-fórmula se asocia una sucesión finita de números naturales. Suponga que una $\mathcal{L}$-fórmula dada φ tiene asociada la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Definimos $f(\varphi)$ como el producto

$$2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n},$$

donde cada p_n denota el n-ésimo número primo. Recuerde que hay una cantidad infinita de primos y que cada número natural se puede descomponer en forma única como producto de primos, así que f es inyectiva del conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas $Fml(\mathcal{L})$ a los naturales, por lo que $|Fml(\mathcal{L})| \leq |\mathbb{N}|$. Por otro lado, para cada variable v, $v = v$ es una $\mathcal{L}$-fórmula, así que tenemos al menos tantas $\mathcal{L}$-fórmulas como variables en $\mathcal{L}$. Estas últimas existen en una cantidad numerable, así que $|\mathbb{N}| \leq |Fml(\mathcal{L})|$, y de estas dos desigualdades obtenemos la igualdad buscada, de acuerdo con el teorema 4.2.40. ☐

Con esta definición podemos obtener algunos códigos de fórmulas:

- Si $\varphi \equiv R_6(x_3, x_4)$, $f(\varphi) = 23^6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$
- $\psi \equiv R_1(x_1, x_2) \wedge R_2(x_3, x_4) \to R_6(x_1, x_4)$, $f(\psi) = 23^1 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 21^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 23^6 \cdot 2^1 \cdot 2^4$

Recuerde que un subconjunto $A \subseteq M$ del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{M}$ es definible si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que:

$$A = \{x \in M : \mathfrak{M} \vDash \varphi(x)\}.$$

Considere el lenguaje de la aritmética $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \ldots\}$ aumentado con otros símbolos, incluso una cantidad numerable de ellos. Puesto que tenemos a lo más una cantidad numerable de $\mathcal{L}$-fórmulas, existen a lo sumo una cantidad numerable de conjuntos definibles de naturales, con o sin parámetros, porque cada fórmula puede llevar a lo sumo una cantidad finita de ellos, y tenemos una cantidad numerable de subconjuntos finitos de naturales. Ya que disponemos de una cantidad innumerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, es claro que la mayoría de ellos no son definibles. Esto es relevante en el uso de inducción en la aritmética de Peano. Según el esquema de inducción, los conjuntos involucrados deben ser definibles. No cualquier subconjunto de naturales es suceptible de aparecer en el esquema de inducción.

Podemos extender la proposición 4.3.1 a lenguaje innumerables. Por supuesto, la cardinalidad del conjunto de fórmulas ya no será numerable, pero seguira siendo la del lenguaje. Requerimos algunos preparativos. Si B es un conjunto, mediante $[B]^{<\aleph_0}$ denotamos al conjunto de subconjuntos finitos de B. Recuerde que B^n significa el producto cartesiano de $B \times \cdots \times B$ con n factores.

Lema 4.3.2. *Si B es un conjunto de cardinalidad infinita κ, entonces $|B^n| = \kappa$.*

Demostración. Como antes mencionamos, $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ para cardinales infinitos. Mediante inducción finita obtenemos $\kappa \times \cdots \times \kappa = \kappa$ para n factores, $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$|B \times \cdots \times B| = \kappa^n = \kappa,$$

para n factores B. ☐

Lema 4.3.3. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces*

$$\left|[\kappa]^{<\aleph_0}\right| = \kappa.$$

Demostración. Sea $z \in [\kappa]^{<\aleph_0}$. En consecuencia, z tiene la forma $\{k_1, \ldots, k_n\}$. Para cada uno de estos z, podemos generar una n-ada $(z_1, \ldots, z_n) \in \kappa^n$. Mediante este razonamiento construimos una función $b : [\kappa]^{<\aleph_0} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \kappa^n$. De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|[\kappa]^{<\aleph_0}\right| &\leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \kappa^n\right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\kappa^n| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \kappa^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \kappa \\
&= \aleph_0 \cdot \kappa \\
&= \kappa.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $|[\kappa]^{<\aleph_0}| \leq \kappa$. Por otro lado, si $\xi \in \kappa$, es claro que $\{\xi\}$ es un subconjunto finito de κ, por lo que tenemos al menos κ subconjuntos finitos de κ, esto es, $\kappa \leq |[\kappa]^{<\aleph_0}|$. Del teorema 4.2.40 deducimos que $|[\kappa]^{<\aleph_0}| = \kappa$. ☐

Lema 4.3.4. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad infinita κ. Entonces el conjunto $Tm(\mathcal{L})$ de términos de $\mathcal{L}$ tiene tamaño a lo sumo κ.*

Demostración. Recuerde que un $\mathcal{L}$-término puede ser una variable (tenemos una cantidad numerable de ellas), un símbolo de constante (disponemos de a lo sumo κ de ellos) o de un símbolo de n-función f (tenemos a lo sumo κ de ellos) aplicado a $\mathcal{L}$-términos. Considere la siguiente construcción recursiva de los $\mathcal{L}$-términos.

$$\begin{aligned}
Tm_v &= \{x : x \text{ es una variable}\} \\
Tm_c &= Tm_0 \cup \{c : c \text{ es un símbolo de constante}\} \\
Tm_0 &= Tm_v \cup Tm_c \\
Tm_{n+1} &= Tm_n \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : t_i \in Tm_n, f \text{ símbolo de } n\text{-función}\} \qquad Tm = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Tm_n
\end{aligned}$$

Por lo antes dicho, Tm_0 tiene tamaño a lo sumo κ. Sabemos que $[Tm_0]^{<\omega}$ tiene tamaño a lo sumo κ (lema 4.3.3). Tm_1 tiene entonces cardinalidad a lo sumo κ, pues disponemos de a lo más κ elementos en Tm_0 a quienes aplicarle algún símbolo de n-función, de los cuales existen a lo sumo κ. Este mismo razonamiento aplica para confirmar que cada Tm_n ($n \in \mathbb{N}$) tiene cardinalidad a lo sumo κ. En virtud de la definición de Tm (última ecuación) se deduce que este conjunto tiene tamaño a lo sumo $\aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$, pues κ es infinito ($\kappa \geq \aleph_0$). ☐

Ahora el resultado prometido sobre lenguajes innumerables.

Lema 4.3.5. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad infinita κ. Entonces la cardinalidad del conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es κ.*

Demostración. Como cualquier lenguaje de primer orden, $\mathcal{L}$ involucra una cantidad finita de conectivos lógicos, dos cuantificadores, paréntesis y una cantidad enumerable de variables. Además, conjuntos de símbolos de función, relación y constante.

Cualquier fórmula φ consiste en una cantidad finita de símbolos de $\mathcal{L}$, por lo que $|Fml(\mathcal{L})| \leq |[\mathcal{L}]^{<\aleph_0}| = \kappa$. Por otro lado, cada variable v, cada símbolo de constante c o de n-función f o de m-relación R dan lugar a una fórmula, digamos $R(v,\dots,v)$, $f(v,\dots,v) = v$, $c = v$, $v = v$. Por consiguiente $|\{\text{Constantes, Relaciones, Funciones,Variables}\}| \leq \kappa$. Por lo tanto,

$$|Fml(\mathcal{L})| = \kappa.$$

□

Otra estimación que será de utilidad posteriormente está contenida en el siguiente resultado.

Proposición 4.3.6. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de cardinalidad infinita κ y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura de tamaño λ. Si $Fml_A(\mathcal{L})$ es el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas que pueden o no llevar como parámetros elementos de A, el universo de $\mathfrak{A}$, entonces*

$$|Fml_A(\mathcal{L})| = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}.$$

Demostración. Recuerde que la cardinalidad del conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, sin considerar parámetros, es κ. Si $\varphi(v_1,\dots,v_l)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula, podemos generar una fórmula con parámetros sustituyendo alguna o todas las variables libres de φ por elementos $a \in A$. Esta sustitución involucra subconjuntos finitos de A, pues la $\mathcal{L}$-fórmula contiene a lo sumo una cantidad finita de variables libres. Se sigue que para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ podemos generar a lo sumo $|[A]^{<\aleph_0}|$ fórmulas con parámetros en A. Dado que tenemos κ de tales fórmulas y $|[A]^{<\aleph_0}| = \lambda$, concluimos que $|Fml_A(\mathcal{L})| \leq \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

Por otro lado, dada cualquier $\mathcal{L}$-fórmula φ con o sin variables libres, siempre podemos formar la $\mathcal{L}$-fórmula $\psi \equiv \varphi \wedge v = v$ que tiene al menos a v como variable libre. Esta $\mathcal{L}$-fórmula ψ da lugar a la fórmula con parámetros $\varphi \wedge a = a$ para cada $a \in A$, de donde se sigue que $\text{máx}\{\kappa, \lambda\} = \kappa \cdot \lambda \leq |Fml_A(\mathcal{L})|$. Apelamos al teorema 4.2.40 para afirmar

$$|Fml_A(\mathcal{L})| = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}.$$

□

4.4 Más sobre aritmética cardinal

Arriba mencionamos de pasada algunos de los siguientes hechos. Tratemos de formalizarlos un poco más, para aquellos lectores interesados o necesitados de ellos.

Definición 4.4.1. Sean κ, λ cardinales. Definimos

$$\kappa + \lambda = |\{(\alpha, 0) : \alpha \in \kappa\} \cup \{(\beta, 1) : \beta \in \lambda\}|.$$

La idea es tomar copias ajenas $\kappa \times \{0\}$ y $\lambda \times \{1\}$ de κ y λ y contar la cantidad de elementos en su unión.

Podemos definir la suma de cardinales κ, λ apelando a conjuntos A, B tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$ y establecer que

$$\kappa + \lambda = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|.$$

La definición de suma cardinal se puede extender a sumas infinitas, de donde se deducen algunos hechos elementales de sumas que son casos particulares de resultados más generales, por lo que es mejor introducir de una vez la definición general de suma. Sea $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ una sucesión de cardinales. Definimos,

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\}) \right|.$$

Proposición 4.4.2. *Si $\langle \kappa_i : i \in 2 \rangle$ es una familia de cardinales (esto es, una función con dominio 2 tal que κ_0 y κ_1 son cardinales), entonces*

$$\sum_{i \in 2} \kappa_i = \kappa_0 + \kappa_1.$$

Sean κ, λ cardinales, definimos el producto de ellos como

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|.$$

Otra vez, este producto difiere del produto ordinal, y habrá ocasiones en que debamos decir explícitamente de qué producto se trata. En efecto, en el sentido ordinal $\omega \cdot 2 > \omega \cdot 1 = \omega$ en cambio en el sentido cardinal $\omega \cdot \omega = \omega$, pues

$$\omega \cdot 2 = |\omega \times 2| = |\omega \times \{0, 1\}| = |\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}| = \aleph_0 = \omega.$$

Proposición 4.4.3. *Sean $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ cardinales.*

1. $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
2. $\lambda \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.
3. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

4. $\kappa \cdot 0 = 0$.
5. $\kappa \cdot 1 = \kappa$.
6. $\kappa \cdot 2 = \kappa + \kappa$.
7. $\sum_{i \in I} \kappa = \kappa \cdot |I|$.
8. *Si* $\kappa \leq \mu$ *y* $\lambda \leq \nu$, *entonces* $\kappa \cdot \lambda \leq \mu \cdot \nu$.

Sean κ, λ cardinales. Definimos

$$\kappa^{\lambda} = \left| {}^{\lambda}\kappa \right|,$$

donde ${}^{\lambda}\kappa$ representa al conjunto de funciones de λ en κ.

Proposición 4.4.4. *Sean* κ, μ, λ *cardinales.*

1. $\kappa^0 = 1$.
2. *Si* $\kappa \neq 0$, *entonces* $0^{\kappa} = 0$.
3. *Si* $\kappa^1 = \kappa$.
4. $1^{\kappa} = \kappa$.
5. $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$.
6. $\kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} = \kappa^{\lambda+\mu}$.
7. $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$
8. $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
9. *Si* $\lambda \leq \lambda \neq 0$ *y* $\mu \leq \nu$, *entonces* $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\nu}$.

Revisemos algunas relaciones entre los cardinales finitos, $\aleph_0$ y el continuo.

Proposición 4.4.5.

(a) $n + 2^{\aleph_0} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \qquad n \in \mathbb{N}$.

(b) $n \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(c) $(2^{\aleph_0})^n = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \qquad n \in \mathbb{N} - 2$.

Note que probamos $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ lo que es tanto como decir que $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Proposición 4.4.6.

1. *Para toda* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$.

2. $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$.

3. *El conjunto de sucesiones de naturales tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$.

4. *El conjunto de sucesiones de reales tiene tamaño* $2^{\aleph_0}$.

Lema 4.4.7.

1. *El conjunto de los números irracionales tiene tamaño* $2^{\aleph_0}$.

2. *El conjunto de subconjuntos infinitos de naturales tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$.

3. *El conjunto de funciones inyectivas de* $\mathbb{N}$ *a* $\mathbb{N}$ *tiene cardinalidad* $2^{\aleph_0}$.

Hemos dejado de lado un poco la suma y producto cardinal, pero ahora retomamos estas operaciones con gran decisión y resueltos a mostrar que la suma y producto cardinales son operaciones triviales, pero muy necesarias. El resultado que condensa esta afirmación es el teorema de Hessenberg.

 **Teorema 4.4.8** (Hessenberg). *Sea* λ *un cardinal infinito. Entonces,* $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.

Corolario 4.4.9. *Para cualesquier cardinales infinitos* $\lambda \leq \kappa$, *ocurre*

$$\lambda + \kappa = \kappa.$$

Además,

$$n + \lambda = \lambda,$$

para cualquier $n < \omega$.

Proposición 4.4.10. *Si* λ, κ *son cardinales con* $\lambda \geq \omega$ *y* $2 \leq \kappa \leq \lambda$, *entonces* $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. *En particular,* $\lambda^\lambda = 2^\lambda$ *para todo cardinal infinito* λ.

Si X es un conjunto y κ es un cardinal, definimos los siguientes conjuntos,

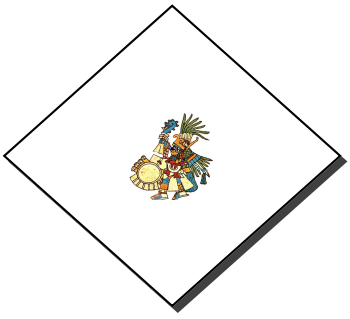
$$\begin{aligned} [X]^{\leq\kappa} &= \{A \in Pot(X) : |A| \leq \kappa\} \\ [X]^{<\kappa} &= \{A \in Pot(\kappa) : |A| < \kappa\} \\ [X]^{\kappa} &= \{A \in Pot(X) : |A| = \kappa\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.4.11. *Para todo conjunto infinito* X *y cualquier cardinal distino de cero* $\kappa \leq |X|$ *se cumple,*

$$|[X]^\kappa| = \left|[X]^{\leq\kappa}\right| = |X|^\kappa.$$

Y luego los dos comenzaron a hacer penitencia y sacrificios y ofrendas durante cuatro días. Todo lo que ofrecía Tecuciztécatl era precioso. En lugar de ramos daba plumas ricas de quetzal y bolas de oro en lugar de bolas de heno; no ofrendaba espinas de maguey, sino unas hechas de piedras preciosas; y en vez de espinas ensangrentadas, daba espinas de coral colorado, y copal muy bueno. En cambio, Nanauatzin ofrecía cañas verdes y bolas de heno y espinas de maguey cubiertas con su propia sangre, y en lugar de copal brindaba la costra de sus llagas.

A la medianoche del día señalado para crear el nuevo sol, los dioses se reunieron alrededor de un gran fuego que habían mantenido durante cuatro días y al que Tecuciztécatl y Nanauatzin deberían arrojarse para transformarse en astros luminosos. Colocados todos frente al fuego le dijeron a Tecuciztécatl: «Entra tú primero al fuego»y éste intentó hacerlo, pero como el fuego era grande y muy vivo, tuvo miedo y se volvió atrás. Cuatro veces intentó Tecuciztécatl arrojarse al fuego y cuatro veces desistió. Entonces los dioses dijeron a Nanauatzin: «Prueba tú». Y éste de inmediato cerró los ojos y se echó al fuego y comenzó a arder. Al ver esto Tecuciztécatl cobró valor y se arrojó también al fuego.



4.5 Ejercicios

1. Suponga que A_1, A_2, B_1 y B_2 son conjuntos con $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$. Corrobore las siguientes afirmaciones.
   a) Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, entonces $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$.
   b) $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.
   c) $|Suc(A_1)| = |Suc(A_2)|$.
2. Confirme que la unión de un conjunto finito y uno numerable es numerable, y su producto cartesiano es numerable, cuando $A \neq \varnothing$.
3. Suponga que $|A| = \aleph_0$, muestre que $|[A]^n| = \aleph_0$, donde $[A]^n = \{S \subseteq A : |S| = n\}$, para $n \in \mathbb{N}$.
4. Una sucesión $(s_n : n \in \omega)$ es finalmente constante, cuando existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ tales que $s_n = s$ para toda $n \geq n_0$. Demuestre que el conjunto de sucesiones finalmente constantes de números naturales es numerable.
5. Una sucesión $(s_n : n \in \mathbb{N})$ de naturales es finalmente periódica, si existen $n_0, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, $s_{n+p} = s_n$. Cerciórese de que el conjunto de sucesiones periódicas de naturales es numerable.
6. Una sucesión $(s_n : n \in \mathbb{N})$ de naturales es una progresión aritmética, cuando existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+1} = s_n + d$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Confirme que el conjunto de progresiones aritméticas es numerable.
7. Para cualquier $s \in Suc(\mathbb{N} - \{0\})$, con $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, sea $f(s) = p_0^{s_0} \cdots p_n^{s_n}$, donde p_i es el i-ésimo primo. Demuestre que f es inyectiva y use esto para mostrar que $|Suc(\mathbb{N})| = \aleph_0$.
8. Sean A, B conjuntos numerables. Pruebe que existe una biyección $f : A \longrightarrow B$.
9. Sean A un conjunto y $f : \omega \longrightarrow A$ sobre. Constate que A es a lo más numerable.
10. Sea A un conjunto no vacío a lo sumo numerable. Corrobore que existe $f : \omega \longrightarrow A$ sobre.
11. Suponga que $f : A \longrightarrow B$ es sobre y que A es numerable. Verifique que B es a lo sumo numerable.

12. Sean A un conjunto infinito y $\mathcal{C} = Pot(A) - \{\varnothing\}$. Por AE existe $g : \mathcal{C} \longrightarrow A$ tal que $g(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{C}$. Existe una función $h : \omega \longrightarrow A$ tal que

$$h(n) = g(A - h[n]) \qquad \forall\, n < \omega.$$

Cerciórese de que $h : \omega \longrightarrow A$ es inyectiva.

13. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de polinomios en x con coeficientes enteros, esto es,

$$\mathbb{Z}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k : k \in \omega \wedge \forall\, i \in k + 1 (a_i \in \mathbb{Z})\}.$$

Defina una aplicación $f : \mathbb{Z}^{<\omega} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x]$. Muestre que $\mathbb{Z}[x]$ es numerable.

14. Un número real a es algebraico si $p(a) = 0$ para algún $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Para $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, sea $R_{p(x)} = \{a \in \mathbb{R} : p(a) = 0\}$. Como un polinomio en $\mathbb{Z}[x]$ tiene a lo sumo una cantidad finita de raíces reales, cada $R_{p(x)}$ es finito. Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de números algebraicos, esto es,

$$\mathbb{A} = \bigcup_{p(x) \in \mathbb{Z}[x]} R_{p(x)}.$$

Confirme que $\mathbb{A}$ es numerable.

15. Sea $\prec$ el orden lexicográfico de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y sea $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones finalmente periódicas, pero no finalmente constantes. Corrobore que $(P, \prec)$ es un clo denso, numerable y sin extremos.

16. Sean A un conjunto innumerable y B un conjunto no vacío. Constate que $A \times B$ es innumerable.

17. Sean A, B conjuntos con A innumerable y B numerable. Confirme que $A - B$ es innumerable.

18. Sean A un conjunto innumerable y B un conjunto no vacío. Constate que $A \times B$ es innumerable.

19. Sean A, B conjuntos con A innumerable y B numerable. Confirme que $A - B$ es innumerable.

20. Pruebe que el conjunto de irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es innumerable.

21. Suponga que A es innumerable y $A \subseteq B$. Cerciórese de que B es innumerable.

22. Mediante el método diagonal, muestre que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es innumerable.

23. Suponga que $|A| = |B|$. Pruebe que $|Pot(A)| = |Pot(B)|$.

24. Si A es innumerable, constate que $Pot(A)$ es innumerable.

25. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}$. Constate que $|A| = |B|$.

26. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Corrobore que $|\mathbb{R}| < |\mathcal{F}|$.

27. Constate que si $|A| \leq |B|$, entonces $|Pot(A)| \leq |Pot(B)|$.

28. Si $f : A \longrightarrow B$, B numerable y $f^{-1}[\{b\}]$ es a lo sumo numerable para cada $b \in B$, cerciórese de que A es a lo sumo numerable.

29. Confirme que si A es un subconjunto finito de un conjunto infinito A, entonces A y $A - F$ son equipotentes.

30. Para cada $f \in 2^\omega$, sea $A_f = \{f \restriction m : m \in \omega\}$. Pruebe que si f, g son elementos distintos de 2^ω, entonces $A_f \cap A_g$ es finito.

31. Cerciórese de que $|\mathbb{R}| \leq |Pot(\mathbb{Q})|$. [Sugerencia: $i : \mathbb{R} \longrightarrow Pot(\mathbb{Q})$, $i(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.]

32. Confirme que $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. [Sugerencia: note que

$$|Pot(\omega) \times Pot(\omega)| = |Pot(\omega)|.$$

33. Sea

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} 2^n.$$

Pruebe que $2^{<\omega}$ es numerable.

34. Pruebe que para $n > 0$,

$$\begin{aligned} n \cdot 2^{2^{\aleph_0}} &= \aleph_0 \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} \\ &= 2^{2^{\aleph_0}} \cdot 2^{2^{\aleph_0}} = \left(2^{2^{\aleph_0}}\right)^n \\ &= \left(2^{2^{\aleph_0}}\right)^{\aleph_0} = \left(2^{2^{\aleph_0}}\right)^{2^{\aleph_0}} \\ &= 2^{2^{\aleph_0}}. \end{aligned}$$

35. Construya una biyección de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. [Sugerencia: Si $a, b \in [0,1]$ tienen expansión decimal $0.a_1a_2a_3\ldots$ y $0.b_1b_2b_3\ldots$ aplique la pareja ordenada (a,b) en $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots \in [0,1]$. Ajuste lo necesario para evitar que sucesiones donde el dígito 9 aparece siempre a partir de una cierta posición.]

36. Demuestre que $\kappa^n = \kappa$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

37. Confirme que

$$|[\kappa]^n| = \kappa,$$

para toda $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Recuerde que

$$[\kappa]^n = \{X \subseteq \kappa : |X| = n\}.$$

38. Verifique que
$$\left|[\kappa]^{<\omega}\right| = \kappa,$$
Recuerde que $[\kappa]^{<\omega}$ es el conjunto de sucesiones finitas de elementos de κ.

39. Si X es la imagen de λ respecto a una función f, constate que $|X| \leq \lambda$.

40. Si $X \subseteq \lambda$ y $|X| < \lambda$, cerciórese de que $|\lambda - X| = \lambda$.

41. Establezca la cardinalidad de los siguientes conjunto, en general y después en presencia de la HGC.

    a) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

    b) $\{x \in \mathbb{C} : x$ es raíz de un polinomio con coeficientes racionales$\}$.

    c) $\{f : Fun(f) \wedge dom(f) = \mathbb{R} \wedge ran(f) \subseteq \mathbb{R}\}$.

    d) $\{f : Fun(f) \wedge dom(f) = \mathbb{Q} \wedge ran(f) \subseteq \mathbb{R}\}$.

    e) $\{f : Fun(f) \wedge dom(f) = \mathbb{R} \wedge ran(f) \subseteq \mathbb{Q}\}$.

42. Sea $<$ el orden natural en $\mathbb{R}$. Para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, $(A, <)$ significa A equipado con el orden que hereda de $\mathbb{R}$.

    a) Pruebe que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, si $(A, <)$ es un cbo, entonces $to(A, <) < \omega_1$.

    b) Muestre que para todo $\alpha < \omega_1$, existe $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ tal que $to(A_\alpha, <) = \alpha$.

43. Sean $f : B \longrightarrow B$ una función y $X \subseteq B$. Confirme que existe $A \subseteq B$ tal que $X \subseteq A$, $f[A] \subseteq A$ y
$$|A| \leq |X| \cdot \aleph_0.$$

44. (a) Sea F el conjunto de todas las cadenas finitas de letras del alfabeto español. Muestre que F es numerable.

    (b) Sea I el conjunto de todas las cadenas infinitas de letras del alfabeto español. Muestre que I es innumerable.

45. Describa una fórmula que exprese que dados los conjuntos a, b, c, d, existe el conjunto $\{a, b, c, d\}$.

46. Dados los conjuntos a, b, encuentre una fórmula que exprese que existe el producto cartesiano $a \times b$.

47. Exhiba una fórmula que diga que no existe un conjunto que contiene a cualquier conjunto como elemento.

48. Una relación binaria en A es un subconjunto de $A \times A$. Escriba una fórmula que afirme R es una relación binaria en A.

49. En general, exprese que R es una n-relación en A.

50. Una función de A en B es una relación binaria en $A \times B$ tal que cada $(a, b) \in f$ cumple con $a \in A, b \in B$ y si tenemos dos parejas en f con la misma primera coordenada, la segunda coordenada debe ser la misma. Exprese que f es una función de A en B, suponiendo que A, B son conjuntos dados.

51. Si f es una función de x en y, dé una fórmula que exprese: (i) f es sobre; (ii) f es inyectiva; (iii) f es una biyección; (iv) existe una función inversa para f.

52. Si x es un conjunto, la función $s(x) = x \cup \{x\}$ se llama la función sucesor de x. Dé una fórmula para definir esta función.

53. Demuestre $\Sigma \models \varphi$, donde Σ consiste en Comp exclusivamente y φ es el enunciado para cualesquier conjuntos a, b existe c tal que $x \in c$ si y sólo si ($x \in a$ y $x \notin b$) o ($x \in b$ y $x \notin a$).

54. En presencia de Par y Ext muestre que para cualesquier conjuntos a, b, a', b', $(a, b) = (a', b')$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$. Recuerde la definición dada de (a, b) como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

55. En presencia de Pot, Comp, Un y Ext confirme las siguientes afirmaciones para cualesquier conjuntos a, b, a', b'.

    a) $(a, b) \in Pot(Pot(\{a, b\}))$ y $a, b \in \bigcup(a, b)$.

    b) Si $(a, b) = (b, a)$, entonces $a = b$.

    c) Existe $a \times b$. [Sugerencia:

    $$a \times b = \{(x, y) \in Pot(Pot(a \cup b)) : x \in a, y \in b\}.]$$

56. Recuerde que una relación binaria R en un conjunto a es un subconjunto de $a \times a$. Trabaje con todo ZFE, aunque por supuesto se requieren menos axiomas, para probar lo siguiente.

    a) Sea $A = \bigcup(\bigcup R)$. Entonces $(x, y) \in R$ implica $x, y \in A$.

    b) Definimos $dom(R)$ como el conjunto de primeras coordenadas de elementos en R, y $ran(R)$ el conjunto de segundas coordenadas. Con el inciso previo, pruebe que existe $dom(R)$ y $ran(R)$.

    c) Según se definió R^{-1} y $R \circ S$ en secciones previas, confirme que ambas existen.

57. Mencione los axiomas necesarios y demuestre lo siguiente.

a) Para cualesquier conjuntos a, b, $\{a, b\}$ existe. Suponga que $a \in b$. Muestre que $a \cap \{a, b\} = \varnothing$ y concluya que $b \notin a$.

b) Para cualesquier a, b, c conjuntos con $a \in b$ y $b \in c$, muestre que que $c \notin a$.

58. Considere un lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}\}$ y una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura $\mathfrak{A}$. Decimos que un subconjunto $B \subseteq A$ es cerrado si la interpretación de cualquier símbolo de constante en $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{A}$ vive en B y si dados $b_1, \ldots, b_n \in B$ y cualquier símbolo de n-función $f \in \mathcal{F}$, ocurre que $f(\vec{b}) \in B$. Sea $C \subseteq A$; la cerradura de C, denotada $\overline{C}$, es el menor conjunto cerrado contenido en A y que contiene a C.

a) Cericiórese de que

$$\overline{C} = \bigcap \{B \subseteq A : C \subseteq B,\ B \text{ es cerrado}\}.$$

(Note que A es cerrado y $C \subseteq A$).

b) Suponga que $\mathcal{F}$ consiste exclusivamente en un símbolo f de 1-función y que éste se interpreta en $\mathbb{R}$ como la función sucesor, $f(x) = x + 1$. Sea $C = \{0\}$, confirme que $\overline{C} = \mathbb{N}$.

c) Sea $C = \{0, 1\}$; verifique que el conjunto $\mathbb{Z}$ es la cerradura de C en $\mathbb{R}$ para $\mathcal{F} = \{+, -, \cdot\}$.

d) Muestre que $\mathbb{Q}$ es la cerradura de $\varnothing$ en $\mathbb{R}$ para $\mathcal{F} = \{+, -, \cdot, /\}$, $C = \{0, 1\}$.

e) Sea $\mathfrak{A}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura y $C \subseteq A$. Defina la siguiente sucesión por recursión,

$$C_0 = C \cup \{c^A : c \in \mathcal{C}\}$$
$$C_{i+1} = C_i \cup \{f(\vec{b}) : \vec{b} \in C_i, f \text{ es un símbolo de } n\text{-función}\}$$

Confirme que $\overline{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.

f) Suponga que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es un lenguaje de cardinalidad κ, donde $|\mathcal{F} \cup \mathcal{C}| = \kappa$, $\mathfrak{A}$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$-estructura de cardinalidad μ, $\kappa \leq \mu$ y que $C \subseteq A$ tiene cardinalidad λ, $\lambda < \mu$. Estime la cardinalidad de $\overline{C}$.

5

Lógica modal de primer orden

Después le preguntó al joven el señor Santiago: «Cuántos años crees que tardaste en llegar hasta el cielo?» El joven le contestó: «Un año». Él sintió que había sido poco tiempo. Pero le informó el señor Santiago: «Tardaste treinta años». Le arrancó uno de sus cabellos y le dijo: «Mira uno de tus cabellos; ya estás anciano».

Relato popoluca

En este capítulo haremos una exposición de los principales sistemas de la lógica modal cuantificada. En la introducción explicaremos en qué sentido la lógica modal representa una ampliación muy importante de la lógica clásica. En segundo término presentaremos los más conocidos sistemas de lógica modal proposicional. Más adelante examinaremos varios sistemas axiomáticos y diversas semánticas para la lógica modal cuantificada. Es conveniente que el lector revise el capítulo 1, pues nos referiremos continuamente a él y a las figuras, construcciones, etc, que ahí se describen.

5.1 Contextos intensionales

Los sistemas formales que hasta ahora hemos presentado nos permiten definir precisamente la noción de «consecuencia lógica» para importantes sectores de nuestro lenguaje. Así, si queremos saber si un determinado argumento expresado en lenguaje coloquial es correcto o no, todo lo que tenemos que hacer es parafrasearlo en un lenguaje formal para el cálculo de predicados (CP, en lo sucesivo) y determinar con los métodos que hasta ahora hemos estudiado si, en el argumento formal resultante de esta traducción, la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. De ser el caso, diremos que el argumento original era correcto, o, mejor, que era correcto relativamente a la paráfrasis propuesta. Claramente un argumento correcto podría ser formalizado de tal manera que el resultado de esta traducción fuese un argumento inválido. Por ejemplo, un silogismo en modo *Barbara* pudiera ser simbolizado como $P, Q \models R$. Esta

formalización no es en sí inadecuada, pero oculta las estructura lógica del argumento que lo hace válido. Por eso, la corrección del argumento en el lenguaje ordinario es relativa a la paráfrasis del mismo en un lenguaje formal. Sin embargo, los métodos que hemos visto solo se aplican a ciertos fragmentos de nuestro lenguaje ordinario que podemos calificar de extensionales. ¿Qué significa esto? Antes de definirlo, veamos algunos ejemplos. Sabemos que $Fab \models \exists x Fax$. Sin embargo, el argumento,

> Juanito espera a Santa Claus
> Por lo tanto, hay alguien a quien Juanito espera

no puede ser correcto, simplemente poque tiene premisa verdadera y conclusión falsa. Tomemos otro ejemplo. Sabemos que $Fa, a = b \models Fb$ pero en el siguiente argumento algo está mal.

> Es necesario que el presidente actual de E.U.A. haya ganado las últimas elecciones.
> Donald Trump= el actual presidente de E.U.A.
> Por lo tanto, es necesario que Donald Trump haya ganado las últimas elecciones.

Las premisas son verdaderas, pero la conclusión parece falsa. En ambos casos, asumimos que los argumentos tienen la forma lógica que aparece en su simbolización, pero entonces tendrían que ser correctos. ¿Cómo es que entonces nos llevan de premisas verdaderas a conclusiones falsas? ¿No es esa su forma lógica? El problema es que hemos abandonado el territorio seguro de los contextos extensionales y nos aventuramos en una dimensión desconocida. Trataremos de caracterizar qué significa el término «extensional».

Suele llamarse «descripción definida» a una expresión que está formada por un término general o predicado (por ejemplo, «caballo», «asesino serial», «primera astronauta mexicana») precedida por el artículo determinado «el» o «la», según el género de que se trate. Diremos que un objeto o individuo X es la referecia de la descripción definida «el F» (o «la F») si es el único con la propiedad F. Asimismo, diremos que dicha descripción definida se refiere a X. Así, Napoleón Bonaparte es la referencia de la descripción definida «El primer emperador de los franceses» e Hildegarda de Bingen lo es de la descripción definida «la más importante compositora musical benedictina de la Edad Media». Nada es referencia de las descripciones «el caballo blanco» o de «el mayor número primo». También son consideradas descripciones definidas otras expresiones que pueden ser parafraseadas por medio de descripciones definidas. Por ejemplo, si hablando de Juan, un individuo concreto, decimos «su perro», podemos considerar a esta expresión como una descripción definida pues, en ese contexto, es sinónima de «el perro de Juan». Consideremos ahora el enunciado Barack Obama nació en Honolulu que es verdadero. ¿Podría el enunciado «El cuadragésimo presidente de los Estados Unidos nació en Honolulu» ser falso? Dado que el cuadragésimo presidente de esa nación es Barack Obama, la segunda oración tiene que ser verdadera. En general, si colocamos cualquier descripción definida que se refiere a Barack

Obama en el espacio marcado por los puntos suspensivos siguientes, . . . nació en Honolulu el resultado será un enunciado verdadero. Esto es obvio, Barack Obama tiene las cualidades que tiene no importa de qué manera nos refiramos a él. Como lo dice Shakespeare:

> Julieta: ¿Qué hay en un nombre? Lo que llamamos rosa olería tan dulcemente con cualquier otro nombre: igual Romeo, aunque no se llamase Romeo, conservaría la amada perfección que tiene sin ese título.

Sin embargo, hay ciertos contextos lingüísticos en que esta propiedad no parecer ser válida. Por ejemplo, es fácil imaginar que las premisas siguientes son verdaderas,

> Johny sabe que Obama nació en Honolulú.
> Obama es el cuadragésimo presidente de los Estados Unidos

mientras la conclusión

> Johny sabe que el cuadragésimo presidente de los Estados Unidos nació en Honolulú

es falsa. Normalmente, si tenemos en un enunciado verdadero un término singular (nombre o descripción definida) y cambiamos este por otro término singular que denote lo mismo, el enunciado resultante sigue siendo verdadero, como vimos con el primer enunciado sobre Obama. Sin embargo, al colocarlo en el contexto «Johny sabe que» esa propiedad se perdió. ¿Cómo puede ser eso? El principio enunciado por Julieta es evidente. Ni las cosas ni los individuos cambian sus propiedades porque nos refiramos a ellos con otros nombres suyos o con una descripción definida que ellos satisfacen. ¿Es que al poner el enunciado en el alcance de ese contexto dejamos de hablar de ellos? No parece, puesto que seguimos usando sus nombres. Este problema tiene gran importancia dentro de la filosofía y es crucial para el desarrollo de nuestro tema, por varias razones que iremos exponiendo. La primera tiene que ver con la formalización de un enunciado precedido con una locución del tipo «Johny sabe que». En el ejemplo anterior podemos suponer que la descripción definida «el cuadragésimo presidente de los Estados Unidos» debe ser representada en el lenguaje formal por una constante individual. ¿Es eso correcto? Si tal es el caso, aún queda la cuestión de si en ambas ocurrencias en el argumento anterior debemos emplear la misma constante. Veremos que no es fácil responder a estas preguntas.

Otra manera de plantear la cuestión sería la siguiente. Recordemos el concepto de satisfacción que Tarski introdujo en la semántica. Para lo que ahora nos interesa podemos ilustrarlo con los siguientes ejemplos. George Boole satisface el predicado «lógico inglés» y Francisco de Quevedo satisface el predicado «escritor del Siglo de Oro español». Podemos decir que un individuo b satisface el predicado «Fx» si el enunciado «Fa» es verdadero, donde «a» es cualquier nombre del individuo b. Pero este concepto esencial de la semántica parece inaplicable si el valor de verdad del enunciado resultante depende del nombre que elegimos para denotar a b.

Intentemos ahora delimitar mejor este fenómeno antes de analizarlo e investigar las repercusiones que tiene para la lógica modal. De manera más general, llamemos «extensión de un término singular», si es un nombre, al objeto que designa, y si es una descripción definida, al objeto o individuo que es su referencia (olvidemos por el momento nombres no designativos como «Pegaso»y descripciones definidas que no tienen referencia como «el mexicano que fue a Venus»). Así, la extensión del nombre «Barack Obama» es el Sr. Obama y la de la descripción definida «El asesino de César» es Bruto. Llamaremos «extensión de un predicado» al conjunto de objetos de los que es verdadero (así la extensión de «tigre» es el conjunto de todos los tigres). Entre los predicados contamos aquellos que Frege llamó términos conceptuales (de primer orden) y que se forman eliminando de un enunciado (como «Obama nació en Honolulú», un nombre («Obama») para obtener una expresión incompleta («... nació en Honolulú») que es verdadera de los objetos o individuos que la satisfacen (los honoluluenses). Por último, sea la extensión de un enunciado su valor de verdad. La extensión de «la nieve es blanca» es el valor verdadero mientras que la extensión de «Marco Polo llegó a América» es el valor falso. Llamemos «término» a un término singular, a un predicado o a un enunciado.

Combinemos la definición anterior de estilo fregeano con otra debida a W. V. Quine. Una ocurrencia de un término t al interior de otro E es puramente referencial si la substitución de ese término (en esa ocurrencia) por cualquier otro de la misma extensión no altera la extensión del término al interior del cual hicimos la substitución (es decir de E). Podemos esquematizar así la situación. Denotemos con $Ext(k)$ a la extensión del término k. Sea $E(t)$ un término al interior del cual hay una ocurrencia o figuración de otro término, t. Si la ocurrencia de t en $E(t)$ es puramente referencial y s es un término de la misma categoría semántica que t tal que $Ext(s) = Ext(t)$, entonces $Ext(E(t)) = Ext(E(s))$, donde $E(s)$ es el resultado de substituir en $E(t)$, t en dicha ocurrencia por s. Como antes vimos, «Obama» tiene una ocurrencia puramente referencial en «Obama nació en Honolulú». De manera un tanto vaga llamaremos «contexto» a una expresión que tiene un espacio vacío y que al rellenarse con un término forma otro. Por ejemplo, «Luis sabe que...». Si en el espacio vacío ponenos un enunciado obtendremos otro. De la misma forma un par de comillas latinas que se cierran y se abren permiten pasar de un enunciado a su nombre. La expresión «El agua es H_2O y...» es también un contexto que forma un enunciado a partir de otro.

Ahora veamos lo que es un contexto referencialmente opaco. Quine lo formula así: «Un contexto es referencialmente opaco si, al poner un término E en ese contexto, podemos causar que una ocurrencia puramente referencial de otro término al interior de E ya no sea puramente referencial en el contexto completo». Dicho de otra manera, supongamos que t tiene un ocurrencia puramente referencial en el término $E(t)$. Sea $C...$ un contexto. Supongamos que en $CE(t)$ la ocurrencia susodicha de t ya no es puramente referencial. Entonces $C...$ es un contexto (referencialmente) opaco.

En los ejemplos que vimos antes, el término E era un enunciado y t un término singular o general. De esa manera determinamos que el contexto «Johny sabe que...» es referencialmente opaco, pues «Obama» ocurre referencialmente en «Obama nació

en Honolulú», e irreferencialmente en «Johny sabe que Obama nació en Honolulú».

De la misma manera, el término general «tiene corazón» posee la misma extensión que «tiene riñones», pero «necesariamente todo animal que tiene corazón tiene corazón» es verdadero, mientras que «necesariamente todo animal que tiene corazón tiene riñones» es, al parecer, falso. El contexto «necesariamente...» es referencialmente opaco.

Un lenguaje es intensional si contiene al menos un contexto referencialmente opaco. Si no, diremos que es extensional.

El lenguaje del cálculo de enunciados es extensional pues en él siempre podemos sustituir dentro de un enunciado E, una letra (proposicional) por otra con el mismo valor de verdad y el resultado tendrá el mismo valor de verdad que E. Pongamos por caso que el enunciado
$(P \to (Q \wedge \neg R))$
es verdadero (en cierta interpretación I). Supongamos que
$(S \vee T)$
tiene en I el mismo valor de verdad que P; entonces tenemos la certeza de que
$((S \vee T) \to (Q \wedge \neg R))$
es verdadero en I. Esto se debe a que el lenguaje del cálculo de proposiciones es extensional. Podemos expresarlo con el siguiente esquema

$$\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma(\alpha) \leftrightarrow \gamma(\beta)$$

donde α y β representan enunciados, $\gamma(\alpha)$ una fórmula en que α figura y $\gamma(\beta)$ el resultado de subsituir α por β en todas sus ocurrencias en $\gamma(\alpha)$. Lo mismo ocurre con el cálculo de predicados, pues si en una interpretación I, «$a = b$» y «$C(x/a)$» son verdaderos, entonces seguramente también lo es «$C(x/b)$» donde $C(x)$ es una fórmula en que la variable x figura libre. Y si en una interpretación I los predicados «$A(x)$» y «$B(x)$» son satisfechos por los mismos elementos del dominio (es decir, si en I el enunciado «$(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x))$» es verdadero), entonces siempre podemos, en un enunciado verdadero, reemplazar uno de esos predicados por el otro y obtener un enunciado verdadero.

En los siguientes ejemplos se muestran otras locuciones opacas. En ellos, la sustitución de un término singular por otro con la misma denotación o referencia produce un cambio de valor de verdad (nos lleva de un enunciado verdadero a uno falso).

1. «Cervantes» empieza con la tercera letra del alfabeto.
   Cervantes=El manco de Lepanto.
   «El manco de Lepanto» empieza con la tercera letra del alfabeto.

2. Luis busca al decano de la facultad.
   El decano de la facultad es la persona que dejó su auto mal estacionado.
   Luis busca a la persona que dejó su auto mal estacionado.

3. El gobierno sabe que el jefe de los narcos redactó la manta.
   El jefe de los narcos es director de la policía.

El gobierno sabe que el director de la policía redactó la manta.

La definición provista abarca casos en que la expresión que rellena los puntos suspensivos del contexto no es un enunciado. Veamos un ejemplo de otro tipo. El contexto «La propiedad...» es referencialmente opaca. La extensión del predicado «ser cordado» es idéntica a la del predicado «ser renado», mientras que la propiedad de ser cordado≠la propiedad de ser renado.

La definición que dimos tiene un defecto no siempre visible. La idea de que un término que figura, por ejemplo, en un enunciado, sea puramente referencial es que lo único que importa de ese término para la verdad del enunciado es su extensión. Si decimos que el cuadragésimo presidente de los Estados Unidos nació en Honolulú, todo lo que necesitamos saber para determinar la verdad de esa aserción, en lo que a su sujeto se refiere, es quién fue el cuadragésimo presidente de ese país. Por ello, es indiferente cómo nos refiramos a él. La sustitución de esa descripción definida por cualquier término que denote a Barack Obama no cambia el valor de verdad del enunciado. La cuestión es si también a la inversa, si el pasar ese test de substitutividad es suficiente para que la ocurrencia de ese término solo contribuya a la verdad del enunciado por su denotación. Hay casos en que esto no sucede. Si el lenguaje en cuestión tiene un vocabulario muy limitado, puede ocurrir que las sustituciones de un término por cualquier otro con la misma denotación en un enunciado no alteren el valor de verdad de este, pero sea una mera casualidad. Algo similar ocurre con la definición de «consecuencia lógica » en términos substitucionales. Sin embargo, no es necesario adentrarnos más en este problema.

La cuestión es ¿qué forma lógica tienen los enunciados engarzados en un contexto referencialmente opaco? Por lo pronto, ¿cómo deben ser formalizados los términos singulares que aparecen en ellos? Lo veremos enseguida para los casos de la necesidad y la posibilidad.

5.2 Las tribulaciones de la lógica modal cuantificada

En este capítulo daremos una introducción a la lógica modal predicativa. Nuestro propósito será modelar los argumentos del lenguaje ordinario en que aparecen las locuciones «necesariamente» y «posiblemente», y otras similares, con el fin de dar criterios de corrección para los mismos. Un fragmento de nuestro lenguaje que incluya esas locuciones ya no es extensional, como muestra el siguiente ejemplo de Quine,
(A) Necesariamente 9 es mayor que 7
(B) El número de planetas es 9
Por lo tanto, (C) necesariamente el número de planetas es mayor que 7.

Mientras que (A) es verdadera (o así podemos considerarla), (C) es evidentemente falsa. Sin embargo, «9» y «el número de planetas» denotan el mismo objeto.

El problema planteado por este argumento da lugar a dos tipos de soluciones. Si c=d, toda propiedad que tenga c la tiene d, obviamente. Por lo tanto, si «c=d» es una ecuación verdadera entonces «c» puede ser substituido por «d» en cualquier

enunciado sin alterar el valor de verdad de este. Sin embargo, en un contexto opaco no ocurre así. Una primera solución consiste en postular que hay un defecto semántico en la simbolización. Si «E(c)» es el enunciado en cuestión y «c=d» es una ecuación verdadera, puede ser que en «E(c)» el término «c» no se refiera a lo que se refería en dicha ecuación, sea porque en el contexto opaco perdió su capacidad de denotar o porque designe otra cosa. La segunda posibilidad es que haya una ambigüedad de tipo sintáctico: aunque los enunciados tengan esa forma gramatical, tal vez su forma lógica sea distinta.

A este problema Quine dio el primer diagnóstico. Más precisamente, pensó que «9» en la segunda premisa evidentemente se refiere al número 9. En cambio, en la primera premisa ha perdido su capacidad de designar. Si se refiriera al número de las musas entonces al sustituirlo por «el número de planetas» el valor de verdad de (C) tendría que ser verdadero pues estaría atribuyendo al mismo objeto la misma propiedad que (A). No sabemos cuál sea su referencia, suponiendo que la tenga. Por lo tanto, pasar de (A) a
(D) existe un objeto que necesariamente es mayor que 7
sería un error, como lo prueba el hecho de que si se nos preguntara qué objeto es ese que necesariamente es mayor que 7, no podríamos responder que 9, pues entonces necesariamente el número de planetas sería mayor que 7. El problema no es (solamente) que no podamos pasar de (A) a (D), sino que (D) es incomprensible. Estamos diciendo que hay un objeto que tiene una propiedad, pero no podemos decir de qué objeto de trata. De acuerdo a este diagnóstico una expresión del tipo «$\exists x$ necesariamente $x > 7$» es incomprensible. En cambio, un enunciado como «necesariamente existe x $x > 7$» sí tiene sentido. Dicho de otra manera, una variable libre no puede figurar al interior de un contexto opaco. En conclusión, la lógica modal cuantificada no tiene sentido. Tal es el veredicto de Quine.

Lazado por un tarro, lazado por los dos. Refrán popular que significa que es necesario continuar o poner más empeño en una obra ya emprendida.

Veamos otros de sus argumentos en defensa del mismo punto. Supongamos que tenemos una identidad verdadera «c=d». Sin duda c tiene la propiedad de ser idéntico a c, así es que d también la tiene. Concluimos que si $c = d$ entonces necesariamente $c = d$. Simbólicamente: $c = d \to (\Box c = c \to c = d)$. Puesto que $\Box c = c$ será sin duda una fórmula válida, concluimos que:

$$c = d \to \Box c = d.$$

Pero eso parece un absurdo. Yuri Gagarin fue el primer hombre en el espacio exterior. Tendríamos entonces que concluir que necesariemente Yuri Gagarin fue el primer hombre en el espacio exterior.

A principios de la década de 1940, Quine negaba la posibilidad de tener una lógica modal cuantificada. Poco tiempo después recibió dos importantes respuestas cada

una de las cuales ilustra una de las posibilidades antes señaladas. Una de ellas está inspirada en una sugerencia de Frege. La idea es que en el argumento anterior hay implícita una ambigüedad semántica (es decir, que el argumento es una falacia por equivocación). Los términos «9» y «el número de planetas» aunque se refieren a la misma cosa en la segunda premisa, no denotan lo mismo en sus otras apariciones en el argumento. Frege pensó que eso ocurría sistemáticamente en todas las locuciones «oblicuas» (es decir, en los contextos referencialmente opacos). Por ejemplo, en la oración «Juan busca a la actual presidenta de México», la expresión «la actual presidenta de México» no denota a Claudia Sheinbaum Pardo, sino a otro entidad. Juan puede incluso buscar al actual vicepresidente de México aunque en México no haya vicepresidentes. Frege propuso que el objeto denotado por «el actual presidente de México» cuando está enclavado en esa locución, es decir, cuando está precedido por «Juan está buscando a», es lo que él llamó el sentido de «el actual presidente de México», es decir, lo que objetivamente los hispanoparlantes entendemos al escuchar esa expresión, o lo que tal vez podríamos llamar, su significado. En general, Frege propuso que cada término individual (por ejemplo, un nombre), cada término funcional (vgr., un predicado) y cada enunciado tiene un sentido y (casi todos) una referencia. Limitémonos ahora a los términos singulares. Éstos son de dos tipos: nombres y descripciones definidas[1]. Para Frege todas estas expresiones tienen sentido (que es aquello que todos los hispanoparlantes entendemos al escucharlas) y casi todas tienen referencia.

«El primer emperador de México» tiene un sentido y se refiere a Agustín de Iturbide. En cambio, «el mayor número primo» tiene sentido (todos entendemos la expresión) pero no tiene referencia. Por otro lado, muy probablemente aprendimos el nombre «Isabel II» cuando se nos dijo que era la reina de Inglaterra, así es que eso es lo que entendemos cuando escuchamos ese nombre. Es decir, para nosotros el nombre «Isabel II» tiene como sentido el sentido de «la reina de Inglaterra». Primeramente, está claro que con ello se resuelve el problema que plantean los contextos opacos pues la segunda premisa de los ejemplos anteriores es una ecuación con dos términos singulares, uno de los cuales figura en la primera premisa pero con otra denotación. Es como si dijéramos Aristóteles es el autor de *La Metafísica* y
Aristóteles se casó con Jacqueline Bouvier
Por lo tanto, el autor de *La Metafísica* se casó con Jacqueline Bouvier.
El argumento es incorrecto porque estamos hablando de dos Aristóteles muy distintos. Es decir, adolece de una equivocación. En segundo lugar deberíamos explicar un poco por qué Frege pensó que los nombres (o descripciones definidas) en contextos opacos designaban su sentido y no su referencia habitual, pero no es necesario ahondar en ello.

Esta opción llevó a un desarrollo de la lógica intensional propugnado por Church, Bealer y Anderson entre otros, pero no es la vía que llevó a la constitución de una lógica modal.

La segunda respuesta a Quine fue ofrecida por Arthur Smullyan y consiste en aplicar la teoría de las descripciones definidas de Russell para mostrar que hay una

[1]Omitimos los pronombres personales y los demostrativos en singular.

ambigüedad sintáctica en el argumento de Quine o, de manera más precisa, que éste no tiene lógicamente la forma que aparenta, a saber, $F(a)$ y $a = b$; por lo tanto, $F(b)$. Aunque gramaticalmente la primera premisa sea una predicación y en ella aparezca un término singular («a» en nuestra simbolización), su forma lógica es muy distinta. Russell propone que un enunciado como
El actual vicepresidente de México es miope
no predica de un objeto denotado por «el actual vicepresidente de México» la propiedad de ser miope, en cuyo caso no sería ni verdadero ni falso, pues no hay actualmente vicepresidente de México, sino que en realidad significa lo que significa la conjunción de estos tres enunciados siguientes,
(1) Existe un actual vicepresidente de México (al menos uno).
(2) No hay más de un actual vicepresidente de México.
(3) Todos los actuales vicepresidentes de México son miopes.

Si «F» expresa la propiedad de ser presidente de México en 2025, el término «el presidente de México en 2025» se formaliza con la expresión «$\iota x Fx$». De acuerdo a la postura de Russell, este tipo de expresiones pueden ser eliminadas en favor de expresiones que solo contengan el predicado en cuestión («F» en este caso), los cuantificadores clásicos y el símbolo de igualdad. Pueden aparecer en dos tipos de contextos. Uno es aquel en que decimos que el tal por cual existe. Solemos aseverar esto cuando hay un solo sujeto que es tal por cual. Si simbolizamos el predicado de existencia por E y ser tal por cual por «F», esta reducción se simboliza así:

$$E\iota x Fx \equiv_{Def} \exists x Fx \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg Fy)$$

El segundo contexto en que aparecen las descripciones definidas es el del tipo: el tal por cual tiene la propiedad G (o está en la relación R con...). Lo que entonces estamos diciendo es que hay un individuo y solo uno que es tal por cual y que tiene la propiedad G. En símbolos,

$$G(\iota x Fx) \equiv_{Def} \exists x((Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x)) \wedge Gx)$$

Estas dos definiciones que permiten la eliminación de las descripciones definidas están incompletas. Aún subsiste una ambigüedad cuando la descripción figura en la cercanía de otro operador, como veremos enseguida.

Este análisis permite evadir una serie de dificultades que de otra manera aparecerían. Una de ellas es justamente la de la paradoja planteada por las locuciones opacas. Volvamos al planteamiento de Quine,
Necesariamente nueve es mayor que siete.
El número de planetas es igual a nueve.
Por lo tanto, necesariamente el número de planetas es mayor que siete.
La apariencia de paradoja desaparece en la simbolización de Russell porque entonces la segunda premisa no tiene la forma de una ecuación, sino de una expresión de la forma $\exists x \forall y((Fy \leftrightarrow y = x) \wedge x = 9)$. La conclusión admite dos interpretaciones. Por ejemplo, puede representarse como $\exists x \forall y((Fy \leftrightarrow y = x) \wedge \Box x > 9)$ o bien como

$\Box\exists x\forall y((Fy \leftrightarrow y = x) \wedge x > 9)$. La primera simbolización podría parafrasearse como: «El número que es de hecho el número de los planetas es necesariamente mayor que 7» y así leída es verdadera. Llamaremos a la primera la lectura *de re* y a la segunda la lectura de *dicto*. Más adelante haremos hincapié en esta distinción.

> ¿Qué cosa es, que va primero un cardenal y lo sigue un cuervo? La fogata.

Arthur Smullyan en 1947 hizo a Quine la observación de que Russell había resuelto esta paradoja y que todo es cosa de distinguir con cuidado los alcances respectivos de la descripción y del operador de modalidad. En sus propias palabras,

> La dificultad se evita si sacamos una distinción. Debemos distinguir entre enunciados de la siguiente forma:
> D. El así y así satisface la condición de que es necesario que Fx
> y
> E. Es necesario que el así y así satisfaga la condición de que Fx
> El lector a estas alturas debe sentir como si le hubieran pedido distinguir entre Tweedledum y Tweedledee... Pediré al lector que crea que James está ahora pensando en el número 3. Si, ahora, alguno observara «hay uno y solo un entero en el cual James está ahora pensando y ese entero es necesariamente non», entonces estaría estableciendo una verdad contingente. Pues que hay solo un entero en el cual James está pensando es un hecho empírico... En contraste, el enunciado «Es necesario que el entero de James sea non», el cual es de la forma E, es un enunciado imposible y no contingente. Si no es necesario, entonces necesariamente no es necesario; al menos así lo asumo.

Siguiendo esta observación el argumento anterior puede ser esquematizado de dos maneras distintas. En una, la descripción se encuentra en el alcance del operador de modalidad (en la conclusión) y, en la otra, al revés. Pueden ser respectivamente simbolizadas así,

A. $\Box 9 > 7$
$\exists x(\forall y(NPLy \leftrightarrow y = x) \wedge x = 9)$
$\Box\exists x(\forall y(NPLy \leftrightarrow y = x) \wedge x > 7)$

B. $\Box 9 > 7$
$\exists x(\forall y(NPly \leftrightarrow y = x) \wedge x = 9)$
$\exists x(\forall y(NPly \rightarrow y = x) \wedge \Box x > 7)$

En la primera formalización las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, pero el argumento claramente es incorrecto, pues la segunda premisa no autoriza la sustitución hecha para llegar de la primera premisa a la conclusión. En la segunda formalización el argumento parece correcto, pero la conclusión es verdadera. Así la apariencia paradójica desaparece. Esta opción propuesta por Smullyan será de importancia en lo que sigue.

Otro argumento de Quine es el *slingshot*. Supongamos un contexto proposicional (es decir que debe ser completado por una proposición para obtener otra) que admite substitución de términos co-denotativos[2] y substitución de equivalentes proposicionales *salva veritate*[3]). El argumento prueba que ese contexto tiene que ser veritativo funcional. Supongamos que ϕ y ψ son enunciados verdaderos y representemos el contexto en cuestión por «C...». Dado que $\phi \equiv (a = \iota x(x = a \wedge \phi)$, entonces $C\phi \equiv C(a = \iota x(x = a \wedge \phi)$. Ahora bien dado que $\iota x(x = a \wedge \phi) = \iota x(x = a \wedge \psi)$, entonces $C\phi \equiv C(a = \iota x(x = a \wedge \psi)$. Por último, como $\psi \equiv (a = \iota x(x = a \wedge \psi)$, concluimos que $C\phi \equiv C\psi$. Algo similar puede probarse si tanto ϕ como ψ son falsas. Concluimos que si «C...» es un contexto proposicional que tolera subsitución de equivalentes lógicos y de términos codenotativos *salva veritate*, entonces es veritatico funcional, es decir $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (C\phi \leftrightarrow C\psi)$. Por consiguiente, si $\Box \ldots$ es un contexto que tolera sustitución de equivalentes lógicos *salva veritate*, pero no no es veritativo funcional, entonces no admite la sustitución de términos codenotativos *salva veritate*. Ergo, tiene que ser opaco y, por lo tanto, según Quine no es susceptible de cuantificación desde el exterior. Esta objeción depende de la primera que vimos.

Esta breve disquisición filosófica no es una simple curiosidad; tiene relación con ciertas selecciones semánticas para la aplicación de la lógica a sectores intensionales de nuestro lenguaje. Por lo pronto, la propuesta de Russell nos proporciona un método útil de simbolización de oraciones del lenguaje ordinario y muestra por qué hay un sentido en que, por ejemplo, la expresión «necesariamente el número de planetas es mayor que siete» puede ser considerada verdadera (a saber cuando es interpretada como una expresión *de re*). Además, independientemente de los debates filosóficos, la teoría de las descripciones definidas de Russell parece adecuada para modelar la corrección de argumentos en el lenguaje ordinario.

5.3 Lógica modal proposicional

A los lenguajes formales de la lógica proposicional clásica agregaremos los símbolos «$\Box$» y «$\Diamond$» como operadores unarios que se anteponen a una fórmula para formar otra. Estos operadores serán intensionales, es decir, no serán veritativo-funcionales (no podrán definirse por una tabla de verdad). En principio, «$\Box P$» y «$\Diamond P$» se leerán respectivamente «necesariamente P» y «posiblemente P», pero también pueden tener otras interpretaciones. Por ejemplo, «$\Box P$» puede querer decir que John sabe que P, o que P siempre será verdadera en el futuro o bien que la regla P es obligatoria. Por

[2]Es decir, con la misma designación.
[3]Es decir, sin que la sustitución altere el valor de verdad.

ahora, concentrémonos en la necesidad y la posibilidad. ¿En qué sentido debemos entender estas nociones? ¿Es posible que un ser humano viaje a una velocidad igual o superior a la de la luz? Desde el punto de vista de la física o de la medicina, la respuesta es negativa. Sin embargo, lógicamente sí es posible. Einstein pudo imaginar un tren que viajaba a la velocidad de la luz; en cambio, que 1+1 no sea 2 no parece imaginable ni posible en ningún sentido. Aun quedándonos solo con la noción de posibilidad lógica, no está muy claro qué reglas deben determinar el comportamiento de nuestros nuevos operadores. Por ejemplo, ¿lo que es posible lo es por necesidad?, es decir, ¿es lo posible necesariamente posible?, ¿es lo necesario necesariamente necesario? Como no está clara la respuesta, tendremos diversos sistemas de lógica modal, cada uno de los cuales recogerá ciertas intuiciones. Por ello, suele hablarse de lógicas modales. Todas ellas comparten la misma gramática (el mismo conjunto de enunciados), pero difieren en las reglas sintácticas o semánticas que determinan el comportamiento de nuestros nuevos operadores. Eso sí, en todas ellas un enunciado de la forma «necesariamente P» será lógicamente equivalente a «no es posible que no P», y «posiblemente P» será equivalente a «no es necesario que no P». De manera formal

$\Box P \equiv \neg \Diamond \neg P$

y

$\Diamond P \equiv \neg \Box \neg P$

por lo cual podremos introducir sólo uno de estos símbolos y definir el otro a partir de una de las fórmulas anteriores. Al lenguaje que obtenemos del lenguaje de la lógica proposicional clásica por la adjunción de estos operadores lo denotaremos por LMP.

Dado que los sistemas de lógica modal cuantificada que veremos se forman agregando a un sistema de lógica modal proposicional el aparato del cálculo de predicados junto con alguna regla o axioma que sirve de puente entre ambos, comenzaremos estudiando algunos célebres sistemas de lógica modal proposicional. Los más conocidos pueden ser presentados tanto de forma sintáctica (a través de algún método de prueba) o bien semánticamente y son extensiones de un sistema llamado K. Empezaremos presentando brevemente este sistema tanto de manera axiomática como por medio de una definición de validez lógica.

Como dijimos antes, el vocabulario de estos sistemas se obtiene agregando a los símbolos usuales del cálculo de enunciados (letras proposicionales, los símbolos lógicos usuales y paréntesis) los dos símbolos modales $\Box$ y $\Diamond$. A las reglas para formar fórmulas agregamos que si tenemos una fórmula y le anteponemos cualquiera de los dos símbolos recién introducidos, el resultado es, de nuevo, una fórmula.

A veces, en lugar de «fórmula» diremos «enunciado». Al conjunto de letras proposicionales lo denotaremos por $\mathcal{LP}$. En el cálculo de proposiciones un modelo estaba determinado por una asignación de valores de verdad a las letras proposicionales del lenguaje. Esta vez habrá una complicación adicional: ¿cómo evaluaremos los enunciados que contienen un símbolo modal? ¿En qué casos $\Box\alpha$ será verdadero? Una intuición subyacente a la semántica que desarrollaremos es que un enunciado de la forma «necesariamente α» es verdadero si es verdadero en toda circunstancia o en toda situación posible de cierta clase. Por ejemplo, «el presidente de Bolivia en 2009 era un

indígena» es un enunciado verdadero en nuestro mundo, pero es contingente. Hasta donde sabemos, Tuto Quiroga podría haber ganado las elecciones bolivianas en ese año. En cambio, «7+8=15» no pudo ser falsa en ninguna situación. Es una proposición necesaria. Desde luego, dejamos ahora indeterminado si estamos hablando de posibilidad física, metafísica o lógica. Otra idea central es que ciertas situaciones son posibles a partir de otras: es posible cruzar el Atlántico en siete horas si disponemos de aeroplanos, y no es posible si estamos en la época de las cavernas. En esta semántica tendremos situaciones posibles (llamadas mundos posibles), cada una con diferentes asignaciones de valores de verdad a las letras proposicionales (recogiendo la idea de que en otras situaciones los enunciados tendrían diferentes valores de verdad) y una relación que establecerá, dado un mundo posible w, qué mundos son accesibles a w (es decir, realmente posibles) a partir de la situación w. Así, $\Box\alpha$ será verdadera en un mundo w si α es verdadera en todo mundo accesible a w.

Ahora daremos la definición de «interpretación» de LMP.

Definición 5.3.1. Una interpretación de LMP es una terna $I = \langle W, R, E\rangle$ en donde

1) W es un conjunto no vacío (cuyos elementos serán llamados «mundos posibles»).

2) R es una relación binaria en W (es decir, $R \subset W^2$)

3) $E : \mathcal{LP} \Rightarrow \mathcal{P}(W)$ donde $\mathcal{P}(W)$ es el conjunto de subconjuntos de W y $\mathcal{LP}$ el conjunto de letras proposicionales del lenguaje.

Más claramente, E es una función que a cada letra proposicional del lenguaje le asocia un conjunto de mundos posibles (el conjunto donde esa letra es verdadera). Es decir, E tiene como tarea determinar qué letras proposicionales son verdaderas en qué mundos. Por ejemplo, supongamos que en una interpretación el conjunto de mundos W es $\{w, v, m, n\}$ y que $E(P) = \{v, m\}$. Eso significará que en esa interpretación, P es verdadera en los mundos v y m y falsa en w y n. A veces también lo podremos así: $E(P, w) = F$, $E(P, v) = V$, $E(P, m) = V$, $E(P, n) = F$. Es decir, que también podemos considerar a E como una función que a cada pareja formada por un mundo y una fórmula atómica asocia un valor de verdad (verdadero o falso). De E diremos que es la evaluación de I[4]. Que $(u, z) \in R$, será también denotado como Ruz o como uRz. En ese caso diremos que «u ve a z», o que «z es accesible desde u». La idea es que eso representa el hecho de que la situación z es posible a partir de la situación u.

De una manera más intuitiva podemos pensar a una interpretación como una gráfica dirigida con información en los vértices. Es decir, es un conjunto de puntos algunos

[4]Frecuentemente también utilizaremos la letra V para denotar a esta función.

de los cuales estarán unidos entre sí por flechas (que pueden ir solo en una dirección o en ambas) y en cada uno de los cuales las letras proposicionales tendrán valores de verdad. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.3.2. Sea $I = \langle W, R, E\rangle$ donde

1) $W = \{w, u, v, z\}$,

2) $R = \{(w, w), (v, w), (v, z), (z, u)\}$

3) $E(P) = \{w, v, z\}$, $E(Q) = \{w, u, v\}$, $E(S) = \{w, z\}$.

Es decir, que $E(w, P) = V$, $E(w, Q) = V$, $E(w, S) = V$, $E(u, P) = F$, $E(u, Q) = V$, $E(u, S) = V$, $E(v, P) = F$, $E(v, Q) = V$, $E(v, S) = F$, $E(z, P) = V$, $E(z, Q) = F$, $E(z, S) = V$. Desde luego E debe asignar a cada letra proposicional en cada mundo un valor de verdad, pero en la práctica solo consideramos las letras que figuran en una fórmula que nos interesa evaluar. Ahora, cada fórmula tendrá un valor de verdad en cada mundo. Desde luego las letras proposicionales ya tiene un valor de verdad asignado por E y las fórmulas compuestas con los conectivos lógicos proposicionales serán evaluadas en un mundo por los valores de sus subfórmulas en ese mundo, a la manera usual. Por ejemplo, $(P \wedge S)$ es verdadera en w, mientras que es falsa en v. Eso lo denotaremos así, $I, w \models (P \wedge S)$ y $I, v \not\models (P \wedge S)$.

La novedad será en la asignación de un valor de verdad a fórmulas con los operadores $\Box$ y $\diamond$. Veamos cómo hacerlo. Puesto que v tiene accceso a w y a z y tanto en w como en z es verdadero P, $\Box P$ es verdadera en v. Por otro lado, vRw y en w es verdadera P. Por lo tanto, $\diamond P$ es verdadera en v. Es decir, $\Box\alpha$ es verdadera en un mundo X si α es verdadera en todos los mundos a los que X tiene acceso. Por otro lado, $\diamond\alpha$ es verdadero en X si X es verdadera en al menos un mundo al que X tiene acceso. Se creerá que entonces $(\Box\alpha \to \diamond\alpha)$ será verdadera siempre, pero no es así.

Con la siguiente definición especificamos más formalmente cuándo una fórmula es verdadera (o falsa) en un mundo en una interpretación.

Definición 5.3.3. Sea $I = \langle W, R, E\rangle$, w un mundo en W y α una fórmula de LMP. Que α es verdadero en w (lo que denotaremos por $I, w \models \alpha$ o, simplemente, $w \models \alpha$) está determinado por las siguientes cláusulas,

1. α es la letra proposicional ρ y $E(w, \rho) = V$.
2. α es de $\neg\beta$ y β es falsa en w ($w \not\models \beta$).
3. α es $(\beta \wedge \gamma)$, $w \models \beta$ y $w \models \gamma$.
4. α es $(\beta \vee \gamma)$, y $w \models \beta$ o $w \models \gamma$.

5. α es $(\beta \to \gamma)$, y $w \not\models \beta$ o $w \models \gamma$.

6. α es $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, y $w \models \beta$ y $w \models \gamma$; o bien $w \not\models \beta$ y $w \not\models \gamma$.

7. α es $\Box\beta$ y para todo $v \in W$ tal que wRv, $v \models \beta$.

8. α es $\Diamond\beta$ y existe $v \in W$ tal que wRv, $v \models \beta$.

Ejemplo 5.3.4. Tomemos la fórmula $(\Box P \wedge \Diamond\Box(P \leftrightarrow Q))$ y evaluémosla en el modelo $M = \langle W, R, E\rangle$, tal que

1) $W = \{w, u, v, z, t\}$

1) $R = \{(w, u), (w, v), (v, w), (v, z), (u, t)\}$

1) $E(w, P)$ =verdadero, $E(w, Q)$ =falso, $E(v, P) = E(u, P)$ = verdadero y $E(z, P) = E(z, Q)$=falso, $E(t, P) = E(t, Q)$=falso.

Por supuesto que la interpretación solo estará completamente determinada cuando el valor de E sea especificado para todas las parejas formadas por un mundo y una letra proposicional, pero los valores dados nos bastan para determinar que $w \models (\Box P \wedge \Diamond\Box(P \leftrightarrow Q))$. Dado que solo u y v son accesibles desde w, que $E(u, P) = V$ y $E(v, P) = V$, entonces $w \models \Box P$. Por otro lado, $t \models (P \leftrightarrow Q)$ y, como solo t es accesible desde u, $u \models \Box(P \leftrightarrow Q)$ y wRu, entonces $w \models \Diamond\Box(P \leftrightarrow Q)$.

Definición 5.3.5. Una fórmula α es válida en un modelo $M = \langle W, R, V\rangle$ si es verdadera en cada elemento de W.

Por ejemplo, en el modelo anterior la fórmula $\Box\Box\Box P$ es válida.

Definición 5.3.6. Una fórmula α es satisfacible si y solo si existe un modelo M y un mundo w en el modelo tal que $M, w \models \alpha$.

Definición 5.3.7. Una fórmula α es válida cuando es verdadera en todo modelo.

La fórmula $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ es válida, es decir, verdadera en todo mundo de todo modelo. Comprobémoslo. Tomemos un mundo cualquiera w de un modelo cualquiera M. Debemos comprobar que $M, w \models \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$. Si $w \not\models \Box(P \to Q)$ entonces la fórmula es verdadera en w (al ser falso el antecedente). Por otro lado, si $w \not\models \Box P$, entonces la fórmula es verdadera en w (al ser verdadero el consecuente). Solo nos falta revisar el caso en que $w \models \Box(P \to Q)$ y $w \models \Box P$. Queremos comprobar que $w \models \Box Q$, es decir que si v es un mundo cualquiera tal que wRv, entonces $v \models Q$. Ahora dado que $w \models \Box(P \to Q)$ entonces $v \models (P \to Q)$

y, dado que $w \models \Box P$, $v \models P$. De ello se sigue que $v \models Q$. Como v es un mundo cualquiera tal que wRv, concluimos que $w \models \Box P$.

¿Es la fórmula $(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \rightarrow \Diamond(P \wedge Q)$ válida? Fácilmente podemos comprobar que no. Tomemos un modelo con tres mundos, w, v y t, donde $R = \{(w,v),(w,t)\}$ y en el que $E(P) = \{v\}$ y $E(Q) = \{t\}$. Entonces claramente $w \models (\Diamond P \wedge \Diamond Q)$, pero $w \not\models \Diamond(P \wedge Q)$

¿Es esta fórmula satisfacible? Sí, tomemos ahora un modelo similar formado por dos mundos w, v, t tales que $R = \{(w,v)\}$ y en el que $E(P) = \{v\}$ y $E(Q) = \{v\}$. Claramente $w \models (\Diamond P \wedge \Diamond Q) \rightarrow \Diamond(P \wedge Q)$.

Definición 5.3.8. Dado un modelo $M = \langle W, R, V\rangle$, llamamos a $\langle W, R\rangle$ el marco correspondiente a M.

Definición 5.3.9. Decimos que una fórmula α es válida en el marco $F = \langle W, R\rangle$ si es válida en todos los modelos cuyo marco sea F.

Definición 5.3.10. Diremos que la relación R de W en W es,

Reflexiva si y sólo si para cualquier mundo w de W, wRw.

Transitiva si y sólo si para cualesquier tres mundos v, w, z de W si vRw y wRz entonces vRz.

Serial si y sólo si para cualquier mundo w de W existe un mundo v de W tal que Rwv.

Simétrica si y sólo si para cualesquier dos mundos u y v de W si Ruv entonces Rvu.

De equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Diremos que un marco $F = \langle W, R\rangle$ (o un modelo $\langle W, R, V\rangle$) es simétrico o transitivo, etc., si R es simétrica o transitiva, etcétera.

Vayamos ahora a la presentación sintáctica de K. Hasta aquí no hemos tratado métodos formales de prueba, aunque dimos un indicio de su naturaleza en el capítulo introductorio. Vimos allí que las inferencias susceptibles de ser expresadas en el lenguaje de Carroll eran válidas, mientras que otras eran inválidas. Vimos un par de métodos, uno gráfico y otro por medio de índices, que nos permitían llegar de las premisas a la conclusión de un argumento, siempre y cuando este fuera válido, sin atender al significado de los símbolos del lenguaje, fueran estos lógicos o no. Nos bastaba con hacer ciertas transformaciones tipográficas de acuerdo a las tres reglas de Carroll. Esto se veía más claro en el método de los índices. Ahora haremos algo similar. Se trata de obtener todas y solo las fórmulas válidas de la siguiente manera,

Daremos algunos esquemas de fórmulas válidas y las llamarenos axiomas. Enseguida tendremos reglas (llamadas de inferencia) que permiten transformar unos esquemas en otros, pero atendiendo solo a su forma (no a al significado de sus símbolos). La idea es que aplicando estas reglas a los axiomas o a cualquier resultado ya obtenido por este método obtengamos todas las fórmulas válidas. Las fórmulas o esquemas de fórmulas que vayamos obteniendo se llamaran teoremas). El sistena así constituído se llamará K.

Los axiomas de K son,

1) Todas las instancias de tautologías.

2) Todas las fórmulas de la forma $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$. De ellas diremos que son ejemplos (o instancias) del esquema de axioma K o de distribución). Aunque utilizamos la misma letra para denotar al sistema y al axioma, en cada contexto será claro a cuál de ambos nos referimos.

Las reglas de inferencia de K son,

1) Modus ponens: de α y $(\alpha \to \beta)$ se deriva β.

2) Necesidad: de α se deriva $\Box\alpha$.

De β decimos que se obtiene de α y $(\alpha \to \beta)$ por *modus ponens*. De $\Box\alpha$ decimos que se obtiene de α por necesidad.

Recuerde que una instancia de tautología es una fórmula que se obtiene al substituir en una tautología sus letras proposicionales por fórmulas, la misma letra por la misma fórmula. Por ejemplo,

$$(P \to (Q \to P)),$$

es una tautología. Instancias de ella son las fórmulas siguientes,

$$(A \wedge \neg B) \to (((C \leftrightarrow (D \vee E)) \to (A \wedge \neg B)).$$

$$\neg(A \vee B) \to ((P \wedge \neg P) \to \neg(A \vee B)).$$

Todas estas fórmulas son axiomas de K, como también lo es la fórmula siguiente,

$$\Box((P \wedge \neg\Box Q) \to (Q \leftrightarrow S)) \to (\Box(P \wedge \neg\Box Q) \to \Box(Q \leftrightarrow S))$$

como lo especifica la segunda cláusula de nuestra definición. La segunda regla de inferencia no sería correcta, como veremos, si estuviésemos describiendo un sistema con pruebas deductivas (con hipótesis) lo que no es el caso. La regla asevera que $\Box\alpha$ es un teorema si α lo es.

Llamaremos «prueba (de K)» a una sucesión finita de fórmulas del lenguaje cada una de las cuales es un axioma o ha sido obtenido de fórmulas anteriores por aplicación de las reglas de inferencia. Llamaremos «teorema (de K)» a la ultima fórmula una de tales pruebas. Diremos que la prueba es una prueba de ese teorema.

A continuación veremos ejemplos de teoremas de K.

Ejemplo 5.3.11. $\vdash \Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q)$ La siguiente es una prueba,

1) $((P \wedge Q) \to P)$
2) $\Box((P \wedge Q) \to P)$
3) $\Box((P \wedge Q) \to P) \to (\Box(P \wedge Q) \to \Box P)$
4) $(\Box(P \wedge Q) \to \Box P)$
5) $((P \wedge Q) \to Q)$
6) $\Box((P \wedge Q) \to Q)$
7) $\Box((P \wedge Q) \to Q) \to (\Box(P \wedge Q) \to \Box Q)$
8) $(\Box(P \wedge Q) \to \Box Q)$
9) $((\Box(P \wedge Q) \to \Box P) \to [(\Box(P \wedge Q) \to \Box Q)) \to (\Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q))]$
10) $(\Box(P \wedge Q) \to \Box Q)) \to (\Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q))$
11) $\Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q)$.

1) y 5) son tautologías (y, por lo tanto, axiomas), 2) y 6) se obtienen por necesidad de 1) y 5) respectivamente. 3) y 7) son ejemplos del (esquema de) axioma K. Los incisos 4) y 8) se obtienen por modus ponens. El inciso 9) es una instancia de tautología (y, por lo tanto, un axioma de K), mientras que 10) y 11) se obtienen por modus ponens. Es importante constatar que también probamos todas las fórmulas que se obtienen de $\Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q)$ substituyendo P y Q por fórmulas cualesquiera, pues la prueba puede repetirse con esas sustituciones. Es decir, ya sabemos que $\Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$ para cualesquiera fórmulas α y β.

Ejemplo 5.3.12.

$$\vdash (\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q).$$

La siguiente es una prueba,

1) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$
2) $\Box(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$
3) $\Box(P \to (Q \to (P \wedge Q))) \to (\Box P \to \Box(Q \to (P \wedge Q)))$

4) $(\Box P \to \Box(Q \to (P \wedge Q)))$

5) $\Box(Q \to (P \wedge Q)) \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))$

6) $(\Box P \to \Box(Q \to (P \wedge Q))) \to [(\Box(Q \to (P \wedge Q)) \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))) \to (\Box P \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))]$

7) $(\Box(Q \to (P \wedge Q)) \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))) \to (\Box P \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))$

8) $(\Box P \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))$

9) $(\Box P \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q)) \to (\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q))$

10) $(\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q)$.

En ambas ejemplos, en las últimas dos transiciones, pasamos de fórmulas ya probadas a una de sus consecuencias tautológicas. Por ejemplo, $(\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q)$ (última línea de la prueba anterior) es consecuencia tautológica de $(\Box P \to (\Box Q \to \Box(P \wedge Q))$ (antepenúltima línea de esa prueba). Diremos que β es consecuencia tautológica de α si y sólo si $(\alpha \to \beta)$ es una instancia de tautología. En general, β es consecuencia tautológica de α_1, α_1,... α_n si y sólo si $(\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$ (o, equivalentemente $(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta)\ldots))$ es una instancia de tautología.

Ahora bien, si β es consecuencia de α_1, α_2,... α_n y α_1, α_2,... α_n aparecen en una prueba, podemos agregar β, pues si la prueba tenía este aspecto:
m_1 α_1
$\vdots \quad \vdots$
m_n α_n
Podemos continuarla así:
m_{n+1} $(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta))\ldots)$ (instancia de tautología).
y después de reiteradas aplicaciones de *modus ponens* llegar a β.
El siguiente corolario es una ilustración sencilla de la regla anterior.

Corolario 5.3.13. $\vdash_K \Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$.

Demostración. Ya probamos que son teoremas de K tanto $\Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$ como $(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta)$. $\Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$ es consecuencia tautológica de las dos fórmulas anteriores y, por lo tanto, tambiés un teorema de K. □

De manera análoga podemos probar la siguiente aseveración.

Corolario 5.3.14. $\vdash_K \Diamond(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$.

Diremos que dos fórmulas α y β son *K*-equivalentes (lo que denotaremos por $\alpha \equiv_K \beta$), si $\vdash_K (\alpha \leftrightarrow \beta)$. Por ejemplo, podemos aseverar que $\Box(\alpha \wedge \beta) \equiv_K (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$. Ahora bien, si α y β son *K*-equivalentes ¿al sustituir β por α en una fórmula cualquiera la fórmula resultante es *K*-equivalente a la original? Por ejemplo, si α es una fórmula cualquiera, claramente $(\alpha \wedge \neg\neg P)$ es *K*-equivalente a $(\alpha \wedge P)$, en este caso porque una es consecuencia tautológica de la otra. Veremos un poco más adelante que la respuesta a nuestra pregunta es afirmativa. Pudimos ahorrarnos otro paso en las pruebas anteriores con la siguiente regla derivada.

Lema 5.3.15. *Para cualesquiera fórmulas α y β si $\vdash_K (\alpha \to \beta)$ entonces $\vdash_K (\Box\alpha \to \Box\beta)$.*

Demostración. Si ya tenemos $(\alpha \to \beta)$ en una línea de una prueba, podemos agregar las líneas $\Box(\alpha \to \beta)$ (por Necesidad), $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ (axioma *K*), y $(\Box\alpha \to \Box\beta)$ por modus ponens. □

Lema 5.3.16. *Para cualesquiera fórmulas α y β si $\vdash_K (\alpha \to \beta)$ entonces $\vdash_K (\Diamond\alpha \to \Diamond\beta)$.*

Demostración. Si $\vdash_K (\alpha \to \beta)$ entonces también $\vdash_K (\neg\beta \to \neg\alpha)$. Por el lema anterior, $\vdash_K (\Box\neg\beta \to \Box\neg\alpha)$ y, por lo tanto, $\vdash_K (\neg\Box\neg\alpha \to \neg\Box\neg\beta)$, de donde sale el resultado. □

A la aplicación de las reglas a que nos facultan los dos lemas anteriores nos referiremos con el término «distribución».

Lema 5.3.17. *Si $\vdash_K (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta))\ldots)$ entonces $\vdash_K (\Box\alpha_1 \to (\Box\alpha_2 \to \cdots \to (\Box\alpha_{n-1} \to (\Box\alpha_n \to \Box\beta))\ldots)$.*

Demostración. Para el caso $n = 1$, es decir $(\alpha_1 \to \beta)$ ya lo probamos. Ahora lo probaremos para $n = 2$. Supongamos que $\vdash_K \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \beta)$. Por el caso $n = 1$ sabemos que $\vdash_K \Box\alpha_1 \to \Box(\alpha_2 \to \beta)$, pero $\vdash_K \Box(\alpha_2 \to \beta) \to (\Box\alpha_2 \to \Box\beta)$ (de nuevo, por el caso n=1). Por ser consecuencia tautológica de las dos fórmulas anteriores $\vdash_K \Box\alpha_1 \to (\Box\alpha_2 \to \Box\beta)$. Obviamente, el caso $n = 3$ se prueba de manera análoga, al igual que los sucesivos. □

Lema 5.3.18. $\vdash_K (\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$.

Demostración. Puesto que $(\alpha \to (\alpha \vee \beta))$ es una instancia de tautología, $(\Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta))$ es un teorema de *K*; de igual manera lo es $(\Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta))$. Por ser consecuencia tautológica de las fórmulas anteriores, $(\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$ es teorema de *K*. □

Lema 5.3.19. *Si $\vdash_K (\alpha \leftrightarrow \beta)$ entonces $\vdash_K (\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta)$.*

Demostración. 1) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

2) $(\alpha \rightarrow \beta)$

3) $(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

4) $(\beta \rightarrow \alpha)$

5) $(\Box\beta \rightarrow \Box\alpha)$

6) $(\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta)$.

Con la notación $\alpha(\beta/\gamma)$ indicaremos la fórmula que se obtiene al substituir en la fórmula α las figuraciones de la fórmula β por γ. Por ejemplo, si α es $(P \leftrightarrow \Box(Q \vee \neg\Box R))$ entonces $\alpha(\Box R/\ \diamond \neg S)$ es la fórmula $(P \leftrightarrow \Box(Q \vee \neg \diamond \neg S))$. Es fácil probar que al subsituir en una fórmula una subfórmula por otra K-equivalente, la fórmula resultante es K-equivalente a la original.

Lema 5.3.20. *Si* $\vdash_K \diamond(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \rightarrow \diamond\beta)$.

Demostración. 1. $\diamond(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\diamond\neg\alpha \vee \diamond\beta)$

2. $\diamond(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\Box\alpha \vee \diamond\beta)$

3. $\diamond(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \rightarrow \diamond\beta)$.

Teorema 5.3.21 (Correción de K). *Si α es teorema de K entonces es válida. Simbólicamente, si $\vdash_K \alpha$ entonces $\models \alpha$*

Demostración. Sea α un teorema de K. Eso significa que existe una prueba α_1, α_2... α_n tal que $\alpha_n = \alpha$. Vamos a probar que cada α_i (con $1 \leq i \leq n$) es válida. α_1 es un axioma y, por lo tanto, o es una instancia de tautología o del axioma K. Ya vimos que en este último caso se trata de una fórmula válida. Lo mismo ocurre con el primero, pues una instancia de tautología es verdadera en cada mundo, independientemente del valor de sus subfórmulas en ese mundo. Ahora bien, α_j o es un axioma, en cuyo caso ya demostramos su validez o proviene de las fórmulas α_k y $\alpha_k \rightarrow \alpha_j$ por modus ponens. Por hipótesis de inducción, ambas son válidas y, por lo tanto, también α_j. Por último, supongamos que α_j proviende de α_i por la regla de necesidad. Es decir, α_j es $\Box\alpha_i$. Por

hipótesis de inducción, α_i es válida. Consideramos ahora un mundo cualquiera w de un modelo dado. Si wRv entonces $v \models \alpha_i$ (por ser α_i válida). Por lo tanto $w \models \Box\alpha_i$, es decir, $w \models \alpha_j$. Con ello concluimos la prueba. ❐

También es posible, pero más complicado, demostrar lo siguiente.

Teorema 5.3.22. *Si α es una fórmula válida entonces es un teorema de K.*

Dejaremos la demostración para más adelente. Podemos identificar a K con el conjunto de sus teoremas. También dimos una caracterización semántica del mismo conjunto de fórmulas, a saber, son las fórmulas verdaderas en todo mundo de todo modelo. Por supuesto pudimos dar otras axiomatizaciones equivalente de K.

Teorema 5.3.23. *Si $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ es teorema de K, también lo es $(\alpha \leftrightarrow \alpha(\beta/\gamma))$.*

Demostración. Por inducción en la complejidad de α. Si α es una letra proposicional, el teorema es obvio. Supóngase que $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ y $(\alpha \leftrightarrow \alpha(\beta/\gamma))$ son teoremas de K. Entonces también lo son: $(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha(\beta/\gamma))$ (por ser consecuencia de la última fórmula) y $(\Box\alpha \leftrightarrow \Box\alpha(\beta/\gamma))$ (como ya fue demostrado). El caso del condicional es similar. ❐

Con la leyenda «sustitución de equivalentes» haremos alusión a la regla que autoriza el uso del teorema anterior. Enseguida damos un ejemplo.

Lema 5.3.24. $\vdash_K \Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$.

Demostración. La siguiente es una prueba (abreviada) en K:

1) $(\Box\neg\alpha \vee \Box\neg\beta) \to \Box(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ Teorema de K.

2) $\neg\Box(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\Box\neg\alpha \vee \Box\neg\beta)$ contrapositiva en 1.

3) $\Diamond\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\Box\neg\alpha \vee \Box\neg\beta)$ Sustitución de equivalentes 2.

4) $\Diamond\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\neg\Box\neg\alpha \wedge \neg\Box\neg\beta)$ Sustitución de equivalentes 3.

5) $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\Box\neg\alpha \wedge \neg\Box\neg\beta)$ Sustitución de equivalentes 4.

6) $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$ Sustitución de equivalentes 5.

❐

Advierta el lector que las fórmulas $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$ y $(\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$ están estrechamente relacionadas. Con una podemos probar la otra utilizando únicamente la contrapositiva, las leyes de De morgan y las equivalencias $\neg\Box\alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$ y $\neg\Diamond\alpha \equiv \Box\neg\alpha$. En ese caso diremos que cualquiera de esas fórmulas es dual o conversa de la otra. Utilizaremos este expediente en lo sucesivo.

Lema 5.3.25. *Los siguientes son teoremas de K.*

a) $\Diamond(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$.

b) $(\Box\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$.

c) $(\Box\alpha \wedge \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$.

d) $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$.

Las demostraciones son sencillas y las omitiremos.

Definición 5.3.26. Dados dos sistemas axiomáticos S y L de lógica modal, diremos que L es una extensión de S si todo teorema de S es teorema de L, pero no a la inversa. «$S < L$» denotará que L es una extensión de S.

Definición 5.3.27. El sistema axiomático K_4 contiene, además de los axiomas y las diversas reglas de inferencia de K, el axioma $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$.

Simbolizaremos así este hecho: $K + \{\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha\} = K_4$.

Lema 5.3.28. *Es teorema de K4:*

$$\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha.$$

Demostración. Por dualidad.

Definición 5.3.29. El sistema axiomático D contiene, además de los axiomas y reglas de inferencia de K, el axioma $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

Lema 5.3.30. $D \equiv K + \{\Diamond(P \rightarrow P)\}$.

Demostración. Las siguientes fórmulas son mutuamente equivalentes en K:
$\Diamond(P \rightarrow P)$
$\Diamond(\neg P \vee P)$
$(\Diamond\neg P \vee \Diamond P)$
$(\neg\Box P \vee \Diamond P)$
$(\Box P \rightarrow \Diamond P)$.

Teorema 5.3.31. *Cualquier sistema normal (es decir extensión de K) que tenga como teorema una fórmula $\Diamond\alpha$ es extensión de D.*

Demostración. Supongamos un sistema S tal que $\Diamond\alpha$ es teorema de S. La siguiente es una prueba en S de $\Diamond(P \rightarrow P)$.
$\Diamond\alpha$
$\alpha \rightarrow (P \rightarrow P)$
$\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond(P \rightarrow P)$
$\Diamond(P \rightarrow P)$.

Teorema 5.3.32. *En D es teorema* $(\Box\neg\alpha \to \neg\Box\alpha)$.

Definición 5.3.33. Sea $T = K + \{\Box\alpha \to \alpha\}$, y $(\Box\alpha \to \alpha)$ se llamará axioma T.

Lema 5.3.34.

a) $\vdash_T (p \to \Diamond p)$.

b) *T es una extensión de D.*

c) *Si en T es teorema* $(\alpha \to \beta)$*, también lo es* $(\Box\alpha \to \Diamond\beta)$.

d) $\vdash_T \Diamond(p \to \Box p)$.

Demostración. Los incisos a), b) y c) quedan como ejercicio para el lector.
Probemos (d)

1. $\Diamond(p \to \Box p) \leftrightarrow (\Box p \to \Diamond\Box p)$ teorema de K.
2. $(\Box p \to \Diamond\Box p)$ por (a).
3. $\Diamond(p \to \Box p)$ MP de 1 y 2.

□

Definición 5.3.35. Llamaremos S_4 al sistema que resulta de agregar a T el axioma $(\Box p \to \Box\Box p)$ denominado 4, esto es, $S_4 = K + \{(\Box p \to p), (\Box p \to \Box\Box p)\}$.

Lema 5.3.36. *En* S_4 *los siguientes son teoremas.*

a) $\Box\Box\alpha \to \Box\alpha$ *axioma T.*

b) $\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ *dual del axioma 4.*

c) $\Box\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha$.

d) $\Box\Diamond\Box\alpha \to \Diamond\Box\alpha$ *axioma T.*

e) $\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\Box\Diamond\alpha$ *dual de (d).*

f) $\Diamond\Box\alpha \to \Diamond\Box\Diamond\alpha$ *dual de (c).*

g) $\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$.

h) $\Box\alpha \to \Box\Diamond\Box\alpha$ *dual de (g).*

Demostración. Sólo se demostrarán los incisos (c) y (g), el resto se justifica por dualidad.

c) $\Box\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

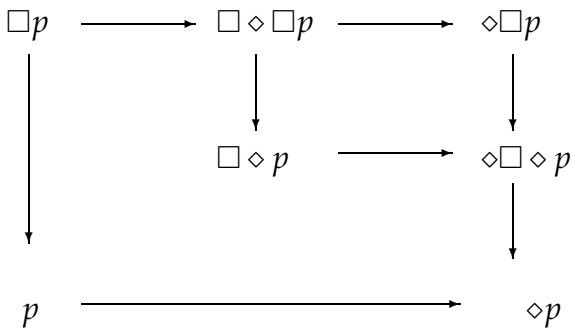
1. $\Box\alpha \to \alpha$ T
2. $\Diamond\Box\alpha \to \Diamond\alpha$ distribución de $\Diamond$ a 1).
3. $\Box\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha$ por distribución.

g) $\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$

1. $\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ axioma T
2. $\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\Diamond\alpha$ distribución de $\Diamond$.
3. $\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ por b)
4. $\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ consecuencia lógica de 2 y 3.

Definición 5.3.37. Una modalidad es una sucesión compuesta de 0 o más de los siguientes símbolos: $\neg$, $\Box$ y $\Diamond$. Diremos que dos modalidades X y Y son iguales en un sistema axiomático S si $\vdash_s X\alpha \leftrightarrow Y\alpha$ para cualquier fórmula α. Por ejemplo, en S_4, $\Box$ y $\Box\Box$ son iguales (por a) del teorema anterior y el axioma 4.

Hemos demostrado que en S_4 las modalidades siguientes se encuentran en las relaciones de implicación que aparecen en el diagrama:



Teorema 5.3.38. *Cualquier modalidad que no contenga el signo de negación es igual en S_4 a una de las modalidades que aparecen en el diagrama anterior.*

Para la demostración de este teorema, dados a) y b) del lema anterior, basta demostrar el siguiente

Lema 5.3.39.

a) $\vdash_{S_4} \Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$.

b) $\vdash_{S_4} \Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$.

Demostración. a) 1. $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$ dual del axioma T.

2. $\Box\Box\diamond p \to \Box\diamond\Box\diamond p$ distribución a 1).
3. $\Box\diamond p \to \Box\Box\diamond p$ axioma S_4
4. $\Box\diamond p \to \Box\diamond\Box\diamond p$ consecuencia tautológica 2 y 3
5. $\Box\diamond p \to \diamond p$ T
6. $\diamond\Box\diamond p \to \diamond\diamond p$ distribución.
7. $\diamond\diamond p \to \diamond p$ converso del axioma 4
8. $\diamond\Box\diamond p \to \diamond p$ consecuencia tautológica 6 y 7
9. $\Box\diamond\Box\diamond p \to \Box\diamond p$ distribución aplicado a 8
10. $\Box\diamond\Box\diamond p \leftrightarrow \Box\diamond p$ consecuencia tautológica 4 y 9.

□

Teorema 5.3.40. *En S_4 hay exactamente catorce modalidades diferentes.*

La prueba (que dejaremos al lector) requerirá el empleo de nociones semánticas que veremos más adelante.

Definición 5.3.41. Llamaremos S_5 al sistema $T + \{\diamond p \to \Box\diamond p\}$. La fórmula $(\diamond p \to \Box\diamond p)$ a veces es denotada por «5».

Teorema 5.3.42. *En S_5 hay a lo sumo seis modalidades diferentes.*

Demostración. Son teoremas de S_5:

a) $\diamond p \leftrightarrow \Box\diamond p$

b) $\diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$

c) $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$

d) $\diamond\diamond p \leftrightarrow \diamond p$.

Suponiendo (a) y (b) cuyas pruebas son evidentes, demostremos que $\vdash_{S_5} \Box p \to \Box\Box p$. (Mitad de c))

1. $\diamond\Box p \leftrightarrow \Box\diamond\Box p$ instancia de (a)
2. $\Box p \to \diamond\Box p$ teorema de T.
3. $\Box p \to \Box\diamond\Box p$ consecuencia tautologica de 1 y 2
4. $\diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$ (b)
5. $\Box\diamond\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ distribución aplicado a 4
6. $\Box p \to \Box\Box p$ consecuencia tautológica 3 y 5.

Corolario 5.3.43. *S_5 es una extensión de S_4.*

Definición 5.3.44. El sistema $B = K + \{p \to \Box \diamond p\}$ y también llamaremos B a la fórmula $(p \to \Box \diamond p)$.

 **Teorema 5.3.45.** *Si α y β son tales que $\vdash_B (\Box\alpha \to \beta)$ entonces $\vdash_B (\alpha \to \diamond\beta)$.*

Supongamos que una prueba en B finaliza con,

$$(\Box\alpha \to \beta).$$

Entonces puede continuar así,
$(\diamond\Box\alpha \to \diamond\beta)$
$\alpha \to \diamond\Box\alpha$
$\alpha \to \diamond\beta$

 **Teorema 5.3.46.** *S_5 es una extensión de B.*

Demostración. Queremos probar que $\vdash_{S5} \quad p \to \Box \diamond p$.

1. $p \to \diamond p$ teorema de T
2. $\diamond p \to \Box \diamond p$ axioma S_5
3. $p \to \Box \diamond p$ consecuencia tautológica de 1 y 2.

 **Teorema 5.3.47.** *Sea S un conjunto de fórmulas de LMP y $K + S$ el sistema axiomático que se obtiene al agregar a K como axiomas los miembros de S. Si todas las fórmulas de S son válidas en la clase de marcos M y α es un teorema de $K + S$, α es válida en M.*

No es necesario dar la prueba porque ya vimos que los axiomas de K son válidos y que las reglas de inferencia de K preservan validez. De aquí concluimos que para probar que que los teoremas de $K + S$ son válidos en una clase de marcos solo debemos verificarlo para los elementos de S, pero eso es parte de la hipótesis.

Recuerde que si S y R son sistemas axiomáticos, «$R < S$» significa que todo teorema de R es teorema de S pero no a la inversa.

Lema 5.3.48.

$$K < T.$$

Demostración. Es obvio que todo teorema de K es teorema de T. Falta demostrar que $(\Box p \rightarrow p)$ no es teorema de K, es decir (dado el teorema anterior), que tiene un contraejemplo. Sea $M = \langle W, R, V\rangle$ tal que $W = \{w\}$, $V(w, p) = falso$ y $R = \varnothing$. Entonces $M, w \not\models (\Box p \rightarrow p)$.

Teorema 5.3.49. *Sea α una fórmula de LMP.*

a) $\vdash_K \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo modelo.*

b) $\vdash_{k_4} \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco transitivo.*

c) $\vdash_T \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco reflexivo.*

d) $\vdash_D \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco serial.*

e) $\vdash_B \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco reflexivo y simétrico.*

f) $\vdash_{S_4} \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco reflexivo y transitivo.*

g) $\vdash_{S_5} \alpha$ *si y sólo si* α *es verdadera en todo marco de equivalencia.*

Demostración. Ahora solo demostraremos los condicionales de izquierda a derecha. El caso a) es un consecuencia trivial del teorema de corrección de K. Para demostrar que si $\vdash_{k_4} \alpha$, entonces α es verdadera en todo marco transitivo, basta probar el resultado para el esquema $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ (de acuerdo con el teorema anterior). Sea $M = \langle W, R, V\rangle$ un modelo. Supongamos que en $w \in W$, $\Box\alpha$ es verdadero y $\Box\Box\alpha$ es falsa.

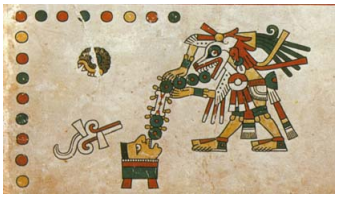
Entonces en todo mundo $v \in W$ tal que Rwv, α es verdadero (*) y existen mundos x y z en W tales que Rwx y Rxz y α es falsa en z. Por (*), $\neg Rwz$. Por tanto, R no es transitiva. Para demostrar que si $\vdash_T \alpha$, entonces α es verdadera en todo marco reflexivo, basta probar que $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ es válida en todo marco reflexivo. Supongamos que $\Box\alpha$ es verdadera y α falsa en w. Entonces para cualquier v tal que Rwv, α es verdadera en v. Por lo tanto, no ocurre que Rww y R no es reflexiva. Se prueban de manera similar los condicionales correspondientes de los otros incisos. Los condicionales inversos se probarán en la siguiente sección.

El hombre se puso una piel de tigre y convertido en tigre salió al monte a buscar a los animales.

Su primer encuentro fue con los armadillos, pero vio a éstos como si fueran una muchedumbre de gente con gran cargamento de palos, con lo cual se atemorizó mucho y tuvo que huir. Lo mismo le ocurrió con los tepezcuintles, a los que vio como un enorme grupo de gente vieja que se

le acercaba vociferando; también los venados se le aparecieron como si fueran bachajontecos armados de lanzas. De igual modo, su encuentro con los jabalíes lo aterró e hizo huir, pues los vio como una gente feroz que hacía sonar sus machetes, rompiendo la maleza a su paso.

Relato chol



Entonces se sentó el tlacuache. El anciano permaneció ahí y se durmió. Al estar durmiendo, tomó el tlacuache el fuego con la cola. Poco a poco la fue retirando y el anciano despertó.

«Te estás llevando el fuego, nieto mio.»

«No, lo estoy soplando.»

Nuevamente se durmió el anciano. Esta vez se durmió profundamente. Mientras éste roncaba, el tlacuache se fue levantando poco a poco y cogió el fuego. Y lo fue deslizando lentamente. Pronto se encontró en las cercanías de la cornisa.

En esto se despertó el anciano y observó aquello. En seguida llevó el tlacuache el fuego hasta las cercanías de la cornisa. De inmediato se levantó el anciano y lo persiguió. Lo alcanzó en la cornisa y el fuego resbaló, yéndose en picada.

Su abuelo llegó corriendo hasta muy cerca. En la carrera lo golpeó repetidas veces con un palo. Él también lo agarró y lo tiró al suelo muchas veces con su bastón. Prendió fuego, se hizo pedazos y se deslizó hacia abajo. Al tiempo que hacía esto, se alejó: «No me vas a quitar el fuego, tlacuache...»

Mito cora

5.4 Completud

Daremos ahora un esbozo de una prueba del teorema de completud para K, es decir, probaremos que toda fórmula válida es teorema de K. Los teoremas correspondientes para sistemas de lógica modal predicativa se demuestran de manera similar, y nos convendrá tener en mente el caso proposicional para cuando lleguemos al caso más complejo.

Definición 5.4.1. Sea S un sistema de lógica modal proposicional. Dado un conjunto Γ de fórmulas de LMP, diremos que Γ es S inconsistente si existe un subconjunto finito de Γ, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, tal que

$$\vdash_S \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n),$$

o equivalentemente

$$\vdash_S ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1}) \rightarrow \neg\alpha_n),$$

o también que

$$\vdash_S (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \bot,$$

donde $\bot$ es cualquier contradicción (digamos $(P \wedge \neg P)$).

En caso contrario, diremos que Γ es S consistente.

Notación: que hay un subconjunto finito $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ de Γ tal que $\vdash_S ((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$ lo denotaremos $\Gamma \vdash_S \alpha$. Por otro lado, $\Gamma \nvdash_S \alpha$ significará que no es ese el caso.

Lema 5.4.2. *$\Gamma \nvdash_S \alpha$ y solo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es S consistente.*

Demostración. Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es S inconsistente, hay un subconjunto $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n, \neg\alpha\}$ de $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ tal que

$$\vdash_S ((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha),$$

es decir, $\Gamma \vdash_S \alpha$. El condicional inverso es igualmente obvio. ❐

Lema 5.4.3. *Si Γ es S consistente y $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es S inconsistente, entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es S consistente.*

Demostración. Si también $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ fuera S inconsistente, entonces existirían $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subset \Gamma$ y $\{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_m, \neg\alpha\} \subset \Gamma$, tales que

$$\vdash_S (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \neg\alpha$$

y

$$\vdash_S (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \rightarrow \alpha.$$

Por lo tanto, $\vdash_S (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$; en consecuencia,

$$\vdash_S \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m),$$

pero

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\} \subset \Gamma,$$

lo que contradice la hipótesis de que Γ es S consistente. ❐

Definición 5.4.4. Γ es un conjunto S máximo consistente si es S consistente y para cualquier fórmula α de LMP o $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.

Lema 5.4.5. *Si Γ es un conjunto S máximo consistente y $\Gamma \vdash_S \alpha$, entonces $\alpha \in \Gamma$.*

Demostración. Si se cumple el antecedente y $\alpha \notin \Gamma$, entonces $\neg\alpha \in \Gamma$ y, por lo tanto, $\Gamma \vdash_S \alpha$ y $\Gamma \vdash_S \neg\alpha$, de lo cual se sigue que $\Gamma \vdash_S \bot$, lo que contradice la hipótesis. ❐

Lema 5.4.6. *Sea Γ un conjunto S-consistente. Cada Σ tal que $\Gamma \subsetneq \Sigma$ es S-inconsistente si y solo si Γ es S máximo consistente.*

Demostración. Supongamos que Γ es S-máximo consistente y que $\Gamma \subsetneq \Sigma$. Entonces existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\alpha \notin \Gamma$. De ahí que $\neg\alpha \in \Gamma \subset \Sigma$. Por lo tanto, $\alpha \in \Sigma$ y $\neg\alpha \in \Sigma$, entonces Σ no es S-consistente. Por otro lado, supongamos que Γ es S-consistente, pero no S-máximo consistente. Entonces hay una fórmula α tal que $\alpha \notin \Gamma$ y $\neg\alpha \notin \Gamma$. Como ya vimos uno de esos conjuntos tiene que ser S-consistente. Supongamos que ocurre lo primero. Entonces $\Gamma \subsetneq \Gamma \cup \{\alpha\}$ y $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es S-consistente. ❐

Lema 5.4.7. *Si Γ es un conjunto S máximo consistente,*

a) $\neg\neg\alpha \in \Gamma$ *sy solo si* $\alpha \in \Gamma$.

b) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \in \Gamma$ *y* $\beta \in \Gamma$.

c) $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \in \Gamma$ *o* $\beta \in \Gamma$.

d) $\alpha \to \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \notin \Gamma$ *o* $\beta \in \Gamma$.

e) $\alpha \leftrightarrow \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* ($\alpha \in \Gamma$ *si y sólo si* $\beta \in \Gamma$).

Demostración. a) Si $\neg\neg\alpha \in \Gamma$ y Γ es un conjunto S máximo consistente, puesto que $\Gamma \vdash_S \alpha$, $\alpha \in \Gamma$. El condicional inverso y los demás incisos se demuestra análogamente. □

Teorema 5.4.8. *Todo conjunto S consistente es subconjunto de un conjunto S máximo consistente.*

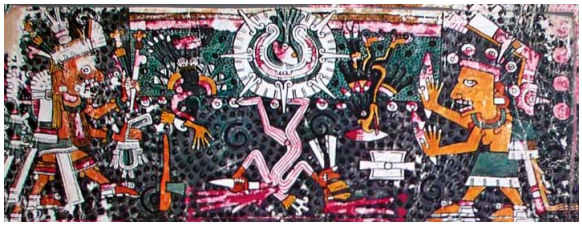
Demostración. Sea Γ un conjunto S consistente. Construiremos una sucesión de conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, cada uno de los cuales será S consistente y estará contenido en el siguiente.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de LMP.

Sea $\Gamma_0 = \Gamma$ y para toda $n > 0$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ si $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ es S consistente y $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ en otro caso.

Ahora bien, comprobemos que cada Γ_i es S consistente. Γ_0 lo es por hipótesis. Supongamos que Γ_i es S consistente entonces o $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$ es S consistente o $\Gamma_i \cup \{\neg\alpha_i\}$ lo es (o ambos), por el lema 5.4.3. En cualquier caso, Γ_{i+1} es S consistente. Sea $\Gamma^* = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \ldots$ Claramente Γ^* es S consistente pues si no tendría un subconjunto finito S inconsistente que estaría contenido en algún Γ_i. Ahora bien, Γ^* es S máximo consistente pues dada una fórmula de LMP, α, existe un natural i tal que $\alpha = \alpha_i$ y bien $\Gamma_i \cup \{\neg\alpha_i\}$ o $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$ (o ambos) es S consistente. En el primer caso, $\neg\alpha \in \Gamma$ y en los otros dos, $\alpha \in \Gamma$.

□



Ahora construiremos un modelo al que llamaremos «modelo canónico de S» y al que denotaremos con M_S y que tendrá la propiedad de que una fórmula será válida en M_S si y sólo si es teorema de S.

Si U es un conjunto de fórmulas de LMP, $\Box^{-1}(U) = \{\alpha \in Fml(LMP) \mid \Box\alpha \in U\}$, donde $Fml(LMP)$ es el conjunto de fórmulas de LMP .

Definición 5.4.9. M_S es la terna $\langle W_S, R_S, V_S\rangle$ tales que: $W_S = \{w \subseteq Fml(LMP) \mid w \text{ es máximo consistente}\}$. Si $v, w \in W_S$, entonces $R_S vw$ si y sólo $\Box^{-1}(w) \subseteq v$. Si γ es una letra proposicional $V_S(w, \gamma) = verdadero$ si y sólo si $\gamma \in w$.

Teorema 5.4.10. *Sea α una fórmula de LMP. Para cualquier $w \in W_S$, $M, w \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in w$.*

Demostración. Por inducción sobre el número de conectivos de la fórmula. En el caso de una letra proposicional, el teorema se cumple por definición.

Si α es $\neg\beta$. $M, w \models \alpha$ si y solo si $M, w \not\models \beta$ y esto si y sólo si (por hipótesis de inducción) $\beta \notin w$, y esto si sólo si $\alpha \in w$ (por ser w máximo consistente). El teorema se demuestra de la misma forma para el caso del condicional. Supongamos ahora que α es $\Box\beta$. Sea $v \in W_S$ tal que $R_S wv$. Si $\Box\beta \in w$, entonces (por construcción del modelo canónico) $\beta \in v$. Por hipótesis de inducción, $M, v \models \beta$. Como esto ocurre para cada mundo accesible a w, $M, w \models \alpha$. Ahora bien, si $\Box\beta \notin w$, entonces $\neg\Box\beta \in w$. Sea $z = \Box^{-1}(w) \cup \{\neg\beta\}$. Probaremos que z es S-consistente. Si no fuese así, existiría $\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\} \subseteq z$ tal que $\vdash_S (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) \rightarrow \beta$ Por lo tanto, $\vdash_S (\Box\omega_1 \wedge \ldots \wedge \Box\omega_n) \rightarrow \Box\beta$ y como $\{\Box\omega_1, \ldots, \Box\omega_n\} \subseteq w$, entonces $\Box\beta \in w$, lo que no puede ser (pues w es S consistente). Por lo tanto, z es subconjunto de un conjunto S máximo consistente v (y, por lo tanto, $v \in W_S$). Como $\Box^{-1}(w) \subseteq z \subseteq v$, $R_S wv$. Como $\neg\beta \in v$, $\beta \notin v$ y, por hipótesis de inducción, $M, v \not\models \beta$. En consecuencia, $M, w \not\models \Box\alpha$. ☐

Teorema 5.4.11. *$\vdash_S \alpha$ si y sólo si α es válida en M_S.*

Demostración. Si $\vdash_S \alpha$, entonces α es miembro de todo conjunto Γ máximo consistente y, por lo tanto, de todo mundo w de M_S. Por el teorema 5.4.10, α es verdadera en todo $w \in W_S$. Por otro lado, si $\nvdash_S \alpha$ entonces $\neg\alpha$ es S consistente y existe un conjunto w S máximo consistente tal que $\neg\alpha \in w$ (y $w \in W_S$). Por el teorema 5.4.10, α es falsa en w y, por lo tanto, no es válida en M_S. ☐

Con estos elementos podemos demostrar el inciso a) del teorema 5.3.49.

Corolario 5.4.12. *Si α es válida en todo modelo, entonces $\vdash_K \alpha$.*

Demostración. Si α es válida en todo modelo, α es verdadera en M_K y, por lo tanto, es teorema de K. ☐

Lema 5.4.13. *M_{K_4} es transitivo.*

Demostración. Supongamos que $w, v, z \in W_{K_4}$ y que $R_{K_4} wv$ y $R_{K_4} vz$. Dada la construcción del modelo canónico, basta demostrar que si $\Box\alpha \in w$, entonces $\alpha \in z$. Pero $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ es teorema de K_4 y, por lo tanto, pertenece a cada conjunto K_4 máximo consistente. Entonces $\Box\alpha$ y $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ pertenecen a w. Por el lema 5.4.5, $\Box\Box\alpha \in w$ y por el teorema 5.4.10, $w \models \Box\Box\alpha$; por lo tanto, $z \models \alpha$. Por el teorema 5.4.10, $\alpha \in z$. ☐

Corolario 5.4.14. *Si α es válido en todo marco transitivo, $\vdash_{K4} \alpha$.*

Demostración. Si α es válido en todo marco transitivo, α es válido en M_{K_4} (por el lema anterior) y, por el teorema 5.4.11, $\vdash_{K_4} \alpha$.

De la misma forma se prueba el inverso de los condicionales del teorema 5.3.49: verificando que, en cada caso, el marco del modelo canónico pertenezca a la clase de marcos correspondientes. ❐

Dado que muchos ejemplos de lógica modal recurren a las modalidades temporales (relativas al pasado y al futuro), que son más intuitivas que las aléticas (es decir, las referentes a la necesidad metafísica), daremos en la siguiente sección una breve introducción a la lógica temporal.

5.5 Lógica temporal

Una lógica en la que figuran varios operadores modales se llama multimodal. Un ejemplo de ello que nos será particularmente útil es el de la lógica temporal. Su lenguaje combina además de los habituales operadores lógicos, dos operadores modales, F, P[5]. Uno representa el futuro y el otro el pasado. Por ejemplo, si Q es el enunciado «Hay una guerra naval», FQ y PQ representan respectivamente los enunciados «Habrá una guerra naval» y «Hubo una guerra naval». Por otro lado
FPQ
PPQ
$P\neg Q \wedge \neg Q \wedge F\neg Q$, significarán respectivamente:
Alguna vez habrá habido una guerra naval.
Alguna vez había habido una guerra naval.
Nunca ha habido ni hay ni habrá una guerra naval.

Además de estos dos operadores F y P que concatenados a una fórmula producen otra, suelen introducirse otros dos H y G definidos de la siguiente manera,
$HQ \equiv_{def} \neg P\neg Q$
$Gq \equiv_{def} \neg F\neg q$
es decir HQ será verdadero si Q siempre ha sido verdadero (en el pasado, sin incluir el momento presente), y GQ que Q siempre será verdadero. Por supuesto que estos operadores deberán estar relacionados entre sí para representar el orden temporal. Por ejemplo, esperamos que $Q \to HFQ$ sea válida. Los modelos contendrán mundos posibles (que representarán instantes o puntos temporales) y una sola relación R de accesibilidad. Si $M = \langle T, R, V\rangle$ y $t \in T$ entonces $M, t \vDash FQ$ si y solo si hay un $v \in T$ tal que tRv y $M, v \vDash Q$; mientras que $M, t \vDash PQ$ si y solo si hay un $v \in T$ tal que vRt y $M, v \vDash Q$.

[5] A veces se utlizan los símbolos $\langle F\rangle$ y $\langle P\rangle$ para estos operadores y en algunos ejemplos más adelante los emplearemos, pero ahora simplificaremos la notación. Desde luego, en esta sección no usaremos P como letra proposicional.

Además un marco temporal $\langle T, R\rangle$ debe tener una estructura que podamos atribuirle a la sucesión temporal, aunque al respecto hay muchas posibilidades y, como ocurre con la lógica modal alética (donde $\Box Q$ simboliza que Q es necesario), conviene primeramente situarse en el caso más general, es decir, donde las propiedades impuestas a R sean mínimas.

Empecemos por presentar el sistema K_T de lógica proposicional. Los enunciados o fórmulas de K_T se construyen a partir de letras proposicionales, los usuales conectivos lógicos y los ya mencionados operadores temporales F y P. G y H son definidos como queda dicho. Los axiomas de K_T son los enuciados que tienen algunas de las siguiente formas.

1. Una instancia de tautología.
2. $G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$.
3. $H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$.
4. $\alpha \to HF\alpha$.
5. $\alpha \to GP\alpha$.

Las reglas de inferencia de K_T son

a) Modus ponens.

b) Si $\vdash_{K_T} \alpha$ entonces $\vdash_{K_T} G\alpha$ (**Regla G**).

c) Si $\vdash_{K_T} \alpha$ entonces $\vdash_{K_T} H\alpha$ (**Regla H**).

Como se aprecia F y P juegan un papel simétrico, así como G y H. Dado que G y H se rigen por axiomas similares a $\Box$ en K, sabemos que ciertas fórmulas que los contienen son válidas en K_T. Por ejemplo:
$\vdash_{K_T} H(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (H\alpha \wedge H\beta)$.
$\vdash_{K_T} G(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (G\alpha \wedge G\beta)$..
$\vdash_{K_T} (H\alpha \vee H\beta) \to H(\alpha \vee \beta)$.
$\vdash_{K_T} (G\alpha \vee G\beta) \to G(\alpha \vee \beta)$.

De allí pueden derivarse fácilmente otros teoremas, por ejemplo
$\vdash_{K_T} H(\alpha \to \beta) \to (P\alpha \to P\beta)$ **Distribución HP**.
$\vdash_{K_T} G(\alpha \to \beta) \to (F\alpha \to F\beta)$ **Distribución GF**.

Demostraremos una de ellos enseguida.

Demostración. 1. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

2. $G[(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)]$

3. $G(\alpha \to \beta) \to G(\neg\beta \to \neg\alpha)$

4. $G(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (G\neg\beta \to G\neg\alpha)$

5. $(G\neg\beta \to G\neg\alpha) \to (\neg G\neg\alpha \to \neg G\neg\beta)$

6. $G(\alpha \to \beta) \to (\neg G\neg\alpha \to \neg G\neg\beta)$

7. $G(\alpha \to \beta) \to (F\alpha \to F\beta)$.

□

Otros ejemplos de teoremas básicos muy sencillos son
$\vdash PG\alpha \to \alpha$
y
$\vdash FH\alpha \to \alpha$. Probemos el segundo.

Demostración. 1. $\neg\alpha \to GP\neg\alpha$

2. $\neg GP\neg\alpha \to \alpha$

3. $F\neg P\neg\alpha \to \alpha$

4. $FH\alpha \to \alpha$.

□

Es fácil verificar que los axiomas son válidos en todos los modelos. Comprobemos el caso de $\alpha \to HF\alpha$. Eliminadas las abreviaturas, la fórmula queda así $\alpha \to \neg P\neg F\alpha$. Supongamos que $M, t \vDash \alpha$ y que $M, t \nvDash \neg P\neg F\alpha$ o que $M, t \vDash P\neg F\alpha$. Entonces existe v tal que vRt y $M, v \vDash \neg F\alpha$ pero como $M, t \vDash \alpha$, $M, v \vDash F\alpha$ lo que es contradictorio.

Probar que el sistema es completo con respecto a la semántica dada con la técnica del modelo canónico no ofrece ninguna dificultad particular.

Hasta ahora no hemos supuesto que la estructura del modelo tenga alguna característica de las que intuitivamente le atribuimos al flujo temporal. Lo normal es concebir al tiempo como un conjunto linealmente ordenado. Puede ser un orden discreto o denso o continuo, puede tener o no un comienzo o un fin, pero por el momento solo supondremos que la relación R es un orden, es decir, R es irreflexivo, transitivo y que cualesquiera dos puntos relacionados con un tercero están relacionados entre sı. Llamaremos «**marco temporal lineal**» a un marco $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ en que R tiene estas características. Como siempre una fórmula es válida en un modelo si es verdadera en todos los puntos del modelo. Asimismo diremos que una fórmula es válida en una clase C de marcos si es válida en todo modelo cuyo marco pertenece a C.

El conjunto de enunciados válidos en los marcos temporales lineales puede ser axiomatizado de la siguiente manera. Simplemente agreguemos a los axiomas de K_T, los siguientes esquemas,

6. $H\alpha \to HH\alpha$.

7. $(F\alpha \wedge F\beta) \to (F(\alpha \wedge \beta) \vee F(\alpha \wedge F\beta) \vee F(F\alpha \wedge \beta))$.

8. $(P\alpha \wedge P\beta) \to (P(\alpha \wedge \beta) \vee P(\alpha \wedge P\beta) \vee P(P\alpha \wedge \beta))$.

Al sistema resultante lo denominaremos lógica temporal lineal y que α es teorema de ese sistema será denotado por $\vdash_{LLT} \alpha$. Advierta que, en lugar de (6), pudimos poner $(PP\alpha \to P\alpha)$ como lo prueba la siguiente sucesión de equivalencias,
$H\neg\alpha \to HH\neg\alpha$
$\neg P\alpha \to \neg PP\alpha$
$PP\alpha \to P\alpha$.

Por otro lado, es de notarse que no requerimos de $G\alpha \to GG\alpha$ o equivalentemente, de $FF\alpha \to F\alpha$ aunque ambos esquemas son válidos en los marcos lineales temporales.

Lema 5.5.1.

$$\vdash_{LLT} PG\alpha \to \alpha.$$

Demostración. 1. $\neg\alpha \to HF\neg\alpha$ axioma.

2. $\neg\alpha \to \neg PG\alpha$ equiv. 1.

3. $PG\alpha \to \alpha$ contrapositiva.

□

Lema 5.5.2.

$$\vdash_{LLT} G\alpha \to GG\alpha.$$

Demostración. 1. $PPG\alpha \to PG\alpha$ dual del axioma 6.

2. $PG\alpha \to \alpha$ lema anterior.

3. $PPG\alpha \to \alpha$ Transitividad 1,2.

4. $G(PPG\alpha \to \alpha)$ regla de inferencia G a 3.

5. $GPPG\alpha \to G\alpha$ distribución a 4.

6. $PG\alpha \to GPPG\alpha$ axioma 5.

7. $PG\alpha \to G\alpha$ Conscuencia tautológica de 5 y 6.

8. $G(PG\alpha \to G\alpha)$ regla G a 7.

9. $GPG\alpha \to GG\alpha$ distribución 8.

10. $G\alpha \to GPG\alpha$ axioma 5.

11. $G\alpha \to GG\alpha$ Transitividad 9 y 10.

□

Otros axiomas pueden agregarse a los anteriores que corresponden a otras características que pueden atribuirse a la sucesión temporal. Por ejemplo, $(H\perp \vee PH\perp)$ es válida en un modelo temporal lineal si en este cada linea temporal tiene un comienzo, es decir, para cada $t \in T$, el conjunto $\bar{t} = \{z|zRt\}$ tiene un elemento mínimo, es decir, un elemento s tal que sRw para todo $w \in \bar{t}$ y $w \neq s$. En efecto si z valida $H\perp$ no puede tener predecesor. Si, en cambio, valida $PH\perp$ entonces hay un antecesor de z con esa propiedad. Sin embargo, es más intuitivo suponer que las líneas temporales no tienen principio ni fin. A ellos corresponden los dos siguientes axiomas.

9. PT.
10. FT donde T es una tautología.

Al sistema que se obtiene agregando PT y FT a los axiomas de LLT se le conoce como SL. Es decir, $LLT + NP + NF = SL$.

Lema 5.5.3. *a)* $\vdash_{SL} H\alpha \to P\alpha$.

b) $\vdash_{SL} G\alpha \to F\alpha$.

Demostración. *a)*

1. $T \to (\alpha \to \alpha)$
2. $PT \to P(\alpha \to \alpha)$ distribución.
3. PT
4. $P(\alpha \to \alpha)$
5. $P(\neg\alpha \vee \alpha)$ equivalencia 4.
6. $(P\neg\alpha \vee P\alpha)$
7. $(\neg H\alpha \vee P\alpha)$
8. $(H\alpha \to P\alpha)$.

□

Lema 5.5.4. $\vdash_{SL} (\neg F\alpha \to F\neg\alpha)$.
$\vdash_{SL} (\neg P\alpha \to P\neg\alpha)$.

Demostración. 1. $G\alpha \to F\alpha$

2. $\neg F\alpha \to \neg G\alpha$

3. $\neg F\alpha \to F\neg\alpha$.

□

Lema 5.5.5. $\vdash_{SL} (G\neg\alpha \to \neg G\alpha)$.
$\vdash_{SL} (H\neg\alpha \to \neg H\alpha)$.

Correspondiente a un orden temporal denso está el axioma $P\alpha \to PP\alpha$ o equivalentemente, $HH\alpha \to H\alpha$. Al sistema que resulta de adjuntarlo a la lista de axiomas dados el axioma $HH\alpha \to H\alpha$ lo llamaremos SLQ. Vamos a probar que $\vdash_{SLQ} GG\alpha \to G\alpha$. Una prueba es la siguiente.

1. $HH\neg GG\alpha \to H\neg GG\alpha$ axioma.

2. $\neg PPGG\alpha \to \neg PGG\alpha$ equivalencia 1.

3. $PGG\alpha \to PPGG\alpha$ contrapositiva 2.

4. $PGG\alpha \to G\alpha$ lema ya probado.

5. $H(PGG\alpha \to G\alpha)$ regla G.

6. $PPGG\alpha \to PG\alpha$ distribución HP.

7. $PGG\alpha \to PG\alpha$ transitividad 3 y 6.

8. $PG\alpha \to \alpha$ lema ya probado.

9. $PGG\alpha \to \alpha$ transitividad 7 y 8.

10. $G(PGG\alpha \to \alpha)$ regla G a 9.

11. $GPGG\alpha \to G\alpha$ distribución 10.

12. $GG\alpha \to GPGG\alpha$ axioma 5 de K_T.

13. $GG\alpha \to G\alpha$ transitividad 11 y 12.

Lema 5.5.6. $\vdash_{SLQ} G\alpha \to GP\alpha$
$\vdash_{SLQ} H\alpha \to HF\alpha$

Demostración. 1. $\alpha \to HF\alpha$ axioma de K_T.

2. $H(\alpha \to HF\alpha)$ regla G a 1.

3. $H\alpha \to HHF\alpha$ distribución 2.

4. $HHF\alpha \to HF\alpha$ axioma.

5. $H\alpha \to HF\alpha$ transitividad 3 y 4.

□

Corolario 5.5.7. $\vdash_{SLQ} PG\alpha \to P\alpha$
$\vdash_{SLQ} FH\alpha \to F\alpha$

Como dijimos, la prueba de compretud de K_T con respecto a la clase de todos los modelos es sencilla. En cambio, para la lógica temporal lineal y sus extensiones la prueba de completud presenta varias dificultades y la omitiremos. Antes de dejar el tema de los órdenes lineales es interesante preguntarnos si es posible caracterizar un orden lineal discreto hacia adelante (es decir donde cada punto tiene un único sucesor). Además de los axiomas de LLT y de sus reglas de inferencia, requerimos del axioma

$$(FT \wedge Q \wedge HQ) \to FHQ.$$

Para comprobarlo supongamos un modelo $M = \langle T, R, v\rangle$ discreto hacia delante y sea $t \in T$ tal que

$$M, t \vDash FT \wedge Q \wedge HQ.$$

Esto significa que $\{v \in T | tRv\} \neq \emptyset$ y que cualquier punto anterior o identico a t valida Q. Sea z tal que tRz, entoncs $M, z \vDash HQ$ y por lo tanto $M, t \vDash FHQ$. Que el sucesor es único se sigue de los axiomas de LTL.
Por otro lado si el marco $\langle W, R\rangle$ no es discreto hay una intepretación y un punto s en que esa fórmula es falsa. En efecto supongamos que s es tal que tal que $\emptyset \neq \{z \in T | sRz\}$ no tiene mínimo y sea w tal que sRw. Sea V una valuación tal que $V(z, Q) = verdadero$ si y solo si $z = s$, $z = w$ o $z \in \{x | xRs\}$. Entonces, por definición,

$$\begin{gathered} M, s \vDash FT \wedge Q \wedge HQ \\ \text{pero } M, s \nvDash FHQ \\ \text{pues } \forall x(sRx \to \exists y(sRy \wedge yRx)). \end{gathered}$$

Similarmente, $(PT \wedge Q \wedge GQ) \to PGQ$ caracteriza un orden discreto hacia el pasado. Ahora bien, es común suponer que el espacio y el tiempo son continuos. ¿Podemos caracterizar la continuidad del tiempo con una fórmula de nuestro lenguaje? La respuesta es afirmativa. Abreviemos $(P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha)$ como $\Diamond\alpha$ y $(P\alpha \wedge \alpha \wedge F\alpha)$ como $\Box\alpha$. La fórmula que caracteriza la continuidad en un orden lineal, denso y sin extremos es

$$(FQ \wedge \Diamond\neg Q \wedge \Box(Q \to HQ)) \to \Diamond((Q \wedge G\neg Q) \vee (\neg Q \wedge HQ))$$

Para ver su significado, veamos cómo puede ser falsificada en un modelo que tiene un orden $<$ con las propiedades mencionadas salvo la continuidad. Sea $\langle T, <\rangle$ un marco tal. Puesto que no es continuo, es posible hacer una partición de T en dos clases, digamos A y B con los siguientes atributos

1. $A \neq B \neq \emptyset$.

2. $\forall x \forall y\ x \in A$ y $y < x$ entonces $y \in A$.

3. $\forall x \forall y\ x \in B$ y $x < y$ entonces $y \in B$.

4. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = T$.

5. $\forall x\ x \in A \Longrightarrow \exists y\ y \in A, x < y$.
   $\forall x\ x \in B \Longrightarrow \exists y\ y \in B, y < x$.

Sea V tal que $z \in A$ si y solo si $V(Q, z) = \textit{verdadero}$. Sea $t \in A$, entonces $M, t \vDash FQ \wedge \Diamond\neg Q \wedge \Box(Q \to HQ)$ sin embargo, $M, t \nvDash \Diamond((Q \wedge G\neg Q) \vee (\neg Q \wedge HQ))$ pues en cualquier $z \in A$, $M, z \vDash Q$, pero $M, z \nvDash G\neg Q$; y en cualquier $z \in B$, $M, z \models \neg Q$, pero $M, z \not\models HQ$). Concluimos que si el marco valida esa fórmulas es continuo. La demostración del condicional inverso se deja al lector.

Ahora bien, para caracterizar la estrucutura de los número naturales en su orden usual requerimos los axiomas de la lógica temporal lineal, LTL[6] (es decir, los axiomas 1-8) además de FT (axioma 10), y otros dos. El primero expresa el principio de inducción hacia el futuro.

$$(F\alpha \to G(\alpha \to F\alpha)) \to GF\alpha.$$

El segundo caracteriza los marcos transitivos y bien fundados,

$$\textbf{BF} \qquad H(H\alpha \to \alpha) \to H\alpha.$$

En efecto suponga que en un marco transitivo $M = \langle T, R\rangle$, **BF** es válido y que hay un subconjunto D del universo en que R no está bien fundada, es decir, que D no tiene menor elemento. Sea V una valuación tal que $V(z, P) = \textit{falso}$ si y solo si $Z \in D$. Sea $w \in D$ y $v \in T$ tal que vRw. Si $M, v \vDash P$ entonces $M, v \vDash (HP \to P)$. En cambio, si $M, v \nvDash P$ entonces $v \in D$ y existe $z \in D$ tal que zRv y $M, z \nvDash P$ por lo tanto $M, v \nvDash HP$ y $M, v \vDash (HP \to P)$. Por lo tanto, $M, w \vDash H(HP \to P)$. Puesto que $w \in D$, existe $z \in D$ y zRw. se sigue que $M, z \nvDash P$ y, en consecuencia, $M, w \nvDash HP$. En conclusión, $M, w \nvDash H(HP \to P) \to Hp$. Por otro lado, si agregamos a KT como axioma el esquema $H(H\alpha \to \alpha) \to H\alpha$ podemos demostrar $H\alpha \to HH\alpha$ de la siguiente manera

1. $\alpha \to ((HH\alpha \wedge H\alpha) \to (H\alpha \wedge \alpha))$.

2. $\alpha \to (H(H\alpha \wedge \alpha) \to (H\alpha \wedge \alpha))$.

3. $H\alpha \to H[H(H\alpha \wedge \alpha) \to (H\alpha \wedge \alpha)]$ distribución.

4. $(H(H(H\alpha \wedge \alpha)) \to (H\alpha \wedge \alpha)) \to H(H\alpha \wedge \alpha)$ axioma.

5. $H(H\alpha \wedge \alpha) \to (HH\alpha \wedge H\alpha)$ distribución.

[6] Aunque ninguna fórmula garantizará un modelo con el orden de $\mathbb{N}$, el siguiente sistema axiomático solo tendrá modelos en que haya una o varias copias de $\mathbb{N}$.

6. $H\alpha \to (HH\alpha \wedge H\alpha)$ transitividad 3, 4 y 5.

7. $H\alpha \to HH\alpha$ de 6.

Ahora solo falta demostrar que cualquier marco que valida $H\alpha \to HH\alpha$ es transitivo hacia atrás, lo que queda como ejercicio para el lector. Por otro lado, suponga que el marco $\langle T, R\rangle$ es bien fundado y transitivo y que $M = \langle W, R, V\rangle$, $w \in W$ y $M, w \nvDash HP$. Sea $D = \{z \in W | zRw \wedge z \nvDash P\}$. Puesto que $M, w \nvDash HP$, $D \neq \emptyset$. Puesto que W es bien fundado y $\emptyset \neq D \subset T$, D tiene primer elemento. Sea v el primer elemento de D (es decir, para todo $z \in D$, no zRv). Puesto que $v \in D$, $v \nvDash P$. Si mRv, como vRw, mRw y $m \notin D$, entonces $M, m \vDash P$. Por lo tanto, $M, v \vDash HP$ y $M, v \nvDash (HP \to P)$ y $M, w \nvDash H(HP \to P)$, por lo que $M, w \vDash H(Hp \to p) \to Hp$. Por otro lado, si $M, w \vDash Hp$, entonces $M, w \vDash H(Hp \to p) \to Hp$. Concluimos que $H(HP \to P) \to HP$ es válida en el marco $\langle W, R\rangle$.

Mencionaremos de paso dos importantes operaciones binarias introducidas por Kamp en 1968. Son $\mathbb{S}$ (de «since») y $\mathbb{U}$ (de «until») que se definen semánticamente de la siguiente manera. Sea $M = \langle T, R, V\rangle$. Sea $t \in T$ y α y β dos fórmulas, entonces $M, t \vDash \alpha \mathbb{S} \beta$ si y solo si para algún v tal que vRt, $M, v \vDash \beta$ y para cada w tal que vRw y wRt $M, w \vDash \alpha$ y $M, t \vDash \alpha \mathbb{U} \beta$ si y solo si para algún v tal que tRv, $M, v \vDash \beta$ y para todo w tal que tRw y wRv, $M, w \vDash \alpha$.

Los operadores F y P (y, por lo tanto, H y G) pueden ser definidos a partir de S y U de la siguiente manera

$$P\alpha \equiv_{def} T\mathbb{S}\alpha \quad \text{y} \quad F\alpha \equiv_{def} T\mathbb{U}\alpha.$$

donde T es una tautología. En el caso de órdenes lineales discretos (es decir, en cada punto tiene un solo sucesor), es usual estudiarlos a partir de una lógica temporal bivaluada con dos operadores de futuro (y niguno de pasado). Los modelos serán de la forma $\langle T, S, \leqslant, V\rangle$ donde $(t \leqslant v)$ significará que v es un momento posterior o igual a t; y tSv o $S(t) = v$ será verdadero si v es el instante siguiente a t. Los operadores $\bigcirc$ y $\Box$ se agregarán al lenguaje de la lógica clásica proposicional con las siguientes definiciones. $M, t \vDash \Box\alpha$ si y solo si $M, v \vDash \alpha$ para todo v, tal que $t \leqslant v$ y $M, t \vDash \bigcirc\alpha$ si y solo si para v tal que tSv, $M, v \vDash \alpha$. Podemos suponer que todos los modelos tienen la estructura del conjunto de los números naturales en su orden usual y que S corresponde a la relación que cada número tiene con su sucesor. Definimos $\Diamond\alpha$ como $\neg\Box\neg\alpha$ y por lo tanto $M, t \vDash \Diamond\alpha$ si y solo si existe v tal que $t \leqslant v$ y $M, v \vDash \alpha$. Entonces podemos expresar las siguientes proposiciones con las fórmulas que les siguen: $\Box(\alpha \to \bigcirc\beta)$, en cualquier ocasión que ocurra α a partir de ahora en el

siguiente estado sucederá β.
$\bigcirc\alpha \to \bigcirc\Box\alpha$, si α ocurre la próxima vez, ocurrirá para siempre.
$\alpha \to \Diamond\Box\beta$, si α ocurre (ahora) entonces β ocurrirá para siempre a partir de algún momento.

Algunas leyes válidas para el nuevo operador $\bigcirc$ son las siguientes

a) $\bigcirc\neg\alpha \leftrightarrow \neg \bigcirc \alpha$
Llamemos $\mathbb{N}^*$ al marco $\langle \mathbb{N}, <, S\rangle$ entonces $\mathbb{N}^*, n \vDash \bigcirc\neg\alpha$ si y solo si $\mathbb{N}, n+1 \vDash \neg\alpha$ y esto si y solo si $\mathbb{N}, n+1 \nvDash \alpha$ que, a su vez, es equivalente a $\mathbb{N}, n \vDash \neg \bigcirc \alpha$.
Ello depende por supuesto de que cada estado tenga uno y solo un sucesor.

b) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$.

c) $(\Box\alpha \to \bigcirc\Box\alpha)$.

d) $(\alpha \wedge \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)) \to \Box\alpha$.

e) $\Box\alpha \to \alpha$.
Además seguirán manteniéndose válidas:

f) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$.

g) $(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \to \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \vee \Diamond(\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta)$

Ya dijimos que los modelos tendrán la forma $M = \langle \mathbb{N}, S, \leqslant, V\rangle$ pero es importante especificar que la relación entre S y $\leqslant$, a saber, $n \leqslant m \leftrightarrow nS^*_=m$ donde $S^*_=$ es la cerradura reflexiva y transitiva de S. Más precisamente

1. nS^*m si $s(n) = m$.
2. $nS^*S(m)$ si nS^*m y
3. $nS^*_=m$ si y solo si $n = m \vee nS^*m$.

Comprobemos que la fórmula

$$(\alpha \wedge \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)) \to \Box\alpha$$

es válida en esa clase de modelos.

Supongamos que $M, n \vDash \alpha \wedge \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)$. Debemos comprobar que para todo $m \in M$, $M, n+m \vDash \bigcirc\alpha$ o que $M, n+m+1 \vDash \alpha$. Lo probaremos por inducción en m. Supongamos que $M, n+m \vDash \alpha$. Puesto que $M, n \vDash \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)$, $M, n+m \vDash (\alpha \to \bigcirc\alpha)$ y por lo tanto $M, n+m \vDash \bigcirc\alpha$ y $M, n+m+1 \vDash \alpha$.

Si tomamos como axiomas las intancias de los esquemas $a) - g)$ más $i)$ y como reglas de inferencia $j)$ y $k)$ donde,

i) Todas las instancias de tautologías.

j) Si $\vdash \alpha$ entonces $\vdash \Box\alpha$.

k) Modus Ponens,

obtenemos un sistema sólido para este tipo de semántica. ¿Es el sistema completo? Aparentemente tenemos todos los axiomas que caracterizan el marco en cuestión. Sin embargo, en un sentido fuerte de completud, la respuesta es negativa. Observe que si $A = \{P, \bigcirc P, \bigcirc\bigcirc P, \bigcirc\bigcirc\bigcirc P, ...\}$, entonces $A \vDash \Box p$.

Sin embargo, ningun subconjunto finito de A implica P. Puede probarse en cambio (no sin ciertas dificultades en el proceso) que si α es válida en la semántica anterior es también un teorema de dicho sistema.

Tiempo Ramificado

Vimos que un axioma determina la linealidad hacia el pasado y otro, hacia el futuro. Aunque esta simetría parece justa, hay algunas razones para enfocarse en el primer caso. Una de ellas es que resulta intuitiva la idea de que el tiempo pasado y el presente están ya determinados, fijos, mientras que el futuro ofrece alternativas abiertas. En la perspectiva que ahora veremos los operadores de futuro representan una combinación de modalidades temporales y aléticas. Los modelos de los que ahora trataremos tienen la estructura de un árbol ordenado infinito.

Definición 5.5.8. Una estructura $\langle D, R\rangle$ es una árbol A si

a) R es un orden parcial y $\forall x \in D\ \exists y \in D\ xRy$.

b) Existe un único elemento $r \in D$, llamado la raíz del árbol tal que $s \in D$ si y solo si $R^*_{=}rs$.

c) Cada elemento de A, excepto r, tiene un único predecesor es decir,

$$\forall x \in A(x \neq r \to \exists y \forall z(zRx \longleftrightarrow z = y)).$$

d) A es acíclico, es decir, $\neg\exists x\ x \in A$ tal que R^*xx.

Llamemos «nodos» a los elementos de un árbol A. Es fácil probar que si $b \in A$, existe un número natural $n \geqslant 0$ y nodos $a_1, ..., a_n$ en T tales que $rRa_1, a_1Ra_2, ..., a_nRb$ y que n y $a_1, ..., a_n$ son únicos. La sucesión $r, a_1, ..., a_n, b$ es llamada «el camino de r a b» y diremos que tiene longitud $n+1$ o que b tiene nivel $n+1$. Sea $\leqslant$ definido como $x \leqslant y \equiv_{def} R^*_{=}xy$. Si $x \leqslant y$ diremos x es un antecesor de y y y un descendiente de x. Note que dados dos elementos cualesquiera del árbol tienen un antecesor común de máximo nivel. El conjunto de predecesores de un nodo con la relación $\leqslant$ forma un conjunto totalmente ordenado. De nuevo tenemos los operadores F, G, H y P con las mismas definiciones que antes. Sin embargo, F y G no corresponden al significado intuitivo que les atribuíamos. Recuerde que antes $A, t \vDash F\alpha$ si y solo si $A, v \vDash \alpha$ para algún $v > t$ y $A, t \vDash G\alpha$ si y solo si $A, v \vDash \alpha$ para todo $v > t$. En cambio

ahora, en la lectura modal y temporal de este sistems $F\alpha$ significaría que α podrá ser verdadera (y no que α será verdadera). $G\alpha$ se interpretará no como que α siempre será verdadera, sino que α ocurrirá siempre e inexorablemente. Como se ve se, estos operadores combinan una modalidad alética y una temporal. Dado un árbol $A = \langle D, \leqslant \rangle$, llamaremos «rama de A» a un subconjunto linealmente ordenado máximo. Como siempre, cada nodo contiene una valuación de fórmulas atómicas. Dado un nodo, el camino de la raíz hasta él es único, lo que representa la inmutabilidad del pasado, mientras que, más abajo, la rama puede bifurcarse, lo que representa las posibilidades abiertas a futuro. Ahora hay dos modos muy naturales de definir los operadores temporales. En el primero, llamado peirciano, $F\alpha$ es verdadero en un nodo $t \in D$, si en cada rama que pasa por t, hay un instante posterior a t en que α es verdadera. Es decir, $F\alpha$ significa que α ocurrirá tarde o temprano en cualquier curso de eventos después de t. Por otro lado, $G\alpha$ es verdadera en un instante de t si y solo si en cada rama que pasa por t y en cada instante posterior a t, α es verdadera. Es decir, $G\alpha$ significa que α ocurrirá siempre en cualquier curso de eventos despues de t. Si denotamos como R^A al conjunto de ramas de A, podemos expresar estas condiciones de la siguiente manera.

$A, t \vDash F\alpha$ si y solo si para todo $r \in R^A$ si $t \in r$ existe $v \in r$ tal que $t < v$ y $A, v \vDash \alpha$.
$A, t \vDash G\alpha$ si y solo si para todo $r \in R^A$, si $t \in r$, $v \in r$ y $t < v$, entonces $A, v \vDash \alpha$.
$A, t \vDash P\alpha$ si y solo si existe $v \in A$, $v < t$ y $A, v \models \alpha$.
$A, t \vDash H\alpha$ si y solo si para todo $v \in A$ tal que $v < t$, $A, v \models \alpha$.

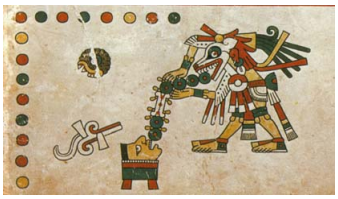
Note que $F\alpha$ no es equivalente a $\neg G\neg\alpha$ pero $P\alpha$ si es equivalente a $\neg H\neg\alpha$. Ahora, por supuesto, hay una asimetría entre pasado y futuro. Por ejemplo,
$(Q \to GPQ)$ es válida
pero
$(Q \to HFQ)$ es inválida.

Mientras que $(PQ \vee P\neg Q)$ es trivialmente válida, $(FQ \vee F\neg Q)$ puede ser falsa en algún nodo de un modelo. $(G\alpha \to F\alpha)$ siempre es válida dada la infinitud de instantes futuros conectados al presente. Por otro lado, $H\alpha \to P\alpha$ es falsa en la raíz del árbol. Un segundo enfoque, llamado ockhamista, consiste en definir la verdad en un nodo relativamente a cada rama que pasa por él. Es decir, una fórmula puede ser verdadera en un nodo N respecto a una rama a la que N pertenece y falso en N con respecto a otra rama que contiene a N. El modelo incluye esta vez una valuación de las letras proposicionales en cada par (r, n) donde n es un nodo y r una rama tal que $n \in r$. La definición de satisfacción es ahora la siguiente. Sea M un modelo, n un nodo y r una rama tal que $n \in r$, entonces

$M, r, n \vDash \sigma$ si y solo si $V(r, n, \sigma) = \textit{verdadero}$ donde σ es una letra proposicional.
$M, r, n \vDash \neg\alpha$ si y solo si $M, r, n \nvDash \alpha$.
$M, r, n \vDash (\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $M, r, n \vDash \alpha$ y $M, r, n \vDash \beta$.
$M, r, n \vDash P\alpha$ si y solo si para algún $v \in r$, tal que $v < n$, ocurre que $M, r, v \vDash \alpha$.
$M, r, n \vDash F\alpha$ si y solo si para algún $v \in r$, tal que $n < v$, ocurre que $M, r, v \vDash \alpha$.
$M, r, n \vDash H\alpha$ si y solo si para todo $v \in r$, tal que $v < n$, ocurre que $M, r, v \vDash \alpha$.

$M, r, n \vDash G\alpha$ si y solo si para todo $v \in r$, tal que $n < v$, ocurre que $M, r, v \vDash \alpha$.

En este enfoque, se agrega al lenguaje un operador unario $\Box$ con la siguiente definción. $M, r, n \vDash \Box\alpha$ si y solo si para toda rama κ tal que $n \in \kappa$, y para toda $v \in \kappa$ tal que $n < v$, sucede que $M, \kappa, v \vDash \alpha$. Por lo tanto GQ significa que en un curso futuro de eventos siempre será el caso que Q, mientras que $\Box Q$ significa que Q ocurrirá siempre inexorablemente.



«No me vas a quitar el fuego, tlacuache.»

Aquellos que esperaban miraban el fuego; poco después se venía para abajo. Lo esperaban con sus cobijas. Cayó, pero no ahí, sino en el suelo. De ahí lo cogieron, pero la tierra ya había empezado a incendiarse.

Cuando aquellos la iban apagando, llegó el tlacuache a toda velocidad. Lo vieron llegar y caer muerto sobre la tierra. Entonces lo cubrieron con una de sus cobijas. Después de cubrirlo comenzó a moverse por un momento. Estaba vivo, se levantó pesadamente y se sentó. Poco a poco fue recobrando el conocimiento. Al volver en sí se puso de pie y les preguntó: «¿Llegó el fuego? se los lancé para abajo. Mi mismo abuelo me mató; él me prendió fuego».

Le dijieron: «Por aquí cayó el fuego, pero nadie lo pescó. Cayó a la tierra y ésta está incendiándose. ¿Cómo vamos a apagarlo? Nos es imposible apagarlo».

Entonces llamaron a nuestra madre la diosa de la tierra y ésta lo apagó con su leche. Así mitigó el fuego. Entonces recuperaron el fuego y permaneció aquí.

Mito cora

El tlacuache es un ladrón: ¡Cómo no ha de serlo, si sus manitas son casi de cristiano!

Relato mazahua

Con ellas abre las tapas, corre las trancas, quita, en busca de aguamiel, las piedras que cubren el cuenco de los magueyes, y atrapa gallinas para chuparles los sesos y la sangre. Cuando el origen del mundo, subió a un cerro empinado y de la cumbre robó el fuego que guardaban siete jaguares. Con su cola agitó las ascuas, y las chispas cayeron en los ojos de las fieras, cegándolas. Huyó con el fuego y lo entregó a los hombres en cuatro piras. En este tiempo ascendió por las escarpas cubiertas de espinos y bebió el pulque de la anciana poseedora del secreto de su fabricación. Volvió con el vientre repleto y regaló el licor a los hombres, transvasándolo a cuatro grandes ollas. También por aquellos días primeros fue a la fiesta de los diablos y, fingiéndose borracho, cargó en su bolsa el mezcal y los cigarros para huir con ellos, llevándose de paso el fuego.

Desde entonces los animales disfrutaron en sus fiestas de la lumbre, del aguardiente y del tabaco.

Mito tlapaneco

5.6 Lógica modal de primer orden

Ahora empezaremos el tratamiento más formal de la lógica modal cuantificada. En este capítulo daremos varios sistemas axiomáticos para la lógica modal de primer orden. Más adelante demostraremos que unos pocos axiomas y reglas de inferencia

bastan para deducir todas las instancias de fórmulas lógicamente válidas de la lógica de primer orden. Provisionalmente contaremos con este resultado y, por ello, en los sistemas que presentaremos dispondremos con todas las instancias de fórmulas lógicamente válidas. En el volumen II se esta obra dicho resultado será demostrado de forma distinta. En capítulos anteriores consideramos lenguajes $\mathcal{L}$ para la lógica de primer orden que, además de tener el vocabulario usual de símbolos lógicos y paréntesis, se distinguían por diferentes conjuntos S de símbolos, agrupados en tres categorías: relacionales, funcionales y de constantes. Por ello, caracterizábamos un lenguaje a través del conjunto de sus símbolos no lógicos: $S = \{\mathfrak{R}, \mathfrak{F}, \mathfrak{C}\}$. Con cada elemento de $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{F}$ está asociado un número natural llamado su aridad. Para la lógica modal cuantificada agregaremos a cada uno de tales lenguajes los dos símbolos lógicos de operadores unarios $\Box$ y $\diamond$, aunque estrictamente solo requerimos uno, como ya vimos antes. $\Box\alpha$ pretende expresar que la proposición α es necesaria; mientras que $\diamond\alpha$ simboliza que dicha proposición es posible. Como en el caso proposicional las condiciones de verdad en un mundo de fórmulas que comienzan con esos operadores dependerán de los valores de verdad en otros mundos de alguna de sus subfórmulas. Dadas las complicaciones propias de la lógica modal cuantificada, empezaremos con un lenguaje muy sencillo y lo iremos complicando para volverlo más expresivo. Esto es conveniente entre otras cosas por razones pedagógicas. Por ello, dejaremos fuera los términos funcionales y, en un primer momento, el signo de identidad. Sea $S = \{\mathfrak{R}, \mathfrak{C}\}$. Denotaremos por LMS al lenguaje de primer orden modal cuyos símbolos no-lógicos son los de S. Sus símbolos lógicos serán los usuales, más los dos operadores modales ya mencionados, menos el signo de identidad. Sus términos son los símblos constantes contenidos en S y las variables. Desde ahora supondremos que el conjunto de variables del lenguaje LMS para cualquier S es numerable y es el siguiente $VAR = \{v_0, v_1 \ldots v_n \ldots\}$. Sin embargo, como es usual en este tipo de exposiciones usaremos x, y, z para representar variables. Las fórmulas de S (o S-fórmulas) están caracterizadas por las siguientes definiciones.

Definición 5.6.1. 1. Si t_1, $t_2 \ldots t_n$ son S-términos y H es un símbolo de relación n-aria de S, entonces $Ht_1t_2 \ldots t_n$ es una S-fórmula.

2. Si α es una S-fórmula, entonces $\neg\alpha$ también es una S-fórmula.

3. Si α y β son S fórmulas, también lo es $(\alpha \to \beta)$.

4. Si α y β son S fórmulas, también lo son $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

5. Si α es una S-fórmula y x una variable, $\forall x\alpha$ es una S-fórmula.

6. Si α es una S-fórmula y x una variable, $\exists x\alpha$ es una S-fórmula.

7. Si α es una S-fórmula, $\Box\alpha$ es una S-fórmula.

8. Si α es una S-fórmula, $\diamond\alpha$ es una S-fórmula.

Como el lector recordará, la cláusula 4) no es necesaria porque los conectivos de conjunción, disyunción y el bicondicional pueden ser definidos por medio de $\neg$ y $\rightarrow$. Lo mismo ocurre con 6) y 8) pues $\exists$ puede definirse por medio de $\forall x$ y $\neg$, mientras que $\diamond$ puede ser introducido como una abreviatura de siguiente manera,

$$\diamond\alpha \equiv_{Def} \neg\Box\neg\alpha.$$

Asimismo pudimos tomar $\diamond$ como símbolo primitivo e introducir $\Box$ por medio de la estipulación $\Box\alpha \equiv_{Def} \neg\diamond\neg\alpha$. Las definiciones de «ocurrencia libre de variable», «ocurrencia acotada de variable», «enunciado», y similares, serán las mismas que las de los capítulos previos. Como ocurre con cualquier otro operador, las figuraciones de $\Box$ y $\diamond$ en una fórmula también tienen un alcance que es la fómula que sigue inmediatamente a dicha figuración. Así en $(\Box(\forall x\alpha \wedge \beta) \vee \gamma)$ el alcance de la única figuración de $\Box$ es la fórmula $(\forall x\alpha \wedge \beta)$, mientras que en $\forall x(\Box\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$, es α. Los siguientes son ejemplos de fórmulas de LMS (en donde el conjunto S queda sobreentendido):

1. $\Box x \leq y$.
2. $(A(x,y) \rightarrow \diamond\Box A(x,y))$.
3. $\forall x\forall y(x \neq y \rightarrow \Box x \neq y)$.
4. $\forall n(n > 2 \rightarrow \neg\diamond\exists x\exists y\exists z x^n + y^n = z^n)$.

A diferencia de lo que sucede con la lógica de primer orden clásica, ahora no tendremos una semántica estándar sino que varias elecciones son posibles para definir lo que es una interpretación de LMS. Comencemos con el caso más sencillo definiendo «S-estructura» (de dominio constante).

Definición 5.6.2. Una S-estructura (de dominio constante) es una cuaterna

$$\mathfrak{A} = \langle W, R, D, \sigma\rangle$$

tal que:

a) W es un conjunto no vacío cuyos elementos serán llamados "mundos posibles".

b) R es una relación binaria de elementos de W (es decir, $R \subseteq W \times W$).

c) D es un conjunto no vacío llamado el dominio o universo de la interpretación.

d) Para cada elemento c de $\mathfrak{C}$, $\sigma(c) \in D$.

e) Para cada símbolo relacional n-ario $H \in \mathfrak{R}$ y cada $w \in W$, $\sigma(w,H)$ es una relación n-aria en D (es decir, $\sigma(w,H) \subseteq D^n$).

Llamaremos a D el dominio de la estructura.

Note que según la definición anterior una estructura otorga a una constante el mismo valor en cada mundo. Esto obedece a la idea de que los nombres son designadores rígidos, tema que más adelante tocaremos. Por el momento, esta convención no tiene ninguna relevancia y pudimos no acatarla. Más adelante convendrá que las constantes puedan denotar diferentes objetos en distintos mundos (aunque no necesariamente objetos existentes en esos mundos). Asimismo veremos las semánticas de dominio variable en donde en lugar de tener un conjunto dominio D para todo la interpretación, tendremos una función que a cada mundo le asigna un conjunto de objetos que lo «habitan».

Ejemplo 5.6.3. Sea $S = \{H, G\}$ donde H y G son letras predicativas, binaria, la primera; unitaria, la segunda. Ahora definimos la siguiente S-estructura $\mathfrak{A} = \langle W, R, D, \sigma \rangle$ tal que:

$W = \{u, w, v, z\}$,
$R = \{(u, w), (w, v), (w, z), (z, v)\}$,
$D = \{a, b, c, d\}$,
$\sigma(u, H) = \{(b, a), (a, c), (d, d), (b, b)\}$,
$\sigma(w, H) = \{(d, b), (a, a), (c, c)(d, a)\}$
$\sigma(v, H) = \{(a, a), (b, c), (d, a)\}$,
$\sigma(z, H) = \{(a, a), (a, c)\}$,
$\sigma(u, G) = \{a, c\}$,
$\sigma(w, G) = \{a, c, d\}$
$\sigma(v, G) = \{b\}$,
$\sigma(z, G) = \{a, b, d\}$.

Esta estructura consta de cuatro posibles situaciones, u, w, v y z. Estando en u solo es posible acceder a w, mientras que desde esta situación v y z son posibles. Desde z solo v es accesible. En todas ellas "habitan" solo los individuos a, b, c, d. H denota distintas relaciones y G diferentes propiedades en cada mundo. Estamos suponiendo que en todos los mundos los objetos que conforman su dominio son los mismos. De ahí la expresión «dominio constante». Una vez dada una S-estructura, los enunciados (es decir las fórmulas sin ocurrencias libres de variables) de LMS, tendrán un valor de verdad. Por ejemplo, en la estructura anterior, $w \models \exists x(H(x, x) \wedge \Diamond Gx)$, pues en w hay un objeto, a saber a que está en la relación $\sigma(w, H)$ consigo mismo y que posiblemente tiene la propiedad G, pues $a \in \sigma(z, G)$ y $R(w, z)$. Asimismo $w \models \exists y(Gy \wedge \Box H(y, y))$ pues a tiene la propiedad $\sigma(w, G)$ y en todos los mundos accesibles desde w, a saber, v y z, a tiene consigo mismo la relación con la que se interpreta H. Para que ocurra lo mismo con todas las fórmulas es necesario dar una asignación de valores a las variables como lo hicimos en el cálculo de predicados clásico.

Definición 5.6.4. Una asignación en una S-estructura $\mathfrak{A} = \langle W, R, D, \sigma\rangle$ (de dominio constante) es una función $\beta : VAR \Rightarrow D$, donde VAR es el conjunto de variables del lenguaje.

Definición 5.6.5. Si β es una asignación en una S-estructura, x una variable y d un elemento del domino de la estructura, entonces por $\beta\frac{d}{x}$ es la asignación definida de la siguiente manera,

$$\beta\frac{d}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{si } y \neq x, \\ d & \text{si } y = x \end{cases}$$

Para cualquier $d \in D$ diremos que $\beta\frac{d}{x}$ es una x-variante de β.

Definición 5.6.6. Una C-interpretación (de dominio constante) o modelo M de S es una quintenta $\langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$, donde $\langle W, R, D, \sigma\rangle$ es una S-estructura (de dominio constante) y β una asignación. De $\langle W, R, D\rangle$ diremos que es el marco de esa estructura y de esa interpretación.

La referencia a S será eliminada cuando el lenguaje esté sobreentendido. Asimismo, y hasta nuevo aviso, eliminaremos la «C» y el calificativo «de dominio constante» porque todo lo que diremos en esta sección se refiere a interpretaciones y estructuras de dominio constante. Análogamente si x y y son variables y $d, e \in D$, $\beta\frac{de}{xy}$ denotará a la asignación $(\beta\frac{d}{x})\frac{e}{y}$, y similarmente para mayor número de variables. Notación: si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ con $M\frac{d}{x}$, donde d es un elemento de D, denotaremos a la interpretación $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\frac{d}{x}\rangle$ por $M\frac{d}{x}$, es decir, eta es la interpetación que difiere de M solo en que la asignación correspondiente otorga a la variable x el valor d. Cuando sea importante tener en cuenta la asignación β que forma parte de la interprteación M, escribiremos M_β. En ese caso M_γ será la interpretación que es como M excepto que tiene a γ como asignación.

Ahora definiremos qué significa que una fórmula de un lenguaje LMS sea verdadera en un mundo de una interpretación de S. Por supuesto que esta definición es una extensión de la que dimos para el caso del cálculo de predicados en capítulos previos. Supongamos fijo el lenguaje S, y dada una S-interpretación $\mathfrak{I} = \langle W, R, D, \sigma, \beta)$, y un mundo $w \in W$.

Definición 5.6.7. Dada la C-interpretación $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ de S, y $w \in W$ asociamos a cada término t de LMS una interpretación $\sigma\beta$ con la siguiente regla:
Si t es una variable x, $\sigma\beta(x) = \beta(x)$ para toda $w \in W$.
Si t es una constante c, $\sigma\beta(c) = \sigma(c)$ para toda $w \in W$.

Vemos aquí que lo que una interpretación asigna a una constante o a una variable no depende del mundo en que estemos evaluando. Pudimos haber decidido que la interpretación de las constantes variara de un mundo a otro pero, como así ocurrirá en las semáticas de dominio variables, experimentamos ahora con esta opción más sencilla y que corresponde, como antes mencionamos, a la idea de que las constantes son designadores rígidos.

Definición 5.6.8. Dada una interpretación $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$, definimos qué significa que una fórmula α sea verdadera en $w \in W$ (lo que denotaremos por $M, w \models \alpha$) a través de las siguientes cláusulas recursivas. Sean H una letra predicativa n-aria de S, $t_1 \dots t_n$ n términos de S, x una variable de S, y ϕ y γ fórmulas de S,

a) $M, w \models Ht_1 \dots t_n$ si y solo si $(\sigma\beta(t_1) \dots \sigma\beta(t_n)) \in \sigma(w, H)$.

b) $M, w \models \neg\phi$ si y solo si $M, w \not\models \alpha$.

c) $M, w \models (\phi \vee \gamma)$ si y solo si $M, w \models \phi$ o $M, w \models \gamma$.

d) $M, w \models \forall x\phi$ si y solo si para todo $d \in D$, $M\frac{d}{x}, w \models \phi$.

e) $M, w \models \Box\phi$ si y solo si para todo $v \in W$, si wRv entonces $M, v \models \phi$. En donde $M, w \not\models \alpha$ es la negación de $M, w \models \alpha$.

Pudimos incluir incisos para las fórmulas construidas con otros conectivos, el cuantificador existencial y el operador $\diamond$, pero también podemos introducirlos como definiciones a la manera usual. El lector debe recordar que todas las funciones veritativo funcionales se pueden expresar a partir de conjuntos muy reducidos de conectivos, por ejemplo, $\{\neg, \wedge\}$ o $\{\downarrow\}$. El uso de muchos conectivos en el lenguaje facilita la lectura de fórmulas, pero alarga las pruebas metateóricas, así es que conveniente encontrar un equilibrio. Con los cuantificadores no sucede lo mismo. Muchos operadores que pueden ser llamados cuantificadores no son expresables con los dos que tenemos.

Definición 5.6.9. Una fórmula ϕ es válida en una interpretaciíon $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ si para todo $w \in W$, $M, w \models \phi$. Una fórmula ϕ es válida en una estructura E, si para cualquier interpretación M cuya estructura es E, y cualquier mundo del dominio de M, $M, w \models \phi$. Lo denotaremos por $E \models \phi$.

Definición 5.6.10. Una fórmula ϕ es C-válida si para toda interpretaciíon M (de domino constante), $M \models \phi$. Lo denotaremos como $\models_C \phi$.

A veces omitiremos la «C» cuando se sobreentienda que estamos hablando de validez o interpretación de dominio constante.

Hemos empezado con el caso más sencillo, aquel en que todas las situaciones o mundos posibles comparten el mismo dominio. En cambio, las propiedades que tiene un objeto pueden cambiar de un mundo a otro. Así, si P representa la propiedad de «ser cónsul inglés en México», ϕ asociará a P un cierto conjunto en este mundo, pero en otro mundo corresponderá a P una imagen distinta. En el tratamiento de las constantes hay dos enfoques posibles. En el primero, más común, se asocia a cada constante un objeto posible pero el mismo en cada mundo. En ese caso, la constante se comportará como «un designador rígido». O bien, podemos decidir que una constante denote distintos objetos en distintos mundos posibles. En ese caso la constante se interpreta como un «concepto individual». A pesar de que parece más natural la segunda opción y de que es más general, hemos tomado la primera. Una razón es

superficial: mientras todos los mundos tengan los mismos objetos, no hay mucha diferencia entre ambas opciones. Otra razón más profunda, que será importante en lo sucesivo, es que es así como se comportan la mayoría de los nombres en el lenguaje natural, como lo mostró Kripke, que fue también quien acuñó la expresión «designador rígido». Para ver esto, volvamos al análisis de Russell y recordemos otro de los enigmas a los que se enfrentó su teoría. Suponga que alguien hubiera investigado durante años el menor número natural para el que es falsa la conjetura de Fermat, es decir, el menor número $n > 2$ tal que existen a, b y c con la propiedad de que $a^n + b^n = c^n$. Después de demostrar matemáticamente muchas propiedades de ese número, podría haber llegado a la conclusión (como resultado de una prueba rigurosa) de que ese número no puede existir. Pero, como sea, si tiene varias propiedades, una de las cuales es no existir, entonces debe, a pesar de todo, ser o existir de alguna manera. Esta fue una conclusión a la que llegó el filósofo Meinong y que a Russell le pareció inaceptable. Meinong supone que «α no existe» tiene la forma sujeto-predicado y que un enunciado de esta forma es verdadero si el objeto denotado por «α» tiene la propiedad a la que se refiere el predicado. Por lo tanto, si «α no existe» es verdadero es porque el objeto denotado por «α» tiene cierta propiedad (la de no existir). Pero entonces debe haber un objeto denotado por «α». En la propuesta de Russell la oración «el menor número que... no existe» no tiene la forma sujeto-predicado (no estamos diciendo de un objeto que tiene la propiedad de no existir) sino la forma «no hay uno y solo un número tal que ...», la cual es verdadera. Sin embargo, el problema puede reproducirse sin emplear descripciones definidas y sin que podamos, por tanto, aplicar directamente el expediente de Russell. Sin duda podemos decir que Homero no existió (tiene sentido decirlo). Russell propuso que el nombre «Homero» esconde implícita una descripción definida. Lo que estamos queriendo decir es que no existió uno y solo un autor de la Iliada y la Odisea. Según Russell, esto es lo que ocurre con todos los nombres del lenguaje ordinario. Frege propuso que todo nombre significa lo que una descripción definida (aunque el término «descripción definida» es de Russell). Es decir, para Russell y Frege entre el nombre y el objeto que denota hay un intermediario. Asociado a «Homero» está el significado de «el autor de la Iliada y la Odisea» que permite saber cómo usar el nombre. Se opone a ello una teoría de los nombres que se remonta a Mill. Mill propuso que los nombres no tienen una connotación, sólo sirven para referirse a un individuo u objeto. Los niños a veces preguntan, por ejemplo, qué significa «Jorge». La respuesta de la mamá ilustra el punto de Mill: «Nada, es el nombre de tu hermano». Así es que tenemos frente a frente dos teorías semánticas de los nombres. Según la primera, defendida por Frege y en buena medida por Russell, los nombres propios ordinarios son sinónimos de descripciones definidas. Tienen este sentido y gracias a él se refieren a un objeto (su denotación), aunque puede haber excepciones («Pegaso» tiene sentido pero no denotación). Por otro lado, Mill propuso que los nombres propios sólo tienen denotación pero no significan nada. Kripke mostró que cuando en el lenguaje ordinario aparecen los nombres en contextos modales no los empleamos como abreviando descipciones definidas, sino como etiquetas. Cuando hablamos de lo que puedo ocurrir a Maria Callas si las circunstacias de su

vida hubiesen sido diferentes no pretendemos que la forma en que la identificamos (la más célebre soprano del S. XX o la esposa de Aristóteles Onassis) determine en lo más mínimo el valor de verdad de lo que decimos. No pretendemos aquí resumir los argumentos de Kripke. Baste decir que se basan en nuestras intuiciones lingüísticas, es decir, en cómo entendemos el lenguaje cotidiano. Sin embargo, más adelante exploraremos otras posibilidades. Ahora bien, en la semántica que hemos dado todos los mundos contienen los mismos individuos. Más tarde, definiremos otra en que el conjunto de individuos también variará de un mundo a otro. ϕ será una función que tendrá como domino (tal como está ahora definido) el conjunto de mundos posibles y asociará a cada uno de sus miembros un subconjunto no vacío A de D. $D(w)$ será el conjunto de objetos que existen en el mundo w, mientras que D será el conjunto de objetos posibles. ϕ seguirá asignando a cada letra predicativa n-aria un subconjunto de D^n, lo que significará que un objeto podrá tener propiedades en un mundo w aunque no exista en w. También aquí podríamos elegir una opción diferente en la cual «Bush es político» no sería ni verdadero ni falso en un mundo en que Bush no existe. No exploraremos esta posibilidad. Por el momento, volvamos a la opción más sencilla.

Demostremos ahora que el esquema $\forall x\Box\Theta \rightarrow \Box\forall x\Theta$, donde Θ representa una fórmula, es válido. Supongamos que hay una interpretación $M = \langle W, R, D, \phi, \beta\rangle$, y un mundo $w \in W$ tal que $M, w \models \forall x\Box\Theta$. Entonces, para todo $e \in D$ $M_{\beta\frac{e}{x}}, w \models \Box\Theta$. Por lo tanto, en cualquier mundo v tal que wRv $M_{\beta\frac{e}{x}}, v \models \Theta$.

Como esto ocurre para cualquier $e \in D$ $M, v \models \forall x\Theta$. Y, dado que esto sucede para cada v tal que wRv, $M, w \models \Box\forall x\Theta$. En cambio, el esquema $\Box\exists x\Theta \rightarrow \exists x\Box\Theta$ no es válido. Sea Θ la fórmula Ax. Tomemos la interpretación

$M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$,
$W = \{w, v\}$,
$R = W^2$,
$D = \{a, b\}$,
$\sigma(w, A) = \{a\}$,
$\sigma(v, A) = \{b\}$.
β es cualquier asignación.

Tenemos que $M, w \models \Box\exists xAx$ es verdadero. Para que lo sea, se requiere que $M, v \models \exists xAx$ (lo que es verdadero pues $M_{\beta\frac{b}{x}}, v \models Ax$, y $b \in \sigma(v, A)$) y que $M, w \models \exists xAx$ (lo que es verdadero pues $M_{\beta\frac{a}{x}}, w \models Ax$, pues $a \in \sigma(w, A)$). En cambio, $M, w \not\models \exists x\Box Ax$, porque eso ocurriría si existiera un mismo elemento z en D, tal que $M_{\beta\frac{z}{x}}, w \models \Box Ax$ es decir, tal que $M_{\beta\frac{z}{x}}, w \models Ax$ y $M_{\beta\frac{z}{x}}, v \models Ax$. Ni a ni b satisfacen esa condición.

Diremos que una fórmula Θ es «*de re*» si contiene una subfórmula en que una ocurrencia libre de una variable, o bien de una constante, aparece en el alcance de un operador modal. En caso contrario diremos que la fórmula es «*de dicto*». Por ejemplo, $\Box\exists xAx$ es *de dicto*, mientras que $\exists x\Box Ax$ es *de re*. La diferencia es importante desde un punto de vista filosófico, pues las fórmulas *de re* conllevan el problema de la identificación de un individuo a través de mundos posibles. Por ejemplo, $\exists x\Box Ax$ asevera que hay un objeto en el mundo real que tiene una cierta propiedad en todos los mundos posibles. Eso supone que un individuo puede existir en diversos mundos (lo que está

implícito en nuestra semántica). Además, la verificación de la fórmula requiere que «localicemos» a este individuo en otros mundos. En forma análoga, decidir que $\Box Ac$ es verdadera requiere que al individuo que en nuestro mundo es la denotación de c lo identifiquemos en otros mundos para verificar que allí pertenezca al conjunto denotado (en ese mundo) por A. Ahora bien ¿cómo identificar a un individuo en otros mundos posibles? Para saber si Pelé pudo ser basquetbolista tenemos que buscar si, en otro mundo posible, Pelé se dedica al deporte ráfaga, pero tal vez Pelé no sea allí brasileño ni tenga la misma cara. ¿Cómo entonces distinguirlo? Kripke pensó que éste era un falso problema; sin embargo, no todos los filósofos compartieron su opinión. Lewis pensó que si un individuo es «habitante» de otro mundo posible, entonces ya no puede tener las mismas propiedades que Pelé, y que si dos objetos no comparten todas sus propiedades, entonces no son iguales. Por lo tanto, si Pelé pudo ser beisbolista es porque hay un individuo muy parecido a Pelé que sí se dedica al beisbol. Ese individuo es una «contraparte» de Pelé. Cada individuo está en un mundo y sólo en uno. No hay identidad transmundana. La principal razón esgrimida a favor de esta tesis es la indiscernibilidad de los idénticos: individuos en mundos distintos no pueden tener todas sus propiedades en común; por tanto, no pueden ser iguales. ¿Qué significa entonces el enunciado «Fox pudo no ser presidente»? En la semántica ordinaria, la respuesta es: que Fox en un mundo posible distinto del nuestro no es presidente. Pero, como para Lewis, no puede Fox habitar otro mundo que el nuestro, el enunciado anterior significa más bien que en un mundo posible hay un individuo muy parecido a Fox, que Lewis llama la «contraparte» de Fox en ese mundo, y ése individuo no es presidente.

Las semánticas comúnmente empleadas en lógica modal dan por sentado que un individuo puede estar y «ser identificado» en otros mundos posibles, y nosotros seguiremos esa práctica. Hay un par de esquemas que conectan de manera interesante una fórmula *de re* con una *de dicto*. Son la fórmula Barcan: $\forall x\Box\alpha \to \Box\forall x\alpha$ (FB) y su inverso: $\Box\forall x\alpha \to \forall x\Box\alpha$ (IFB), donde α es una fórmula. Consideremos por ahora una instancia de FB, a saber, $\forall\, x\Box Ax \to \Box\forall\, xAx$; asevera que si todas las cosas del mundo real tienen una propiedad en cada mundo posible, entonces cualquier cosa en cualquier mundo tiene esa propiedad. Intuitivamente, eso es cierto si no hay algo en otro mundo que no exista en éste. FB es válida en una semántica como la que hemos definido antes, o bien, si la semántica no es de dominio constante, FB será verdadera en el mundo w si para todo v tal que wRv, el dominio de v está contenido en el dominio de w. De la misma manera, es fácil comprobar que IFB es verdadera en w si para todo v tal que Rwv, el dominio de w está contenido en el dominio de v. Dado que ahora solo tratamos con una semántica de dominio constante, agregaremos FB como axioma a todos los sistemas axiomáticos que estudiaremos en esta sección. En cambio, IFB será un teorema de todos ellos. A continuación introduciremos diversos sistemas axiomáticos. Todos ellos se forman por una combinación de esquemas y reglas de inferencia de los conocidos sistemas de lógica modal proposicional y de un sistema axiomático para el cálculo de predicados. Supondremos fijo un conjunto S de símbolos no-lógicos y con ello un lenguaje de primer orden modal determinado por S.

Cada uno de los sistemas que presentaremos enseguida tendrá LMS como su lenguaje y será una extensión del sistema KC, definido por los siguientes axiomas y reglas de inferencia.

Sean x una variable, ϕ, γ fórmulas, t un término y Σ un conjunto de fórmulas.

Son axiomas de KC,

1. Toda ejemplificación de una tautología.
2. Toda ejemplificación del esquema $(\forall x\phi(x) \to \phi(x/t))$, donde t es un término de S libre para x en $\phi(x)$, es decir, si t es una variable al sustituir cualquier ocurrencia de x por t, t no queda acotada.
3. Toda ejemplificación del esquema $\forall x(\phi \to \gamma) \to (\phi \to \forall x\gamma)$ si ϕ no contiene a x libre.
4. Toda ejemplificación del esquema $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
5. Todas las ejemplificaciones de (FB) $\forall x\Box\phi \to \Box\forall x\phi$, a las cuales llamaremos fórmulas Barcan.

Las reglas de inferencia de KC son:

a) Modus Ponens.

b) Si $\vdash_{KC} \alpha$, entonces $\vdash_{KC} \forall x\alpha$. Generalización

c) Necesidad o (si $\vdash_{KC} \alpha$ entonces $\vdash_{KC} \Box\alpha$).

Desde luego, sabemos que son teoremas de KC todas las ejemplificaciones de fórmulas válidas de K de (LMS). Por ejemplo, si H es una letra predicativa y c una constante de S, entonces $\Box(\neg\forall xHx \vee Hc) \to (\Box\neg\forall xHx \vee \diamond Hc)$ es una fórmula válida. Lo es porque $\Box(P \vee Q) \to (\Box P \vee \diamond Q)$ es un teorema de K. La justificación es casi inmediata. Sabemos que esta fórmula tiene una prueba en K y en ella podemos substituir P por $\neg\forall xHx$ y Q por Hc y tendremos una prueba de nuestra fórmula en KC. Lo mismo sucede con fórmulas cuya validez solo depende del cálculo de predicados (de LMS). Por ejemplo, $(\diamond\Box Ht \to \exists x \diamond \Box Hx)$. En efecto, tomemos una prueba de $(Ht \to \exists xHx)$ y reemplazamos en ella el predicado H por la expresión $\diamond\Box Hx$. Este no es un predicado, pero lo será cuando hayamos introducido algunas herramientas en la sintaxis y semántica de nuestro lenguaje. Para entonces tendremos una prueba de nuestra fórmula original en una versión modificada de KC. Por el momento, podemos demostrarla con los recursos que ahora tenemos. Los siguientes son ejemplos similares.

Teorema 5.6.11. $\vdash_{KC} \Box\forall x\phi \to \forall x\Box\phi$.

Demostración.

1. $\forall x\phi \to \phi$ axioma 2
2. $\Box\forall x\phi \to \Box\phi$ regla de inferencia derivada de K aplicada a 1
3. $\Box\forall x\phi \to \forall x\Box\phi$ regla de inferencia b) aplicada a 2.

□

Corolario 5.6.12. $\vdash_{KC} \exists x \diamond \phi \to \diamond\exists x\phi$.

Teorema 5.6.13. $\vdash_{KC} \exists x\Box\Theta \to \Box\exists x\Theta$.

Demostración.

1. $\Theta \to \exists x\Theta$ axioma 2 y contrapositiva
2. $\Box\Theta \to \Box\exists x\Theta$ regla de inferencia de K aplicada a 1
3. $\forall x(\Box\Theta \to \Box\exists x\Theta)$ regla de inferencia b) aplicada a 2
4. $\forall x(\Box\Theta \to \Box\exists x\Theta) \to (\exists x\Box\Theta \to \Box\exists x\theta)$ fórmula válida del cálculo de predicados.
5. $\exists x\Box\Theta \to \Box\exists x\Theta$ MP 3 y 4.

□

En general, el uso de la contrapositiva nos permitirá fácilmente derivar teoremas «duales» de otros ya demostrados. Es la fórmula Barcan la que permitirá una real interacción entre el cálculo de predicados y la lógica modal proposicional. Evidentemente pudimos tomar como base modal, en lugar de K, algunas de sus extensiones. Los siguientes son algunos ejemplos de este tipo de sistemas.

Definición 5.6.14. Sea α una fórmula cualquiera. El sistema axiomático $K4C$ se obtiene agregando a KC como axioma el esquema $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$; simbólicamente, $K4C = KC + \{\Box\alpha \to \Box\Box\alpha\}$. De manera similar, definimos
$KDC = KC+\{\Box\alpha \to \diamond\alpha\}$
$KTC = KC+\{\Box\alpha \to \alpha\}$
$KBC = KCT+\{\alpha \to \Box\diamond\alpha\}$
$KS4C = KCT+\{\Box\alpha \to \Box\Box\alpha\}$
$KS5C = KCT+\{\diamond\alpha \to \Box\diamond\alpha\}$.

En realidad, la fórmula Barcan resulta superflua en presencia del axioma $\alpha \to \Box\diamond\alpha$, como lo mostraremos enseguida. Primero, recordemos que si $\vdash_B \diamond\alpha \to \beta$ entonces $\vdash_B \alpha \to \Box\beta$ como vimos antes.

Una derivación de FB empleando B es la siguiente:

1. $\forall x\Box\alpha \to \Box\alpha$

2. $\diamond\forall x\Box\alpha \rightarrow \diamond\Box\alpha$ regla derivada de K
3. $\diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$ (axioma específico de B y contrapositiva)
4. $\diamond\forall x\Box\alpha \rightarrow \alpha$ transitividad 2 y 3.
5. $\diamond\forall x\Box\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ regla de inferencia derivada del cálculo de predicados
6. $\forall x\Box\alpha \rightarrow \Box\forall x\alpha$ regla derivada de B.

Aún así, no debemos olvidar que FB es teorema de todos los sistemas anteriores.

Teorema 5.6.15. *Los teoremas de*

- *KC son válidos en todos los marcos.*
- *KDC son válidos en todos los marcos seriales.*
- *KTC son válidos en todos los marcos reflexivos.*
- *KBC son válidos en todos los marcos simétricos.*
- *KS4C son válidos en todos los marcos reflexivos y transitivos.*
- *KS5C son válidos en todos los marcos de equivalencia.*

Demostración. Haremos la demostración para el caso de *KC*. Las restantes pruebas son análogas. Sea α un teorema de *KC*, y $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ una interpretación. Mostraremos que α es válido en M. De hecho, probaremos que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ es una prueba de α, y entonces, para cada i $(0 < i < n+1)$, α_i es válida en M. Supongamos que α_i es un esquema de axioma de KC. Por ejemplo, α_i tiene la forma $\Box(\delta \rightarrow \epsilon) \rightarrow (\Box\delta \rightarrow \Box\epsilon)$. Supongamos que α_i es falso en un mundo w de un modelo M. Sea $M = \langle W, R, V'\rangle$ un modelo proposicional tal que $V'(v, p) = verdadero$ si y solo si $M, v \models \delta$ y $V'(v, q) = verdadero$ si solo si $M, v \models \epsilon$ para todo $v \in W$. En consecuencia, es obvio que $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ sería falsa en w en el modelo proposicional $M = \langle W, R, V'\rangle$, lo que ya probamos que es imposible.

Supongamos ahora que $(\forall x)\phi x \rightarrow \phi t$ fuese falsa en el mundo w del modelo $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$. En particular, $M, w \not\models \phi t$. Supongamos que t es una constante y que $\sigma(t) = d$ con $d \in D$ o que t es una variable y que $\beta(t) = d$. Entonces es claro que $M\frac{d}{x}, w \not\models \phi t$ y, por definición, $M, w \not\models (\forall x)\phi x$. Si α_i es FB, ya probamos que es válida. En cuanto a las reglas de inferencia, el modus ponens y la necesidad son claramente válidos (por las mismas razones que lo eran en el cálculo de proposiciones). En cuanto a la regla b) (generalización), supongamos que α_i es $(\forall x)\alpha_j(x)$ con $j < i$ y que la hipótesis se cumple para $\alpha_j(x)$, es decir, que es válida en todos los mundos de todos los modelos (es decir para todas las estructuras e interpretaciones, es decir para cualquier valor del dominio que una asignación le de a la letra x), entonces claramente α_i también es válida en todos los modelos. ∎

Ahora mostraremos el inverso del teorema 5.6.15. Probaremos, por ejemplo, que si una fórmula de nuestro lenguaje del cálculo de predicados modal es válida en todo marco transitivo, entonces es teorema de K4C. La técnica empleada será la que utilizamos algunas páginas más arriba para demostrar que toda fórmula válida del cálculo de enunciados en un conjunto C de marcos es un teorema del correspondiente sistema S, es decir, construiremos un modelo canónico M_S para S y luego probaremos que dicho modelo pertenece a C. Como siempre, una fórmula será teorema de S si y sólo si es válida en M_S. Luego, si tenemos una fórmula válida en todo marco de C, lo será en M_S (pues $M_S \subseteq C$) y, por lo tanto, será teorema de S.

Definición 5.6.16. Consideremos N un sistema que sea una extensión de KC o KC mismo. Dado un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje, diremos que un conjunto Γ de fórmulas es N inconsistente si existe un subconjunto finito de Γ, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ tal que

$$\vdash_N \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$$

o equivalentemente

$$\vdash_N (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1}) \rightarrow \neg\alpha_n.$$

En caso contrario, diremos que Γ es N consistente.

Los siguientes son fáciles consecuencias de las definiciones y se demuestran como en el caso proposicional.

Lema 5.6.17. *Si no es el caso que $\Gamma \vdash_N \neg\alpha$, entonces $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es N consistente.*

□

Lema 5.6.18. *Si Γ es N consistente y $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es N inconsistente, entonces $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es N consistente.*

□

Definición 5.6.19. Γ es un conjunto N máximo consistente si es N consistente y para cualquier fórmula α, o $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.

Lema 5.6.20. *Sea Γ un conjunto N-consistente. Entonces Γ es N-máximo consistente si y solo si cualquier Σ tal que $\Gamma \subsetneq \Sigma$, no es N-consistente.*

Lema 5.6.21. *Si Γ es un conjunto N máximo consistente,*

a) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \in \Gamma$ *y* $\beta \in \Gamma$.

b) $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \in \Gamma$ *o* $\beta \in \Gamma$.

c) $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* $\alpha \notin \Gamma$ *o* $\beta \in \Gamma$.

d) $\alpha \leftrightarrow \beta \in \Gamma$ *si y sólo si* ($\alpha \in \Gamma$ *si y sólo si* $\beta \in \Gamma$).

e) $\forall x\alpha \in \Gamma$ *sólo si* $\alpha(x/t) \in \Gamma$ *para cada término* t *libre para* x *en* α.

□

Como el lector recordará, construimos el modelo canónico de un sistema N tomando como mundos posibles los conjuntos de fórmulas N-máximo-consistentes. Ahora seguiremos el mismo procedimiento. Mostraremos que un conjunto N-consistente es satisfacible, es decir, que hay un mundo de un modelo que hace verdaderas a todas sus fórmulas. Construiremos ese modelo a partir del lenguaje. En principio el dominio estará constituido por las constantes del lenguaje y haremos que cada término t sea interpretado como denotando a t mismo (como haremos en el cálculo de predicados clásico). Sin embargo, enfrentamos aquí un primer problema. Quisiéramos que si $\alpha(t) \in \Gamma$ para cada término t entonces $\forall x\alpha \in \Gamma$ o, lo que es equivalente, que si $(\exists x)\neg\alpha \in \Gamma$ entonces hubiera un término t tal que $\neg\alpha(x/t) \in \Gamma$. Sin embargo, es posible tener un conjunto máximo consistente que no cumpla esta condición, pues cada subconjunto finito del conjunto $A = \{\exists x\neg\phi x, \phi t_1, \phi t_2, \phi t_3, \ldots\} = A$ (donde $t_1, t_2, t_3, \ldots$ es una enumeración de todos los términos) tiene modelo. Se sigue del teorema de compacidad que A tiene modelo y, por lo tanto, está incluido en un conjunto máximo consistente w, solo que ahora no podemos agregar ningún término en el lenguaje que ejemplifique $\neg\phi x$. En consecuencia no todo conjunto máximo consistente constituirá un mundo.

Definición 5.6.22. Un conjunto *N-Hintikka* es un conjunto Σ de fórmulas de un lenguaje tal que Σ es N máximo consistente y cada vez que contiene una fórmula de la forma $\exists x\phi x$ también contiene una fórmula de la forma $\phi(x/a)$ (donde «a» es una constante).

Lema 5.6.23. *Si* Γ *es un conjunto N-Hintikka y contiene una fórmula de la forma* $\neg\forall x\phi x$ *también contiene una fórmula de la forma* $\neg\phi(x/a)$ *(donde «a» es una constante).*

 **Teorema 5.6.24.** *Todo conjunto* Θ N *consistente es subconjunto de un conjunto N-Hintikka.*

Demostración. Sea Θ un conjunto N consistente. Agregue al léxico del lenguaje un conjunto numerable de nuevas constantes y las reglas de formación de fórmulas correspondientes. Llame L^+ al lenguaje resultante. Agregue a N los axiomas que son ejemplificaciones de los esquemas de N que incluyen las nuevas constantes (y similarmente para las reglas de inferencia). Sea N^+ la teoría así obtenida. Θ es N^+ consistente pues si fuese posible derivar una fórmula que demostrara la inconsistencia de Θ en N^+, podría hacerse lo mismo con Θ a partir de N (porque, reemplazando en forma adecuada constantes nuevas por viejas, una derivación en N^+ se convierte en una derivación en N).

Sea $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de L^+. Definimos ahora una sucesión de conjuntos de fórmulas de L^+ de la siguiente manera: sea $\Theta_0 = \Theta$ Supongamos que Θ_m ya ha sido definida de tal manera que solo un número finito de nuevas constantes aparece en Θ_m. Considere la fórmula γ_{m+1}. Hay dos casos:

1) Si $\Theta \cup \{\gamma_{m+1}\}$ es N-inconsistente entonces sea $\Theta_{m+1} = \Theta \cup \{\neg\gamma_{m+1}\}$

2) En caso contrario hay dos posibilidades:

2.1) Si γ_{m+1} no es de la forma $\exists x\psi x$, sea $\Theta_{m+1} = \Theta_m \cup \{\gamma_{m+1}\}$,

2.2) Si γ_{m+1} es de la forma $\exists x\psi x$, sea $\Theta_{m+1} = \Theta_m \cup \{\exists x\psi x\} \cup \{\psi(x/c)\}$, donde c es una constante que no figura en Θ_m ni en ψx.

Advierta que solo un número finito de constantes figura en cada Θ_i. Suponiendo que Θ_m es N-consistente probaremos que Θ_{m+1} también lo es. En los casos 1) y 2.1) esto es obvio. Veamos el caso restante. Si $\Theta_m \cup \{\exists x\psi x\} \cup \{\psi c\}$ fuese N-inconsistente, entonces existirían $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \Theta_m$ tales
$\vdash_N ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \neg((\exists x\psi x) \to \psi c))$
es decir,
$\vdash_N ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \exists x\psi x)$
y $\vdash_N ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \neg\psi c)$.
Pero como c no aparece en el antecedente $\vdash_N ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \forall z\neg\psi z)$
o, equivalentemente,
$\vdash_N ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \neg(\exists z)(\psi z))$
Por lo tanto,
$\vdash_N \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, pero eso contradice la N-consistencia de Θ_m.

Sea $\Theta = \bigcup_{i\in\mathbb{M}} \Theta_i$. Claramente Θ un conjunto N-Hintikka. ◻

Definición 5.6.25. El modelo canónico para N es la quíntupla $M_N = \langle W_N, R_N, D_N, \sigma_N, \beta\rangle$, donde $W_N = \{w \subseteq Fm(L^+) \mid w$ es un conjunto N-Hintikka$\}$, y $Fm(L^+)$ es el conjunto de fórmulas de nuestro lenguaje en que pueden figurar constantes nuevas de un conjunto numerable.

$D = \{t \mid t \in Cons(L^+)\}$, donde $Cons(L^+)$ es el conjunto de constantes de L^+ (lo que incluye las viejas constantes).

Si $w, v \in W_N$, wR_Nv si y sólo si $\Box^{-1}(w) \subseteq v$, donde $\Box^{-1}(w) = \{\alpha | \Box\alpha \in w\}$

Si c es una constante, $\sigma_N(c) = c$, β puede ser definido arbitrariamente pues solo nos interesará la evaluación de enunciados.

Si ϕ es una letra predicativa n-aria y τ_1, τ_2,..., τ_n son n términos, entonces $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \sigma_N(w, \phi)$ si y sólo si la fórmula $\phi\sigma_N\beta(\tau_1), \sigma_N\beta(\tau_2), \ldots, \sigma_N\beta(\tau_n)$ es un elemento de w. Note que si c es una constante, $\sigma_N\beta(c) = \sigma_N(c) = c$. Por lo tanto, si τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_n$ son constantes, $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in \sigma_N(w, \phi)$ si y solo si $\phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in w$.

Recordemos que N es una extensión de KC. En particular, las fórmulas Barcan son teoremas de N.

Teorema 5.6.26. *Si α es una fórmula sin variables libres de L^+ y $w \in W_N$, entonces $M_N, w \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in w$.*

Demostración. La prueba es por inducción en la construcción de la fórmula.

a) Si α es la fórmula atómica $\phi(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n)$, entonces $M_N, w \models_N \phi(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n)$ si y sólo si $(\sigma_N\beta(\tau_1), \sigma_N\beta(\tau_2), \ldots \sigma_N\beta(\tau_n)) \in \sigma_N(w, \phi)$ por definición de satisfacción de una fórmula por un mundo de un modelo.
y esto si y sólo si $(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n) \in \sigma_N(w, \phi)$ (pues $\phi_N\beta(\tau_m) = \tau_m$)
lo que es equivalente a $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n) \in w$ (por la definición del modelo canónico).

b) $M_N, w \models \neg\alpha$ si y si y solo si $M, w \not\models \alpha$ y esto, por hipótesis de inducción, es equivalente a $\alpha \notin w$. Por ser w N-máximo consistente, esto es equivalente a $\neg\alpha \in w$.

c) $M, w \models (\alpha \wedge \delta)$ si y solo si $M_N, w \models \alpha$ y $M_N, w \models \delta$. Eso ocurre si y solo si $\alpha \in w$ y $\delta \in w$. Por ser w N-máximo consistente, eso es equivalente a que $(\alpha \wedge \delta) \in w$.

d) Si α es $\forall x\gamma$. Suponga que $\alpha \notin w$; entonces $\neg\forall x\gamma \in w$ y, por ser w un conjunto Hintikka, $\neg\gamma(x/t) \in w$ para alguna constante t y, por lo tanto, $\gamma(x/t) \notin w$. Por hipótesis de inducción, $M, w \not\models \gamma(x/t)$. Por lo tanto, $M, w \not\models \forall x\gamma$. Por otro lado, si $\forall x\gamma \in w$ entonces por ser $\forall x\gamma \to \gamma(x/t)$ un teorema de KC, pertenece a w; por lo que $\gamma(x/t) \in w$ y, en consecuencia, $M, w \models \gamma(t/x)$ para cada constante «t» y, por ser D el conjunto de constantes del lenguaje $M, w \models \forall x\beta$.

e) Si α es $\Box\beta$ y $\alpha \in w$, entonces si $R_N wv$ entonces (por definición) $\beta \in v$ y (por hipótesis de inducción) $M, v \models \beta$ y eso para cada v tal que $R_N wv$. Por lo tanto, $M, w \models \alpha$.

Por último, si α es $\Box\beta$ y $\alpha \notin w$, entonces $\neg\Box\beta \in w$. Mostraremos ahora que hay un conjunto Hintikka Γ tal que $\Box^{-1}(w) \cup \{\neg\beta\} \subset \Gamma$. Éste será un mundo v de M_N tal que $R_N wv$ y en el que β está ausente. Por hipótesis de inducción, $M_N, v \not\models \beta$ falso. Por lo tanto, $M_N, w \not\models \alpha$. Supongamos que $\neg\Box\beta \in w$. Enumere todas las fórmulas de L^+ de la forma $(\forall x)\varphi$ (donde «x» es una variable cualquiera) en una sucesión $(*)$. Ahora definimos una sucesión de fórmulas de la siguiente manera,
δ_0 es $\neg\beta$
δ_{n+1} es $(\delta_n \wedge (\exists x\neg\varphi \to \neg\varphi(x/c))$ donde $\forall x\varphi$ es la n-ésima fórmula de la lista $(*)$ y c la primera constante tal que
$\Box^{-1}(w) \cup \{\delta_n \wedge (\exists x\neg\varphi \to \neg\varphi(x/c))\}$ es N consistente.

Primero, observe que $\Box^{-1}(w) \cup \{\neg\beta\}$ es N consistente. Si no, habría un conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq \Box^{-1}(w)$ tal que $((w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) \to \beta)$ sería un teorema de N y también lo sería $(\Box w_1 \wedge \Box w_2 \wedge \ldots \wedge \Box w_n) \to \Box\beta$. Por lo tanto, $\Box\beta$ pertenecería a w, lo que es imposible. Demostraremos por inducción que hay una constante c tal que

$$\Box^{-1}(w) \cup \{\delta_n \wedge (\exists x\neg\phi \to \neg\phi(x/c))\}$$

es N consistente, si $\Box^{-1}(w) \cup \{\delta_n\}$ lo es. Supongamos que eso no ocurre, es decir, que

dada una constante c existe $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\} \subseteq \Box^{-1}(w)$ tal que

$$\vdash_N (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \neg(\delta_n \wedge (\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c))) \quad o$$

$$\vdash_N (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow (\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\phi(x/c))).$$

Por lo tanto, $\vdash_N (\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n) \rightarrow \Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c)))$. De allí se deduce que $\Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c))) \in w$, para cada constante c. Sea z una variable que no ocurre en δ_n. Como w es un conjunto Hintikka, habrá una constante c de L^+ tal que,

$$\exists z \neg\Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/z))) \rightarrow$$
$$\neg\Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c)) \in w$$

o

$$\Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c)) \rightarrow$$
$$\forall z \Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/z))) \in w \text{ por contrapositiva.}$$

Y como $\Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/c)) \in w$ para cada constante de L^+, entonces $\forall z \Box(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/z))) \in w$. Puesto que la fórmula Barcan es un teorema de N, $\Box\forall z(\delta_n \rightarrow \neg(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\phi(x/z))) \in w$. Por lo tanto, puesto que z no ocurre en δ_n, $\Box(\delta_n \rightarrow \forall z \neg(\exists x \neg\phi \rightarrow \neg\varphi(x/z))) \in w$. Pero $\exists z(\exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\phi(x/z))$ es un teorema del CP. Por consiguiente, $\Box\neg\delta_n \in w$ y, por lo tanto, $\neg\delta_n \in \Box^{-1}(w)$ pero entonces $\Box^{-1}(w) \cup \delta_n$ sería N inconsistente, lo que contradice la hipótesis de inducción. Recordemos que estamos en el caso en que α es $\Box\beta$ y $\alpha \notin w$ y en que, por lo tanto, $\neg\Box\beta \in w$. Nuestro objetivo era encontrar un conjunto Hintikka Γ tal que $\Box^{-1}(w) \cup \{\neg\beta\} \subset \Gamma$. Este sería un mundo v de M_S tal que $R_S wv$ en el que β está ausente y es falso, por hipótesis de inducción. Sea $\Omega = \Box^{-1}(w) \cup \{\neg\beta\} \cup \{\delta_i \mid 1 \leq i\}$. Evidentemente, Ω es N consistente y es un conjunto Hintikka. ❐

Corolario 5.6.27. *Si* N *es un sistema consistente en el que FB es teorema y α una fórmula de* L, *entonces $\vdash_N \alpha$ si y sólo si α es válida en M_N.*

Demostración. Si α no es un enunciado (es decir, es una fórmula sin variables libres), la cerradura[7] de α, $cerr(\alpha)$, es N-válida si y sólo si α es N-válida; y $\vdash_N \alpha$ si y sólo si $\vdash_N cerr(\alpha)$. Basta entonces demostrar el resultado para el caso en que α es un enunciado. Si $\vdash_N \alpha$, entonces α pertenece a cada conjunto N-Hintikka. Por lo tanto, por el teorema anterior, α es verdadero en cada mundo de M_N. Si α no es teorema de N, entonces el conjunto $\{\neg\alpha\}$ es N consistente y puede extenderse a un conjunto N-Hintikka w; w es un mundo de M_N al que α no pertenece. Por el teorema anterior α es falso en w y, por tanto, no será válido en M_N. ❐

[7] Es decir, la fórmula que se obtiene anteponiendo a α el menor número de cuantificadores universales de tal manera que la fórmula resultante sea un enunciado.

Corolario 5.6.28. *Si α es válida,*

a) en todos los marcos, $\vdash_{KC} \alpha$.

b) en todos los marcos seriales, $\vdash_{KDC} \alpha$.

c) en todos los marcos reflexivos, $\vdash_{KTC} \alpha$.

d) en todos los marcos reflexivos y transitivos, $\vdash_{KS4C} \alpha$.

e) en todos los marcos simétricos, $\vdash_{KBC} \alpha$.

f) en todos los marcos transitivos, $\vdash_{K4C} \alpha$.

g) en todos los marcos de equivalencia, $\vdash_{KS5C} \alpha$.

Demostración. Demostraremos el inciso c). Los otros casos son similares. Mostraremos que M_{KTC} (o sea el modelo canónico de KTC) es reflexivo. Sea $w \in W_{KTC}$; para cualquier $\Box\alpha \in w$, si $R_{KTC}wv$, $\alpha \in v$. Pero dado que $\Box\alpha \to \alpha$ es un axioma, $\Box\alpha \to \alpha \in w$ y, si $\Box\alpha \in w$, entonces $\alpha \in w$. Por lo tanto, $R_{KTC}ww$. Ahora bien, si β es válida en todo marco reflexivo, entonces es válida en M_{KTC} y por lo tanto es teorema de KTC. □

La prueba anterior, que con una breve modificación tomamos del texto de Hughes y Cresswell (1996), tiene el incoveniente de que no puede ser extendida a sistemas de dominio variable, por dos razones. La primera es que empleamos la fórmula Barcan para invertir el orden de aparición de un cuantificador y un operador modal. La segunda es que supusimos que una fórmula es válida si y solo si lo es su cerradura, pero eso es falso en el caso de dominio variable. Vale la prueba para marcos de domino decreciente, pero para demostrar el caso más general utlizaremos la técnica de las propiedades de consistencia, estrechamente relacionada con el método de los árboles semánticos que veremos enseguida para el cálculo de predicados modal, aunque también es útil para la lógica modal proposicional, y para el cálculo de predicados. Nos servirá para determinar que una fórmula es C válida y después podremos generalizarlo a la semántica de domino varible. Dado que la validez de una fórmula con variables libres es equivalente la validez de su cerradura universal, bastará con aplicar el método a enunciados. Así que en esta sección «enunciado» y «fórmula» son sinónimos. Un árbol de este tipo esquematiza una reducción al absurdo. Para que sea más claro comencemos haciendo un razonamiento de este tipo para demostrar que la fórmula:

$$((\exists x \diamond Px \wedge \Box\forall x(Px \to Qx)) \to \exists x \diamond Qx)$$

es válida. Supongamos que hay un mundo al que denotaremos por 0 en el que es falsa. Por lo tanto

$$\exists x \diamond Px \wedge \Box\forall x(Px \to Qx)$$

es verdadera en 0 (a) y

$$\exists x \diamond Qx$$

es falsa en 0 (b). Por (b), $\exists x \diamond Px$ es verdadera en 0 (c), y $\Box\forall x(Px \to Qx)$ es verdadera en 0 (d). Por (c), tiene que haber un elemento del dominio, llamémosle a, tal que $\diamond Pa$ es verdadera en 0 (e). Según (b), es falso que exista un elemento tal que satisfaga $\diamond Q$ Por lo tanto, $\diamond Qa$ es falsa en 0 (f). Para que se cumpla (e) debe haber un mundo 1 tal que $0R1$ (es decir, accesible desde 0) tal que Pa es verdadera en 1 (g). Por (f), no puede haber un mundo accesible desde 0 que haga verdadera a Qa. Por lo tanto: Qa es falsa en 1 (h). Por (d), $\forall x(Px \to Qx)$ tiene que ser verdadera en todo mundo accesible desde 0. En consecuencia $\forall x(Px \to Qx)$ es verdadera en 1 (i). Por (i), $(Pa \to Qa)$ es verdadera en 1 (j). Por ende, Pa es falsa en 1, o Qa es verdadera en 1. Lo primero no puede ocurrir por (g) y lo segundo es imposible por (h). Se sigue que la fórmula original es válida. Veremos enseguida que el árbol correspondiente es una representación esquemática del argumento anterior. Las reglas para hacer los árboles podemos darlas en términos de que un enunciado es falso o, equivalentemente, de que la negación de ese enunciado es verdadera. Ahora seguiremos la primera vía, y más tarde, la segunda.

El primer paso en la construcción del ábol es colocar en el nodo inicial la fórmula α de la que deseamos determinar si es válida acompañada de los símbolos F y 0. Es decir, estamos suponiendo que en un mundo 0 dicha fórmula es falsa. Ahora bien, supongamos ahora que estamos en un nodo η del árbol y que allí tenemos una expresión del tipo:

1a) $\neg\beta$, i, V, entonces el último nodo de cualquier rama abierta que pase por η podrá tener un descendiente directo (que será colocado en un nodo inmediatamente abajo de η y unido a η por un breve trazo vertical) con la expresión β, i, F.

1b $\neg\beta$, i, F, entonces el último nodo de cualquier rama que pase por η podrá tener un descendiente directo (que será colocado en un nodo inmediatamente abajo de ese nodo y unido a él por un breve trazo vertical) con la expresión β, i, V. En lo que sigue en lugar lugar de «el último nodo de cada rama abierta que pase por η» diremos «cada nodo relevante para η».

2a) $(\beta \wedge \gamma)$, i, V, entonces debajo de cualquier nodo relevante para η podemos colocar uno debajo del otro, los nodos β, i, V y γ, i, V unidos por un trazo vertical entre sí y con el último nodo de esa rama.

2b) $(\beta \vee \gamma)$, i, F, entonces debajo de cualquier nodo relevante para η colocaremos uno debajo del otro, los nodos β, i, F y γ, i, F unidos por un trazo vertical entre sí y con el último nodo de esa rama.

3a $(\beta \vee \gamma)$, i, V, entonces inmediatamente debajo de cualquier nodo relevante para η podemos agregar dos nodos β, i, V y γ, i, V independientes, unidos cada uno de ellos por un trazo vertical con el último nodo de esa rama..

3b) $(\beta \wedge \gamma)$, i, F, entonces inmediatamente debajo de cualquier nodo relevante para η podemos colocar dos nodos β, i, F y γ, i, F independientes unidos cada uno por un trazo vertical con el último nodo de esa rama..

Note que las reglas autorizan a hacer ciertas acciones, pero no imponen ningún orden para hacerlas.
No es necesario dar instrucciones para los restantes conectivos proposicionales, si recordamos la forma en que son definidos por medio de la conjunción, la disyunción y la negación. Por ejemplo, Si el nodo tiene $(\alpha \rightarrow \beta)\ i\ V$, entonces tendrá dos descendientes directos, como en el caso de la disyunción, conteniendo respectivamente las fórmulas $\alpha\ i\ F$ y $\beta\ i\ V$. Ahora veamos las reglas para los cuantificadores y para los operadores modales. Aquí emplearemos unas constantes nuevas a las que llamaremos «parámetros» que no juegan ningún rol fuera del árbol. Las reglas son las siguientes: Si en un nodo η del árbol tenemos una expresión del tipo:

4a) $\exists x \phi x\ V\ i$, cualquier nodo relevante a η podrá tener como descendiente directo a la expresión $\phi(x/c)\ V\ i$ donde c es una parámetro que no había parecido en ninguna fórmula de la rama en que se encuentra este nodo.

4b) $\exists x \phi x\ F\ i$, cada nodo relevante a η podrá tener como descendientes a las expresiones $\phi(x/c_1)\ F\ i, \ldots \phi(x/c_n)\ F\ i$ cada una debajo de la anterior, donde $c_1, \ldots c_n$ son todas las constantes y parámetros que han aparecido en alguna fórmula de la rama en que se encuentra este nodo. Si ninguna había aparecido, entonces solo agregamos $\phi(x/c)$ donde c es cualquier constante.

Las reglas del cuantificador universal pueden obtenerse de las anteriores usando la defínción del cuantificador universal en términos de la negación y del cuantificador existencial. Para el operador modal de posibilidad tenemos las dos reglas siguientes: Si en un nodo η del árbol tenemos una expresión del tipo:

5a $\diamond \alpha\ V\ i$ cualquier nodo relevante a η podrá tener como descendiente las expresiones iRj y abajo de esta $\alpha\ V\ j$, donde j es un índice que no había aparecido antes en esa rama.

5b $\diamond \alpha\ F\ i$ cada nodo relevante a η podrá tener como descendientes las expresiones $\alpha\ V\ j_1, \ldots \alpha\ V\ j_n$ cada una debajo de la anterior, donde cada j_l es tal que Rij_l había aparecido antes en esa rama.

Las reglas para el operador modal de necesidad ($\Box$) pueden ser obtenidas por la definición de $\diamond$ en términos de $\Box$ y $\neg$. En la rama de un árbol hay fórmulas que autorizan una acción en el árbol y solo una. Por ejemplo, si $\exists x A x\ V\ i$ aparece entonces en cada rama abierta ρ que pase por ese nodo podemos agregar una fórmula $Ac\ V\ i$ con c un parámetro nuevo en ρ. Pero una vez realizada esta instrucción el nodo no generará nuevas acciones (excepto que aparezca la negación de esa fórmula, en cuyo caso la rama se cerrará). Lo mismo sucede con los nodos que tienen una fórmula cuyo conectivo lógico principal es un conectivo proposicional clásico e igualmente con nodos con expresiones del tipo $\forall x A x\ F\ i$, $\diamond \alpha\ V\ i$ y $\Box \alpha\ F\ i$. En cambio, un nodo η con $\Box \alpha\ V\ i$, requerirá que al construir el árbol agreguemos una rama con la sucesión $\alpha\ V\ j$ para cada j tal que iRj esté en la rama, pero puede ocurrir que un vez finalizada esta operación aparezcan subsecuentemente un nuevo índice k tal que iRk esté en una

rama que pase por η en cuyo caso $\Box\alpha\ V\ i$ volverá a demandar una acción. Lo mismo sucede con nodos con expresiones del tipo $\Diamond\alpha\ F\ i$, $\exists x A x\ F\ i$, $\forall x A x\ V\ i$. Llamemos a los primeros nodos «efímeros»; y, a estos últimos, «duraderos». Por razones obvias es conveniente, siempre que se pueda, empezar con las acciones que autorizan los nodos efímeros.
Por último, cuando en una rama aparezcan una fórmula con un índice i seguida de V y esa misma fórmula también con índice i, pero seguida de F, pondremos una cruz a continuación, diremos que la rama está cerrada y eso significará que no debe extenderse más. Que todas las ramas del ábol se cierren indica que la fórmula en el nodo raíz no es satisfacible y que, por lo tanto, su negación es válida.

En esquema, éstas son las reglas para los cuantificadores:

Universal $\forall$			Existencial $\exists$		
$\forall x\Phi(x)$	i	V	$\exists x\Phi(x)$	i	F
$\vert$			$\vert$		
$\Phi(c)$	i	V	$\Phi(c)$	i	F

donde c es una constante que aparecía antes en la rama o que aparezca en lo sucesivo, o cualquier constante si ninguna ha aparecido hasta ahora.

Universal $\forall$			Existencial $\exists$		
$\forall x\Phi(x)$	i	F	$\exists x\Phi(x)$	i	V
$\vert$			$\vert$		
$\Phi(a)$	i	F	$\Phi(a)$	i	V

donde a es una constante que no había aparecido antes en la rama. Las 4 reglas para los operadores modales pueden ser esquematizadas así,

Primera			Segunda		
$\Box\alpha$	i	V	$\Diamond\alpha$	i	F
$\vert$			$\vert$		
α	j	V	α	j	F

donde j es cualquier índice tal que iRj había aparecido en la rama o que aparezca en lo sucesivo.

Tercera			Cuarta		
$\Box\alpha$	i	F	$\Diamond\alpha$	i	V
$\vert$			$\vert$		
iRj			iRj		
$\vert$			$\vert$		
α	j	V	α	j	V

donde j es un índice que no había aparecido antes en la rama. La cláusula «que aparezca en lo sucesivo» alude al caracter duradero de esos nodos. Los otros son efímeros y, por lo tanto, la acción que comandan solo podrá realizarse una vez. Comprobemos por este método que $(\exists x \Diamond Px \wedge \Box\forall x(Px \to Qx)) \to \exists x \Diamond Qx$ es C válida. Numeraremos algunas fórmulas para referirnos a ellas (pero esto no forma parte del árbol):

1	$(\exists x \diamond Px \wedge \Box\forall x(Px \to Qx)) \to \exists x \diamond Qx$	0	F	
2	$(\exists x \diamond Px \wedge \Box\forall x(Px \to Qx))$	0	V	
3	$\exists x \diamond Qx$	0	F	
4	$\exists x \diamond Px$	0	V	
5	$\Box\forall x(Px \to Qx)$	0	V	
6	$\diamond Pa$	0	V	(de 4)
7	$\diamond Qa$	0	F	(de 3)
	$0R1$			
8	Pa	1	V	(de 6)
9	Qa	1	F	(de 7)
10	$\forall x(Px \to Qx)$	1	V	(de 5)
11	$Pa \to Qa$	1	V	(de 10)

Pa 1 F Qa 1 V

⊗ ⊗

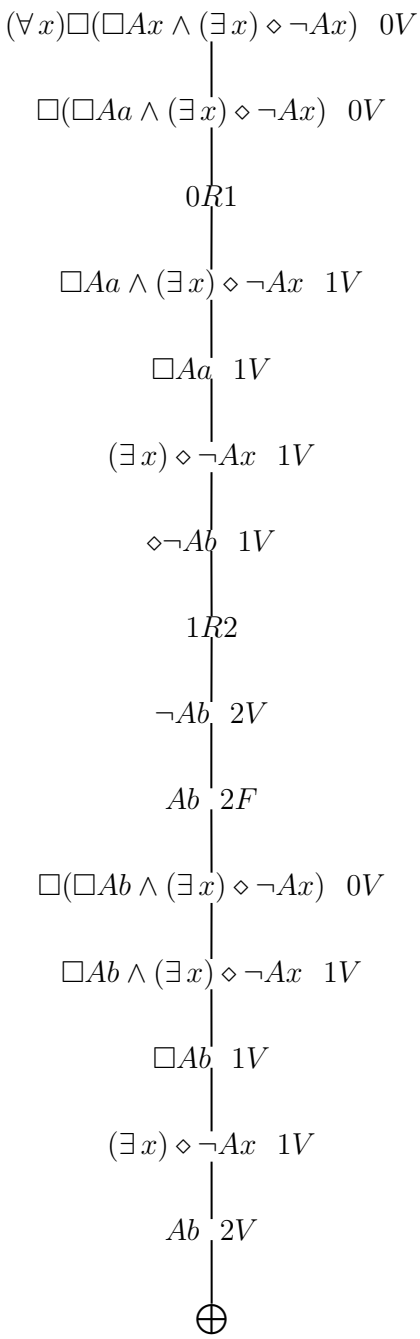
Probemos con este método que $\forall x\Box Ax \to \forall x Ax$ es válida en todo C modelo reflexivo. Para ello emplearemos la regla de que para cada índice i que aparezca en el árbol, podemos agregar iRi.

1	$\forall x\Box Ax \to \forall x Ax$	0	F	
2	$\forall x\Box Ax$	0	V	
3	$\forall x Ax$	0	F	
4	Aa	0	F	(de 3)
5	$\Box Aa$	0	V	(de 2)
	$0R0$			
6	Aa	0	V	(de 6)

⊗

Mostraremos ahora, con un árbol, que la fórmula $(\forall x)\Box(\Box Ax \wedge (\exists x) \diamond \neg Ax)$ es falsa en todo C-modelo serial. Para ello agreguemos la regla de que si en un nodo

hay un índice i y en una rama que pasa por allí no hay j tal que iRj figure en la rama, podemos agregar iRk tal que k es un índice nuevo en la rama.



El nodo final viene del antepenúltimo. Ahora, con ayuda de un árbol, mostraremos que la fórmula $(\diamond\forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge \exists x\Box\neg Bx) \rightarrow \exists x\Box\neg Ax$ es satisfacible. Por ende, debemos comenzar poniendo esa fórmula con el valor V e índice 0 en la raíz del árbol. En este encontraremos una rama que, una vez completamente desarrollada, no se cierra.

1	$\Diamond\forall x(Ax \to Bx) \wedge \exists x\Box\neg Bx$	0	V	
2	$\exists x\Box\neg Ax$	0	F	
3	$\Diamond\forall x(Ax \to Bx)$	0	V	de (1)
4	$\exists x\Box\neg Bx$	0	V	de (1)
5	$\Box\neg Ba$	0	V	de (4)
6	$\Box\neg Aa$	0	F	de (2)
	$0R1$			
7	$\forall x(Ax \to Bx)$	1	V	de (3)
8	$Aa \to Ba$	1	V	de (7)
9	$\neg Ba$	1	V	de (5)
	$0R2$			
10	Aa	2	V	de (6)
11	$\neg Ba$	2	V	de (5)

Hemos omitido un paso para simplificar el ábol. Después de la línea 8 debimos bifurcar el árbol, pero solo trazamos la rama que no se cierra inmediatamente y de la cual podemos extraer el modelo que falsifica la fórmula anterior.

$D = \{a\}$
$W = \{0, 1, 2\}$
$R = \{(0, 1), (0, 2)\}$
$V(1, A) = \emptyset$
$V(1, B) = \emptyset$
$V(2, A) = \{a\}$
$V(2, B) = \emptyset$

Dado que en los árboles no empleamos fórmulas abiertas, en la prueba de la adecuación y validez del método no será necesario recurrir a asignaciones. Por ello hablaremos de modelos donde estrictamente hablando solo tratamos con estructuras. Debe entenderse que la asignación permanece implícita porque es irrelevante.

Definición 5.6.29. Una rama r de un árbol es fiel a un modelo $M = \langle W, R, D, \sigma\rangle$ si hay una función f del conjunto de índices que aparecen en r a W tal que:

a) Si iRj aparece en r, entonces $(f(i), f(j)) \in R$.

b) Si α i verdadero aparece en r, $M, f(i) \models \alpha$, y si α i falso aparece en r, $M, f(i) \not\models \alpha$),

De f diremos que muestra que la rama es fiel a M.

Definición 5.6.30. Un árbol es fiel a un modelo si una de sus ramas lo es.

Definición 5.6.31. Dados dos modelos M y M', decimos que son variantes notacionales el uno del otro si sólo difieren en el valor que las respectivas funciones σ y σ' otorgan a las constantes.

 Teorema 5.6.32. *Si un árbol es fiel a un modelo $M = \langle W, R, D, \sigma \rangle$ y es extendido por una regla de construcción de árboles, entonces el árbol resultante es fiel a M o a una variante notacional de M.*

Demostración. El caso de las reglas para el análisis de conectivos proposicionales es muy sencillo. Supongamos que una rama r de un árbol termina en un nodo de la forma $\Diamond\alpha$ i *verdadero*, y que r se extendió de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
 & | & \\
\Diamond\alpha & i & \text{verdadero} \\
 & | & \\
iRj & & \\
 & | & \\
\alpha & j & \text{verdadero}
\end{array}
$$

donde j es un índice que no había aparecido en la rama. Por hipótesis de inducción, la fórmula $\Diamond\alpha$ es verdadera en el mundo $f(i)$ del modelo y existe, por lo tanto, un mundo v tal que $f(i)Rv$ en que α es verdadero en v. Sea $g(k) = f(k)$ para todo índice k que aparece en r y $g(j) = v$. Entonces g muestra que la rama extendida es fiel a M. Ahora supongamos que una rama r de un árbol termina en un nodo de la forma $\Diamond\alpha$ i *falso* y que r se extendió de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
 & | & \\
\Diamond\alpha & i & \text{falso} \\
 & | & \\
iRj & & \\
 & | & \\
\alpha & j & \text{falso}
\end{array}
$$

donde j es un índice tal que iRj había aparecido en la rama. Entonces la fórmula $\Diamond\alpha$ es falsa en el mundo $f(i)$ del modelo y $f(i)Rf(j)$. Por lo tanto, α es falsa en el mundo $f(j)$ y la rama extendida es fiel a M. Supongamos ahora que el último nodo de r contiene $\exists x \Phi x$ i *verdadero* y que r se extendió de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
\vert & & \\
(\exists x)\Phi x & i & \text{verdadero} \\
\vert & & \\
\Phi(b) & i & \text{verdadero}
\end{array}
$$

donde b es una constante que no aparece en r. Por hipótesis de inducción, $\exists x \Phi x$ es verdadero en el mundo $f(i)$ (de M o de M'). Por lo tanto, existe un elemento O de D que satisface $\sigma(f(i), \Phi x)$, es decir, la propiedad que σ asigna a Φx en $f(i)$. Entonces la extensión de r es fiel a la variante de M que asigna a b el elemento O puesto que b es una constante que no aparecía en r. El caso del cuantificador existencial negado es similar. □

Corolario 5.6.33. *Si un árbol que tiene en su raíz $\neg\alpha$ V 0 (o α F 0) se cierra, α es C válida.*

Demostración. Supongamos que α no es C válida; entonces hay un modelo $M = \langle W, R, D, \sigma \rangle$ y un mundo $0 \in W$ tal que $\neg\alpha$ es verdadera en 0. Por consiguiente, el árbol que solo tiene como nodo $\neg\alpha \quad 0 \quad V$ es fiel a M. En ninguno de los subsecuentes desarrollos ese árbol se cerrará pues cada uno de ellos contendrá una rama r que será fiel a M (y por lo tanto r no contendrá una fórmula y su negación). De aquí se sigue el corolario. □

El resultado anterior puede adaptarse fácilmente al caso en que agreguemos a las reglas para los árboles la indicación de que para cada índice i que aparezca en una rama, debemos agregar iRi. Si llamamos a estos árboles simétricos, podemos demostrar que si un árbol simétrico con $\neg\alpha$ V en su raíz se cierra, entonces α es C válida en todo modelo simétrico y lo mismo ocurrirá para los otros tipos de modelos que vimos en el repaso del inicio de este capítulo. Antes de demostrar la completud de nuestro método de árboles, advirtamos que si α es C válida no cualquier árbol de su negación se cierra. Puede ocurrir, por ejemplo, que el árbol esté incompleto, es decir, que sea posible extenderlo aún con alguna de las reglas de construcción de árboles. O también podría suceder lo que se ilustra en el siguiente ejemplo. Evidentemente,

$\exists y \forall x Axy \vee (\Box(Aa \wedge Ba) \leftrightarrow (\Box Aa \wedge \Box Ba))$ es C válida. Supongamos, sin embargo, que iniciamos de la siguiente manera el árbol de esta fórmula:

$$\begin{array}{lll}
\exists y \forall x Axy \vee (\Box(Aa \wedge Ba) \rightarrow (\Box Aa \wedge \Box Ba)) & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
\exists y \forall x Axy & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
(\Box(Aa \wedge Ba) \leftrightarrow (\Box Aa \wedge \Box Ba)) & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
\forall x Axa & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
Aba & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
\forall x Axb & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
Acb & 0 & \text{falso} \\
\vert & & \\
\forall x Axc & 0 & \text{falso}
\end{array}$$

Y la rama se extenderá en forma indefinida, sin nunca cerrarse. La moraleja es que debemos desarrollar el árbol sistemáticamente para asegurarnos de que cada nodo se desarrolla en uno u otro momento. Si lo hacemos con cuidado, una rama abierta de un árbol completo nos dará la pauta para construir un modelo en que la fórmula del nodo original sea verdadera. En seguida daremos un método para la construcción de un árbol sistemático a fin de verificar si una fórmula cerrada α tiene un K-modelo. Dado que una fórmula con una constante es satisfacible si y sólo si lo es la fórmula que se obtiene al remplazar esa constante por una variable que no aparezca en la fórmula y anteponer al resultado un cuantificador existencial en esa variable (por ejemplo, $\Box A(c)$ es satisfacible si y sólo si $\exists x \Box A(x)$), podemos suponer que la fórmula en cuestión no tiene constantes.

Definición 5.6.34. Llamaremos «árbol sistemático para la fórmula α» al árbol que está construido de acuerdo con el siguiente procedimiento:

Etapa 1. Colocamos en el nodo raíz $\alpha \quad 0 \quad F$.

Etapa n+1. Supongamos que al terminar la n-ésima etapa el árbol no se ha cerrado. En las instrucciones que siguen evite repeticiones (no escriba una fórmula, un índice y un valor de verdad en un nodo si en otro nodo de la rama ya aparece esa fórmula con ese índice y el mismo valor de verdad). Tome el primer nodo más elevado (es decir, cercano a la raíz) que se encuentre en una rama abierta y que tenga una fórmula no palomeada. Si varios están a la misma altura, tome el que esté en la rama (abierta) más a la izquierda. Llamemos n al nodo y $\mathcal{F}$ a la fórmula en cuestión. Haga lo siguiente:

1. Si $\mathcal{F}$ tiene como operador lógico principal un conectivo proposicional, agregue al final de cada rama abierta que pase por el nodo n el árbol correspondiente a $\mathcal{F}$ y al valor que $\mathcal{F}$ tiene en n. Por ejemplo, si en n se halla la fórmula $(\gamma \wedge \beta)$

con el índice i y el valor V, agregue al final de cada una de las ramas susodichas la terminación:

$$\begin{array}{l} | \\ \gamma \quad i \quad V \\ | \\ \beta \quad i \quad V \end{array}$$

En lo sucesivo, abreviaremos «cada rama abierta que pase por el nodo n» por «cada rama adecuada».

2. Si en n se halla una línea de la forma $(\exists x)\beta x \quad i \quad V$ (o bien $(\forall x)\beta x \quad i \quad F$), agregue al final de cada rama adecuada la terminación

$$\begin{array}{l} | \\ \beta k \quad i \quad V \end{array}$$

o

$$\begin{array}{l} | \\ \beta k \quad i \quad F \end{array}$$

donde k es la primera constante de nuestro lenguaje (supondremos que se ha dado un orden lineal al conjunto de constantes) que no ha aparecido hasta ahora en el árbol.[8].

3. Si n contiene una línea de la forma $\diamond\beta \quad i \quad V$ (o $\Box\beta \quad i \quad F$), agregue al final de cada rama adecuada la terminación

$$\begin{array}{l} iRj \\ | \\ \beta \quad j \quad V \end{array}$$

o

$$\begin{array}{l} iRj \\ | \\ \beta \quad j \quad F \end{array}$$

donde j es el primer índice (suponemos que están numerados) que no ha aparecido en el árbol.[9].

4. Si n contiene una línea de la forma $(\forall v)\beta v \quad i \quad V$ (o $(\exists v)\beta v \quad i \quad F$), agregue al final de cada rama adecuada la terminación

[8]Si ninguna constante ha aparecido, sea k la primera constante.

[9]Esto significa que si al aplicar la regla a una rama usamos j como índice, en otra rama no podremos usar j.

$$\begin{array}{lll} \beta(v/a) & i & V \\ \quad | & & \\ \beta(v/b) & i & V \\ \quad \vdots & & \\ \beta(v/m) & i & V \\ \quad | & & \\ (\forall v)\beta & i & V \end{array}$$

o

$$\begin{array}{lll} \beta(v/a) & i & F \\ \quad | & & \\ \beta(v/b) & i & F \\ \quad \vdots & & \\ \beta(v/m) & i & F \\ \quad | & & \\ (\exists v)\beta & i & F \end{array}$$

donde $a, b, \ldots, m$ son todas las constantes que han aparecido en la rama.

5. Si n tiene una línea de la forma $\Box\beta \;\; i \;\; V$, agregue al final de cada rama adecuada la terminación

$$\begin{array}{lll} & | & \\ \beta & l & V \\ & | & \\ \beta & m & V \\ & \vdots & \\ \beta & m & V \; | \\ \Box\beta & i & V \end{array}$$

En forma análoga si n tiene la línea $\diamond\beta \;\; i \;\; F$, agregue

$$\begin{array}{lll} & | & \\ \beta & l & F \\ & | & \\ \beta & m & F \\ & \vdots & \\ \beta & i & F \\ & | & \\ \diamond\beta m & & F \end{array}$$

donde $l, m \ldots n$ son todos los índices tal ques iRl, iRm...iRn aparecen en la rama.

Palomee la fórmula $\mathcal{F}$. Con ello termina la nésima etapa. Si en cualquier paso se agrega una expresión $\alpha \;\; i \;\; V$ a una rama en la que ya se encuentra $\alpha \;\; i \;\; F$, o

viceversa, cierre la rama. Si hay aún ramas abiertas, reinicie el proceso y repítalo hasta que ya no sea posible aplicar ninguna regla más.

Definición 5.6.35. Un árbol completo es un árbol que no puede desarrollarse ulteriormente por alguna de las reglas de construcción de árboles.

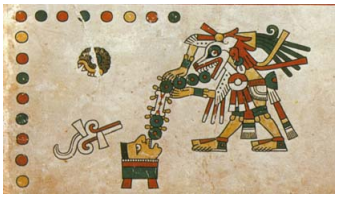
Definición 5.6.36. Dado un árbol A sistemático y completo que tiene en su origen $\neg\alpha$ 0 $falso$ y una rama r de A que no se cierra, definimos la interpretación M_r como $M_r = \langle W_r, R_r, D_r, \sigma_r \rangle$ donde,
$W_r = \{i \in N \mid i \texttt{ es un índice de } r\}$
$R_r = \{(i,j) \in N^2 \mid iRj \texttt{ aparece en } r\}$
$D_r = \{c \mid c \texttt{ es un parámetro que aparece en } r\}$
y $\sigma_r(k) = k$ para cada constante k que aparece en el árbol. Sean A un símbolo de n-predicado y $t_1, \ldots, t_n$ parámetros que aparecen en el árbol; entonces $(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n) \in \sigma_r(i, A)$ si y solo si $A(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ V i verdadero aparece en un nodo de r.

 **Teorema 5.6.37.** *Sea A un árbol sistemático y completo y r una rama abierta de A. Dada una fórmula α, si α i verdadero aparece en r, entonces $M_r, i \models \alpha$ y si α i falso aparece en r, entonces $M_r, i \not\models \alpha$.*

Demostración. En el caso de una fórmula atómica α, si α i *verdadero* aparece en r, entonces $M_r, i \models \alpha$ por definición de M_r y si α i *falso* aparece en r, entonces α i *verdadero* no aparece en r, pues r es abierta. Por lo tanto, $M_r, i \not\models \alpha$. Si α es $\neg\beta$ y α i verdadero aparece en r, entonces β i *falso* también aparece en r. Por hipótesis de inducción $M_r, i \not\models \beta$ y, por lo tanto, $M_r, i \models \alpha$. El caso en que $\neg\beta$ i falso aparece en r, así como los otros casos proposicionales, es similar. Si α es $\forall x \beta x$ entonces, por la forma en que fue construido el árbol sistemático, $\beta(t)$ i verdadero aparecerá en la rama para cada $t \in D_r$. Por hipótesis de inducción, $\beta(x)$ será satisfecha en el mundo i por cada elemento del dominio D_r. Por lo tanto, $M_r, i \models \alpha$. Si α es de la forma $\exists x \beta x$ y $\exists x \beta x$ i verdadero aparece en r, entonces βc i verdadero (c es un parámetro) aparecerá en la rama. Por hipótesis de inducción, βc es verdadera en i y, por lo tanto $M_r, i \models \alpha$. Los casos de fórmulas cuantificadas falsas son similares. Si α es de la forma $\Box\beta$ y $\Box\beta$ i verdadero aparece en r, entonces si i es un mundo terminal (que no ve a ningún otro), $M_r, i \models \Box\beta$. Si no, entonces existe j tal que Rij, lo que significa que iRj apareció en la rama, así como β j verdadero, y, por hipótesis de inducción, que $M_r, j \models \beta$ y esto ocurre para cada una de tales j. Por lo tanto, $M_r, i \models \Box\beta$). Si α es $\diamond\beta$ y $\diamond\beta$ i verdadero aparece en r, entonces también aparecen en r iRj y β j *verdadero* (con j como un índice que no había aparecido antes en la rama). Por construcción de M_r, Rij y, por hipótesis de inducción, $M_r, j \models \beta$). Por lo tanto, $M_r, i \models \diamond\beta$. Los casos de falsedad son similares. ∎

Corolario 5.6.38. *Si α es un enunciado sin constantes C válido, un árbol sistemático para α (es decir con $\neg\alpha$ i V en su raíz) se cierra.*

Demostración. Tomemos el árbol sistemático y completo para $\neg\alpha$ y supongamos que tiene una rama abierta r. Entonces, ya que en el primer nodo de la rama aparece $\neg\alpha$ 0 verdadero, $\neg\alpha$ es verdadero en el mundo 0 de M_r (de acuerdo con el teorema) y, por lo tanto, α es falso en ese mundo. De allí se sigue que α no es C válida. ❐



Dicen que esta era una vieja que consiguió detener la lumbre cuando apenas se desprendió de algunas estrellas o planetas. Ella no tuvo miedo y fue a traerla donde se cayó la lumbre y así la detuvo mucho tiempo, hasta que llegó un tiempo en que todos pensaron que esa lumbre iba a ser para todos y no sólo para la vieja y entonces se iban las gentes a la casa de la vieja a pedir lumbre; pero la vieja se puso brava y no quería dar a ninguno. Y así corrió el tiempo y corría la voz de que aquella vieja consiguió detener la lumbre, pero no quería regalar. Entonces intervino el Tlacuache y dijo a los asistentes:

«Yo, Tlacuache, me comprometo a regalar la lumbre, y si no me van a comer ustedes.»

Entonces hubo una burla muy grande al pobre animal, pero éste, muy sereno, contestó así:

«No me sigan burlando, porque la burla es para ustedes mismos, no es para mí, así que esta misma tarde verán ustedes cumplidas mis promesas.»

Al caer la tarde del mismo día, pasó el Tlacuache visitando casa por casa diciendo que él iba a traer la lumbre hasta donde está la vieja pero que los demás recogieran cuanto puedan. Y así llego hasta la cas de la vieja y le habló así:

«Buenas tardes, Señora Lumbre, ¡qué frío hace! Yo quisiera estar un rato junto a la lumbre y calentarme, porque me muero de frío.»

La vieja creyó que era cierto que tenía frío el Tlacuache y le admitió acercarse a la lumbre al Tlacuache; pero éste, muy astuto, se fue arrimando más y más hasta poder meterse a la lumbre, metiendo su cola y así poder llevar. Pues una vez ardiendo su cola se fue corriendo a repartir la lumbre hasta donde pudo alcanzar.

Y fue por eso que hasta ahora los tlacuaches tiene la cola pelada.

Relato mazateco

Había una vez en medio de la selva un tlacuache. Estaba encaramado en una mata de coconabe comiendo la fruta, cuando en un momento dado andaba paseando por ahí un tigre. Al escuchar un ruidito alzó la vista y logró ver al tlacuache, y le hizo una pregunta: «¿Qué andas haciendo en esa mata de coconabe?»

El otro le respondió que estaba comiendo fruta.

El tigre volvió a preguntar:

«¿Qué es esa fruta?»

A lo que le respondió: «Son los coyoles».

Entonces el tigre decidió comer uno también para saber si es sabroso el fruto.

Le pidió al tlacuache que aventara uno para que lo probara. Entonces como el tigre llevaba mucha hambre lo quiso tragar entero, pero no pudo, quedó trabado en su garganta, de allí se quedó privado hasta que se sacó la fruta. Cuando se recuperó empezó a perseguir al tlacuache para comérselo. Pero como el tlacuache andaba deteniendo una piedra para construir su casa, cuando llegó el tigre, éste le preguntó qué estaba haciendo. Entonces el tlacuache le pidió ayuda al tigre para que él pudiera ir a buscar unos palos. Pero de allí ya nunca volvió, entonces el tigre decidió soltar la piedra, pero como le había dicho que no fuera a soltarla porque se quedaría aplastado, no lo hizo, pero se había cansado, entonces la soltó y pegó un brinco pero la piedra siguió en su lugar.

Entonces el tigre se enfureció y persiguió al tlacuache hasta encontrarlo. Al fin el tigre encontró una galera en medio de un cañaveral, y allí estaba el tlacuache cruzado de piernas, tocando guitarra porque allí iba a realizarse una fiesta de boda. Entonces el tlacuache dijo al tigre que si quería tocar la guitarra, porque él iba a alcanzar al padre y a los que iban a contraer matrimonio. Pero le dijo que no dejara de tocarla y que no fuera a voltear la vista hasta que escuchara el primer cuetazo, y así lo hizo, cuando escuchó ese ruido volteó la vista, pero estaba rodeado de fuego, entonces dejó tirada la guitarra y se echó a correr saliendo todo chamuscado y muy molesto, iba con mucha decisión de encontrar al tlacuache y comerlo, por lo que se dedicó a perseguirlo.

Por fin llegó a una lagunita y casi en medio de ella se encontraba un árbol, entonces el tigre quiso tomar un poco de agua, cuando de pronto se dio cuenta que el tlacuache estaba allí, debajo del agua, entonces el tigre se puso a beber toda el agua, pero no pudo terminarla, se llenó mucho de tanta agua. Se acostó boca arriba, y se dio cuenta que arriba del árbol estaba trepado el tlacuache. Entonces el tigre le dijo que bajara de allí, pero el tlacuache no quiso. Entonces el tlacuache dijo que sí, pero que el tigre se lo tragara entero, y así lo hizo el tigre, se lo tragó vivo y entero. Al rato el tigre fue a arrojar, y ahí quedó tirado el tlacuache por un momento, y después le dijo al tigre:

«Te gané de nuevo.»

Al volver la vista el tigre, vio cómo salió corriendo el tlacuache.

Relato chontal

5.7 Modelos de dominio variable

La semántica dada en la sección anterior parece un tanto artificial pues supone de antemano que de un mundo a otro sólo puede haber alteración en la extensión de los predicados, es decir, en qué objetos subsumen, pero ningún elemento del dominio desaparece ni ninguno viene al ser, lo que parece poco probable, pues ¿no es claramente concebible que alguna de las cosas que nos rodean no hubieran existido? ¿Y no es asimismo posible pensar que algo que no existe pudo haber existido? Sin embargo, hay una manera de entender esa semántica que la hace más plausible. Podemos concebir al conjunto D no como el universo de lo que realmente existe sino como el universo de todos los objetos posibles, de los que existen o puede existir en alguna situación cualquiera e introducir una función D que a cada mundo le asocie un subconjunto de D. Por ejemplo, supongamos que agregamos al vocabulario lógico un predicado E que debe ser interpretado de la siguiente manera;
Para cualquier modelo de dominio constante $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$, $w \in W$ y t un término del lenguaje correspondiente: $E(w, t)$ si y solo si $\sigma\beta(t) \in D(w)$. Entonces podemos suponer que algunos objetos no existen en un mundo, aunque tengan propiedades en él. Es decir, podemos imitar una semántica de dominio variable utlizando el aparato que vimos anteriormente. El precio a pagar es adimitir el predicado E como un predicado lógico y determinar de antemano su comportamiento semántico y sintáctico. Más adelante regresaremos a este punto. Aun así, sería deseable tener una semántica en que los cuantificadores no corran sobre el universo de todo lo que pudo o podrá ser, sino sólo sobre la pluralidad de objetos que realmente son en una circunstancia determinada. En este caso, habrá el universo de todos los objetos posibles y un subconjunto del mismo asociado a cada mundo posible y que estará constituido por el dominio de objetos que realmente existen en ese mundo. El primero será el universo de todos los objetos sobre los que tiene sentido hablar y a los que podemos atribuir

o no cualquier propiedad dada. El segundo será el dominio sobre el que corren las variables en un mundo dado. Eso sí, cualquier objeto posible existirá en algún mundo u otro. Además supondremos que un objeto puede tener propiedades en un mundo en el que no existe, como Sherlock Holmes que en este mundo es un detective. Podríamos también postular que un enunciado en que aparece un término que no tiene denotación en un mundo carece de valor de verdad, pero eso genera otras complicaciones. Veamos ahora los detalles formales de esta semántica que, claramente, engloba el caso anterior.

Definición 5.7.1. Una *V estructura* para un lenguaje L es una cuádrupla

$$M = \langle W, R, D, \sigma \rangle$$

tal que

a) W es un conjunto no vacío (el conjunto de mundos posibles).

b) $R \subseteq W^2$.

c) D es una función tal que si $w \in W$, $D(w) \subseteq D$ ($D(w)$ se llamará dominio de w)

d) σ es una función tal que,

d.1)) si ϕ es una letra predicativa n-aria de L, entonces $\sigma(w, \phi) \subseteq D^n$.

d.2) si c es una constante de L, $\sigma(w, c) \in D$.

e) $D = \bigcup\{D(w) \mid w \in W\}$. D es el conjunto de objetos posibles o de los objetos sobre los que tiene sentido hablar y se llamará el dominio de la estructura (o del modelo cuando agreguemos una asignación).

Note que ahora una constante puede denotar diferentes elementos de D en diferentes mundos. Como dijimos, pudimos haberlo estipulado así desde la sección anterior. No es esto peculiar de la semática de dominio variable. Vamos paulatinamente ganando en generalidad.

Definición 5.7.2. Dado una V-estructura I, una asignación (para I) β es una función β: $VAR \Rightarrow D$, donde VAR es el conjunto de las variables del lenguaje LMS.

Definición 5.7.3. Una V-modelo o V-interpretación M es una quíntupla $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ en donde $\langle W, R, D, \sigma \rangle$ es una V-interpretación y β una asignación para esta interpretación.

A veces, cuando deberíamos hablar de una estructura diremos «modelo» en contextos en los que la asignación no sea relevante. Dado un V-modelo $M = \langle E, R, D, \sigma, \beta \rangle$, $e \in W$ y t un término del lenguaje denotaremos por $\sigma\beta$ a la función tal que si t es un variable $\sigma\beta(w, t) = \beta(t)$, mientras que si t es un constante $\sigma\beta(w, t) = \sigma(t)$. La definición del valor de verdad de una fórmula en un V modelo contiene una ligera variación con respecto a la que dimos para un C modelo.

Definición 5.7.4. Sea M un modelo $\langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$, y w un mundo de W. Definimos que una fórmula α, con respecto a M sea verdadera *en* w (lo que denotaremos como «$M, w \models \alpha$)» o simplemente «$w \models \alpha$», si M está sobrentendido), de la siguiente manera:

a) Si α es una fórmula atómica de la forma $\Theta^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (donde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos y Θ^n una letra funcional n-aria) $M, w \models \alpha$ si y sólo si $(\sigma\beta(t_1), \sigma\beta(t_2), \ldots, \sigma\beta\ (t_n)) \in \sigma(w, \Theta^n)$.

b) Si α es $\neg\gamma$, $M, w \models \alpha$ si y sólo si $M, w \not\models \gamma$.

c) Si α es $(\gamma \wedge \delta)$, entonces $M, w \models \alpha$ si y sólo si $M, w \models \gamma$ y $M, w \models \delta$.

d) Si α es $\forall x\gamma$, entonces $M, w \models \alpha$ si y sólo si $M(x/d), w \models \gamma$ para todo $d \in D(w)$.

e) Si α es $\Box\gamma$, entonces $M, w \models \alpha$ si y sólo si $M, v \models \gamma$ para todo $v \in W$ tal que Rwv.

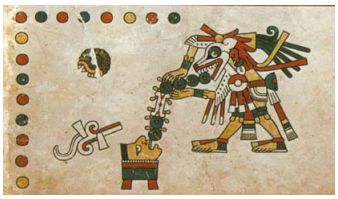
Notación. Dada una sucesión β definimos anteriormente una x-variante de β como una asignación que coincide con β en los valores que asigna a la todas la variables excepto quizás a x. Recordemos que un modelo M ya incluye una cierta asignación. Si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$, y ρ es otra asignación, denotamos por M_ρ al modelo $\langle W, R, D, \sigma, \rho\rangle$. Con esta convención pudimos escribir el inciso d) de la definición anterior así:
$M, w \models \forall x\gamma$ si y sólo si $M_\rho, w \models \gamma$ para toda ρ x-variante de β tal que $\rho(x) \in D(w)$.

Definición 5.7.5. Una *fórmula será válida en un* V estructura $M = \langle W, R, D, \sigma, \mu\rangle$ si es verdadera para toda asignación μ en cada mundo w de W.

Definición 5.7.6. Una fórmula es V válida si es válida en cada V estructura.

Adviértase que, con esta definición, la fórmula $(\forall xAx \to Ac)$ (donde c es una constante) no es V válida pues solo tomamos en cuenta las x variantes de una asignación que dan a x valores en el dominio del mundo w en que estamos evaluando la fórmula, mientras que el valor que σ asigna a c puede no estar contenido en el dominio del mundo en cuestión. Asimismo, la fórmula $(\forall xAx \to Ay)$ no es V válida, por ejemplo en la siguiente interpretación es falsa,
$W = \{w, v\}$
$D = \{1, 2, 3\}$
$D(w) = \{1, 2\}$
$D(v) = \{1, 3\}$
$R = \{(w, v)\}$
$\sigma(w, A) = \{1, 2\}$
$\sigma(v, A) = \{1, 3\}$.
Sea η una sucesión cualquiera tal que $\eta(y) = 3$. Note que $M_\eta, w \models \forall xAx$ pues toda x variante de η que asigna a x valores en $D(w)$ hace a Ax verdadera. En cambio, $M_\eta, w \not\models Ay$). Esto significa que uno de los axiomas del cálculo de predicados no

es V válido. En cambio, el esquema $\forall y(\forall x \Phi x \to \Phi y)$ (con y libre para x en Φx) es válido pues los valores que puede tomar y al igual que los valores que puede tomar x pertenecen al dominio en que estamos evaluando la fórmula. Note, que $\forall y \Box(\forall x Ax \to Ay)$ no es válido en w del modelo anterior, pues y puede tomar un valor distinto al que toma x. Sin embargo, pudimos haber alcanzado esta fórmula a través de inferencias que parecen sólidas sea en lógica modal, sea en el cálculo de predicados, partiendo de la fórmula $(\forall x Ax \to Ay)$ que es clásicamente válida. En cambio, $\forall y \Box(\forall x Ax \to Ay)$ es válida en modelos en que la relación R es monótona creciente, es decir, que cada vez que Rwv tenemos que $D(w) \subseteq D(v)$, condición que a su vez cumple en un modelo si y sólo si en él el inverso de la fórmula Barcan (IBF) es válida. Enseguida exploraremos este caso, en preparación para luego abarcar el dominio variable en toda su generalidad.



Antes no había luz. Sólo una señora la tenía. Entonces llamaron a todos los animales. La señora tenía una fiesta y el tlacuache pasó e invitó a todos, pero el conejo era muy mañoso y no quiso ir. La señora comía gente.

A la luna que era más tonta que el Sol se la comieron en la fiesta y ya nomás quedaba el Sol. Al perrito le daban los huesos. La cabeza que estaba en la olla era la Luna. El Sol le pide al perrito que se robe la cabeza. El perrito se lleva los huesos al monte y los va tirando.

Los animales sacaban a bailar a la señora pero ésta no quería porque estaba cuidando la cabeza de la olla y tenía miedo de que si se iba, se la iban a robar.

Pero el tlacuache, tocando su jarana distrajo a la señora que se puso a bailar y el perrito se llevó la olla con la cabeza.

Entonces el tlacuache, porque aguanta muchos golpes, salió corriendo por el patio donde estaba regada la lumbre y se le prendió la cola y repartió la lumbre. Por eso el tlacuache tiene la cola como quemada.

La Luna y el Sol son hermanos y el Sol formó a la Luna otra vez, pero faltaba un pedazo de hueso, por eso la Luna está muy pálida...

Cuento mazateco

5.8 La semántica IFB

En esta sección trataremos brevemente con modelos de dominio variable que satisfacen la condición de monotonía creciente y con otros sistemas. Más adelante estudiaremos la semántica con dominio variable en toda su generalidad y entonces introduciremos sistemas axiomáticos en los que no serán válidas todas las reglas del cálculo de predicados aun cuando las fórmulas a que se apliquen sean cerradas o carezcan de constantes.

Ejemplo 5.8.1. Veamos que $\exists x \diamond (Ax \rightarrow \forall y By) \rightarrow \diamond(\forall x Ax \rightarrow \forall y By)$ no es V válida, pero sí es válida en todo modelo monótono creciente.

Sea $M = \{w, v\}$
$R = \{(w, v)\}$
$D(w) = \{a\}$
$D(v) = \{b, c, d\}$
$\sigma(w, A) = \sigma(w, B) = \emptyset$
$\sigma(v, A) = \{b, c, d\}$
$\sigma(v, B) = \{b\}$.

Claramente, si $\mu(x) = a$. $M_\mu, w \models \diamond(Ax \rightarrow \forall y By))$. Por lo tanto, $M, w \models \exists x \diamond (Ax \rightarrow \forall y By))$. En cambio, $M, w \not\models \diamond(\forall x Ax \rightarrow \forall y By)$. Supongamos ahora que tenemos un modelo $M = \langle W, R, D, V\rangle$ monótono creciente y supongamos que $M_\beta, w \models \exists x \diamond (Ax \rightarrow \forall y By)$ para una asignación β. Existe entonces una x variante μ de β tal que $M_\mu, w \models \diamond(Ax \rightarrow \forall y By))$ y sea a tal que $\mu(x) = a \in D(w)$. Por lo tanto, existe v tal que Rwv y $M_\mu, v \models (Ax \rightarrow \forall y By))$. Eso significa que o bien a no satisface Ax en v o bien a satisface Ax en v y $\forall y By$ es verdadero en v. Ahora bien, como el modelo es monótono creciente, $a \in D(v)$ y, por lo tanto, en el primer caso, $\forall x Ax$ es falso en v y (en consecuencia) $(\forall x Ax \rightarrow \forall y By)$ es verdadero en v. En el segundo caso, $(\forall x Ax \rightarrow \forall y By)$ es verdadero en v. De todas formas, $\diamond(\forall x Ax \rightarrow \forall y By)$ es verdadero en w.

Definición 5.8.2. Un MC modelo es un V modelo en el que R es monótona creciente.

Definición 5.8.3. Una fórmula es MC válida si es válida en todo MC modelo.

Observe que la fórmula $((\forall x)Ax \rightarrow Ac)$ no es MC válida, pues puede ocurrir que todos los elementos del domino de un mundo tengan la propiedad que es la denotación del predicado A, pero no así la denotación de c en ese mundo, pues podría no pertenecer a ese dominio. La construcción de árboles semánticos para la determinación de validez en modelos monótonos crecientes requiere solo de una leve modificación.

Ejemplo 5.8.4. Tomemos el árbol para determinar la C validez de la fórmula Barcan $\forall x \Box Ax \rightarrow \forall x Ax$ (enumeramos las fórmulas para referencia posterior).

1. $\forall x \Box Ax$ 0 V
   |
2. $\Box \forall x Ax$ 0 F
   |
   $0R1$
   |
3. $\forall x Ax$ 1 F
   |
4. Aa 1 F
   |
5. $\Box Aa$ 0 V
   |
6. Aa 1 V
   |
   $\otimes$

La nueva regla que daremos no nos autorizará el paso 5 que surge de la aplicación de la regla para $\forall x \Box Ax$ en un mundo utilizando una constante que apareció en un mundo "posterior". La razón es que la constante que surge en un mundo subsiguiente puede representar a un individuo que no está en el dominio de los mundos anteriores. En este caso, el objeto denotado por a podría no existir en el mundo 0. En lo que sigue, cada constante tendrá un subíndice que será el índice del mundo en que fue introducida, y la regla para el cuantificador universal verdadero (o para el cuantificador existencia falso) será la siguiente:

Universal $\forall$

$\forall x \Phi(x)$ i V
|
$\Phi(t)$ i V

Existencial $\exists$

$\exists x \Phi(x)$ i F
|
$\Phi(t)$ i F

donde t es una constante cuyo índice no excede a i y que aparece en la rama hasta este nodo o en forma subsecuente (o una nueva si ninguna ha aparecido, en cuyo caso tendrá índice i). Ahora comprobemos que IFB sí es válida en marcos monótonos crecientes, según este método,

$\Box\forall x Ax \quad 0 \; V$
|
$\forall x \Box Ax \quad 0 \; F$
|
$\Box Aa_0 \quad 0 \; F$
|
$0R1$
|
$Aa_0 \quad 1 \; F$
|
$\forall x Ax \quad 1 \; V$
|
$Aa_0 \quad 1 \; V$
|
$\otimes$

Mientras que para la fórmula Barcan el árbol correspondiente es el siguiente:

$\forall x \Box Ax \quad 0 \; V$
|
$\Box\forall x Ax \quad 0 \; F$
|
$\Box Aa_0 \quad 0 \; V$
|
$0R1$
|
$\forall x Ax \quad 0 \; F$
|
$Aa_1 \quad 1 \; F$
|
$Aa_0 \quad 1 \; V$

Esta vez no podemos soslayar los árboles para fórmulas con constantes, pues las condiciones de satisfacibilidad de Ac y de $\exists x Ax$ no son las mismas, pero resolveremos el problema cuando hayamos introducido el predicado de identidad.

...los dioses dijeron entre sí: «He aquí que el hombre estará triste si no le hacemos nosotros algo para regocijarle y a fin de que tome gusto en vivir en la tierra y nos alabe y cante y dance». Lo que oído por el dios Ehécatl, dios del aire, en su corazón pensaba dónde podría encontrar un licor para entregar al hombre para hacerle alegrarse. Pensando en lo cual, le vino a la memoria la diosa virgen llamada Meyáhuel, y se fue enseguida a donde estaban ellas, a las que encontró dormidas. Y despertó a la virgen y le dijo, a la cual guardaba una diosa su abuela llamada Cicímitl: «Te vengo a buscar para llevarte al mundo». En lo que ella convino enseguida y así descendieron ambos, llevándola él sobre sobre sus espaldas.

Y tan pronto como llegaron a la tierra se mudaron ambos en un árbol que tiene dos ramas, la una se llama quetzalhuéxotl, que era la de Ehécatl, y la otra Xochicuáhuitl, que era la de la virgen. Mientras, su abuela dormía. Cuando hubo despertado y no encontró a su nieta, apellidó en seguida a otras diosas que se llaman cicimime. Y descendieron todos a la tierra a buscar a Ehécatl, y a esta razón las ramas se desgajaron las dos, la cual la tomó y, rompiéndola, entregó a cada una de las otras diosas un trozo, y lo comieron.

Pero la rama de Ehécatl no la rompieron, sino la dejaron allí. La que tan luego como las diosas subieron al cielo, se retornó a su primera forma de Ehécatl, el cual reunió los huesos de la virgen, los enterró y de ahí salió un árbol que ellos llaman metl, del cual hacen los indios el vino que beben y con que se embriagan.

Relato Mexica

Dicen también que este mismo dios Tezcatlipuca creó el aire, el cual apareció en figura negra, con una gran espina toda sangrante, el signo de sacrificio. A éste dijo el dios Tezcatlipuca: «Viento, vete a través del mar a la casa del Sol, el cual tiene muchos músicos y trompeteros consigo, que le sirven y cantan entre los cuales hay uno de tres pies, los otros tienen las orejas tan grandes que les cubren todo el cuerpo. Y, una vez llegado a la orilla del agua, apellidarás a mis criados Acapachtli, que es «tortuga», y Acíhuatl, que es «mitad mujer, mitad pez», y Atlicipactli, que es la «ballena», y dirás a todos que hagan un puente a fin de que tú puedas pasar, y me traerás de la casa del Sol los músicos con sus instrumentos para hacerme honra. Y esto dicho, se fue sin ser más visto.

Entonces, el dios del aire se fue a la orilla del agua y apellidó sus nombres, y vinieron incontinente se hicieron un puente, por el que él pasó. Al cual viendo venir el Sol, dijo a sus músicos: «He aquí al miserable. Nadie le responda, pues el que le respondiere, irá con él».

Estos dichos músicos estaban vestidos de cuatro colores: blanco, rojo, amarillo y verde.

A donde habiendo llegado el dios del aire, los llamó cantando, al cual respondió enseguida uno de ellos y se fue con él y llevó la música, que es la que ellos usan ahora en sus danzas en honor de sus dioses...

Relato Mexica

5.9 Sistemas axiomáticos con el inverso de la fórmula Barcan

Ahora introducimos un sistema axiomático nuevo que ocupará, con respecto a la semántica con dominio monótono creciente, el lugar que K tenía relativo a la semántica con dominio fijo. En realidad se trata de un sistema para el cálculo de predicados al que se adjuntan los principios modales de K y el inverso de la fórmula Barcan (IFB). Hubiésemos podido tomar la misma axiomatización de la lógica clásica que empleamos en la sección anterior, pero entonces habríamos tenido que modificar el teorema de corrección para restringirlo a la cerradura de los teoremas porque recuerde que $(\forall x Ax \to At)$ es válida en el cálculo de predicados, pero no en la semántica modal de dominio monótono creciente.

Definición 5.9.1. Sea KM el sistema que tiene como axiomas las fórmulas de las siguientes formas:

1. Cualquier instancia de una tautología.
2. $\forall x\alpha \leftrightarrow \alpha$, donde α es una fórmula que no contiene libre a x.
3. $\forall x(\alpha x \to \beta x) \to (\forall x\alpha x \to \forall x\beta x)$.
4. $\forall y(\forall x\alpha x \to \alpha y)$ si y es libre para x en αx.

5. $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$.

6. $(\forall x \forall y \alpha \to \forall y \forall x \alpha)$.

7. $\Box\forall x\alpha \to \forall x\Box\alpha$ (IFB).

Y como reglas de inferencia:
Generalización: De α se sigue $\forall x\alpha$
Modus ponens: De $\alpha \to \beta$ y α se sigue β
Necesidad: De α, se sigue $\Box\alpha$.

Ejemplo 5.9.2. La siguiente es una demostración (abreviada) en KM de la fórmula

$$\Box\forall x(Ax \to \forall y Bxy) \to (\exists x \diamond Ax \to \diamond(\forall y)(\exists x)Bxy)$$

1 $\forall x(Ax \to \forall y Bxy) \to (\exists x Ax \to \exists x \forall y Bxy)$ Teorema del CP.

2 $\Box\forall x(Ax \to \forall y Bxy) \to (\diamond\exists x Ax \to \diamond\exists x\forall y Bxy)$ Regla de inferencia derivada de K.

3 $\exists x \diamond Ax \to \diamond\exists x Ax$ IBF (Teorema de KM).

4 $\Box\forall x(Ax \to \forall y Bxy) \to (\exists x \diamond Ax \to \diamond\exists x\forall y Bxy)$ Consecuencia tautológica de 2 y 3.

5 $\exists x\forall y Bxy \to \forall y\exists x Bxy$ Teorema del CP.

6 $\diamond\exists x\forall y Bxy \to \diamond\forall y\exists x Bxy$ Regla de inferencia derivada de K aplicada a 5.

7 $\Box\forall x(Ax \to \forall y Bxy) \to (\exists x \diamond Ax \to \diamond(\forall y)(\exists x)Bxy)$ Consecuencia tautológica de 4 y 6.

Teorema 5.9.3. *Si α es un teorema de KM, entonces α es válida en todo modelo monótono creciente.*

Demostración. Sea α un teorema de KM y $M = \langle W, R\rangle$ un marco de dominio monótono creciente. Mostraremos que α es válido en M. De hecho, probaremos que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ es una prueba de α, entonces para cada i $(0 < i < n+1)$, α_i es válida en M. Sólo presentaremos los dos casos más relevantes. Supongamos ahora que α_i es de la forma $(\forall u \phi u \to \phi y)$, donde y está libre para u en ϕ. Supongamos que hay un

mundo i de una estructura y que η es una asignación tal que $E_\eta, i \not\models (\forall u \phi u \to \phi y))$. Puesto que y es libre para u en ϕu, eso sólo es posible si $\eta(y)$ no está en el dominio de variación que recorre la variable u, es decir, no pertenece a $D(i)$, o $\eta(y) \notin D(i)$. Pero es evidente que η no contará para encontrar el valor de verdad de $\forall y(\forall u \phi u \to \phi y)$ en i, pues para la evaluación de esta fórmula sólo cuentan las y-variantes de la asignación η que tienen para y valores en i. Tomemos ahora el inverso de la fórmula Barcan $\Box\forall x\alpha \to \forall x\Box\alpha$ y supongamos que es falsa en un mundo w del modelo $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$. En particular, $M, w \not\models \forall x\Box\alpha$. Por lo tanto, hay una x-variante ρ de β tal que $\rho(x) \in D(w)$ y $M_\rho, w \not\models \Box\alpha$. Es decir que hay un mundo v tal que wRv tal que $M_\rho \not\models \alpha$. Ahora bien, dado que $\rho(x) \in D(w)$, $\rho(x) \in D(v)$ y, por lo tanto, $M, v \not\models \forall x\alpha$. De allí se sigue que $M, w \not\models \Box\forall x\alpha$, lo que contradice nuestra hipótesis. Para los otros casos, la prueba es muy sencilla. □

Ahora introduciremos los siguientes sistemas axiomáticos:

- $\boldsymbol{KM + 4 = KM + \{\Box\alpha \to \Box\Box\alpha\}}$.
- $\boldsymbol{KM + D = KM + \{\Box\alpha \to \Diamond\alpha\}}$.
- $\boldsymbol{KM + T = KM + \{\Box\alpha \to \alpha\}}$.
- $\boldsymbol{KM + B = KM + T + \{\alpha \to \Box\Diamond\alpha\}}$.
- $\boldsymbol{KM + S4 = KM + T + \{\Box\alpha \to \Box\Box\alpha\}}$.
- $\boldsymbol{KM + S5 = KM + T + \{\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha\}}$.

Como vimos, de todos ellos es axioma IFB, mientras que de $KM + B$ y $KM + S_5$ también es teorema la fórmula Barcan (FB). Llamemos M marcos a los marcos monótonos crecientes.

Teorema 5.9.4. *Los teoremas de*
$KM + 4$ son válidos en todos los M marcos transitivos.
$KM + D$ son válidos en todos los M marcos seriales.
$KM + T$ son válidos en todos los M marcos reflexivos.
$KM + B$ son válidos en todos los M marcos simétricos.
$KM + S_4$ son válidos en todos los M marcos reflexivos y transitivos.
$KM + S_5$ son válidos en todos los M marcos de equivalencia.

□

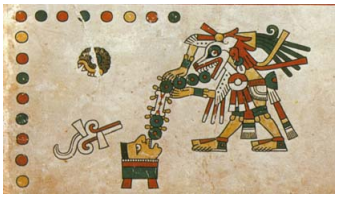
Dejamos la prueba al lector. No demostraremos el teorema de completud para estos sistemas, es decir, el inverso del teorema anterior, pero daremos más adelante indicaciones para hacerla a partir de las propiedades de consistencia.

Teorema 5.9.5. *Si un árbol monótono creciente para una fórmula α (es decir, con $\alpha V 0$ en su raíz) se cierra, entonces α es falsa en todo mundo de todo modelo monótono creciente).*

Como siempre, el teorema se prueba mostrando que si una rama de un árbol es fiel a un modelo (monótono creciente) y es extendida por una de las reglas de construcción de árboles (monótonos crecientes), una de las ramas resultantes sigue siendo fiel a un modelo (no necesariamente el mismo). La prueba es muy similar a la que dimos para árboles con dominio constante, y no agotaremos la paciencia del lector reproduciéndola.

Teorema 5.9.6. *Si un árbol monótono creciente completamente desarrollado para una fórmula α no se cierra, α es satisfacible.*

Recuerde que los teoremas anteriores se refieren a fórmulas sin variables libres. Haremos la prueba correspondiente en el caso más general que estudiaremos en la siguiente sección.



En cierta ocasión rogó el coyote a su padre dios que le diera licencia para comerse a sus hijos y le dijo dios: Sí, con tal que ayunes.

Entonces nuestro padre dios aconsejó al tlacuache para ver de qué modo engañaba al coyote.

Anda, encuéntralo en el magueyal y dile que si no quiere beber tantita aguamiel.

Entonces el coyote encontró en el campo al tlacuache, se saludaron y dijo el tlacuache:

¿Cómo te va coyotito? El coyote respondió: Bien, gracias, dijo el tlacuache: «Vamos a beber aguamiel». Respondió el coyote: «No, porque estoy ayunando, porque le pedí a dios sus hijos para comérmelos».

Dijo entonces el tlacuache: «No te pasará nada, al cabo solo agüita vamos a beber». No porque me verá dios y ya no me dará sus hijos para comerlos.»«No te verá, yo te limpiaré la boca.» Fue el tlacuache, destapó el cajete del maguey y llamó al coyote para que bebiera «Ven y bebe».

Apenas se empinó el coyote en el cajete del maguey para beber el aguamiel, luego que acabó el coyote llamó al tlacuache para que bebiera. Cuando hubo bebido el tlacuache y se llenó, llama al coyote: «Ven, te limpiaré la boca».

Se acercó el coyote para que le limpiaran la boca. En un instante le llenó la boca de tierra, le dijo: «Abre la boca».

Y el coyote abrió la boca. Luego el tlacuache le metió con la manita y le puso en los dientes raedura del maguey. Con esto se van por el campo cuando se oye el coyote que ya dan las doce con lo cual se despide del tlacuache. Este se va para su casa y el coyote se va para delante de dios...

Llegó, saludó a dios y dios le preguntó: ¿Ayunaste? «Sí, Señor».

«A ver, abre la boca».

Abrió la boca el coyote, toda su boca está llena de tierra y halló un mechal metido entre los dientes.

Entonces le dijo dios:

«Tú no ayunaste, pues ahora no te daré mis hijos para que te los comas. Ahora te doy licencia para que comas animalitos, borreguitos, puerquitos, gallinitas, guajolotitos, donde quiera que los encuentres, menos que entres a las casas». Entonces se volvió llorando.

Otro día encontró al tlacuache y le dijo: ¿Cómo te va tlacuache? «Bien, gracias coyotito».

«Ahora te voy a comer, ¿por qué te burlaste de mí? Por tu causa no ayuné. Ahora ya no me da permiso de que me coma sus hijos. Ahora te voy a comer.»

«Yo no coyotito, sí, nosotros somos muchos: Hay tlacuache de tuna, tlacuache de Pirú, hay tlacuache de aguamiel, hay tlacuache de peñasco...»

«Pues vaya, ya que no eres tú, vamos por allí a pasear.»

«Vamos por la barranca.»

«Pues vamos.»

Y cuando llegaron a la barranca dijo el tlacuache: «Anda coyotito, ten aquí, sostén la peña mientras voy a un mandado, luego te vengo a ayudar, pero cuidado con que la sueltes y la dejes caer».

El coyote se puso a sostener y a apretar la peña para que no se cayera. Se cansó el coyote de sostener la peña, pero el tlacuache ya no vino otra vez para ayudarle. Entonces el coyote dejó la peña y echó a correr y volvió su cara, la peña estaba como antes.

Con eso se fue el coyote para su casa. Otro día, de nuevo se encontraron el tlacuache y el coyote, se saludaron y dijo el coyote:

«Ahora sí de veras, te voy a comer, porque te andas burlando de mí».

Yo no coyotito, si somos muchos, hay tlacuache del pirú, hay tlacuache del nopal, hay tlacuache de la peña, hay tlacuache del aguamiel».

«Mira coyotito, te va a dar una noticia en buen lugar haz tu casa sobre un nopal porque ahora van a llover piedras».

Entonces muy temprano el coyote hizo su casa de zacate sobre un nopal. Fue el tlacuache con una mantada de piedras y lo comenzó a apedrear hasta que bajó del nopal. Entonces el coyote bajó del nopal. Mucho se enojó el coyote y quiso comer al tlacuache, tan airado estaba porque lo bajó con piedras. Entonces el coyote está muy enojado. Dice el coyote al tlacuache: «Ahora sí deveras te voy a comer, tanto me has enojado, hasta que me bajaste a pedradas».

«Ay dios, coyotito, pues yo no».

«Por eso te dije que hicieras tu casa en un nopal, porque iban a llover piedras.» El coyote estaba muy enojado:

«Ahora no te perdono, ahora te voy a comer». Entonces se paró el coyote frente al tlacuache, ahora lo quiere comer. Entonces respondió el tlacuache: «Mira coyotito, si me quieres comer, siquiera déjame despedirme de la tierra».

El tlacuache comenzó a bailar mientras que andaba buscando donde está su agujero. Ya no salió otra vez.

El coyote se quedó ahí parado esperando. Como el tlacuache ya no salió otra vez, ya no lo encontró al otro día.

Cuento nahua (transcripción del relato oral)

5.10 Sistemas y árboles no monótonos

Vayamos ahora al caso más general, el de sistemas en que ni la fórmula Barcan ni su inverso son válidos. Tomemos la semántica de dominio variable en toda su generalidad. Como dijimos, la fórmula $\forall y \Box(\forall x Ax \to Ay)$ no es válida pues, por ejemplo, será falsa en el mundo w del modelo siguiente,

$M = \langle W, R, D, \sigma \rangle$
$W = \{w, v\}$
$R = \{(w, v)\}$
$D(w) = \{a, b\}$
$D(v) = \{b\}$
$\sigma(v, A) = \{b\}$.

Las reglas para determinar validez de enunciados sin constantes[10] a través de árboles en semánticas de domino variable son sencillas. Supondremos que los parámetros

[10]Las constantes no serán relevantes hasta que introduzcamos un predicado de identidad.

están indexados de tal manera que si c es un parámetro e i un número natural, entonces c_i es un parámetro. Así, cada parámetro en el árbol portará como subíndice el índice del mundo en que fue introducido y la regla para el cuantificador universal verdadero (o para el existencial falso) sólo se aplicará a parámetros cuyos índices coincidan con el de la fórmula cuantificada que ejemplifica (es decir, $(\forall\, x)\alpha x \;\; i\; V$ sólo podrá ser ejemplificada por un parámetro con índice i, lo mismo que en el caso del cuantificador existencial). Enseguida damos el árbol para el inverso de una fórmula Barcan.

$\Box\forall xAx \rightarrow \forall x\Box Ax$ — 0 *falso*

|

$\Box\forall xAx$ — 0 *verdadero*

|

$\forall x\Box Ax$ — 0 *falso*

|

$\Box Aa_0$ — 0 *falso*

|

$0R1$

|

Aa_0 — 1 *falso*

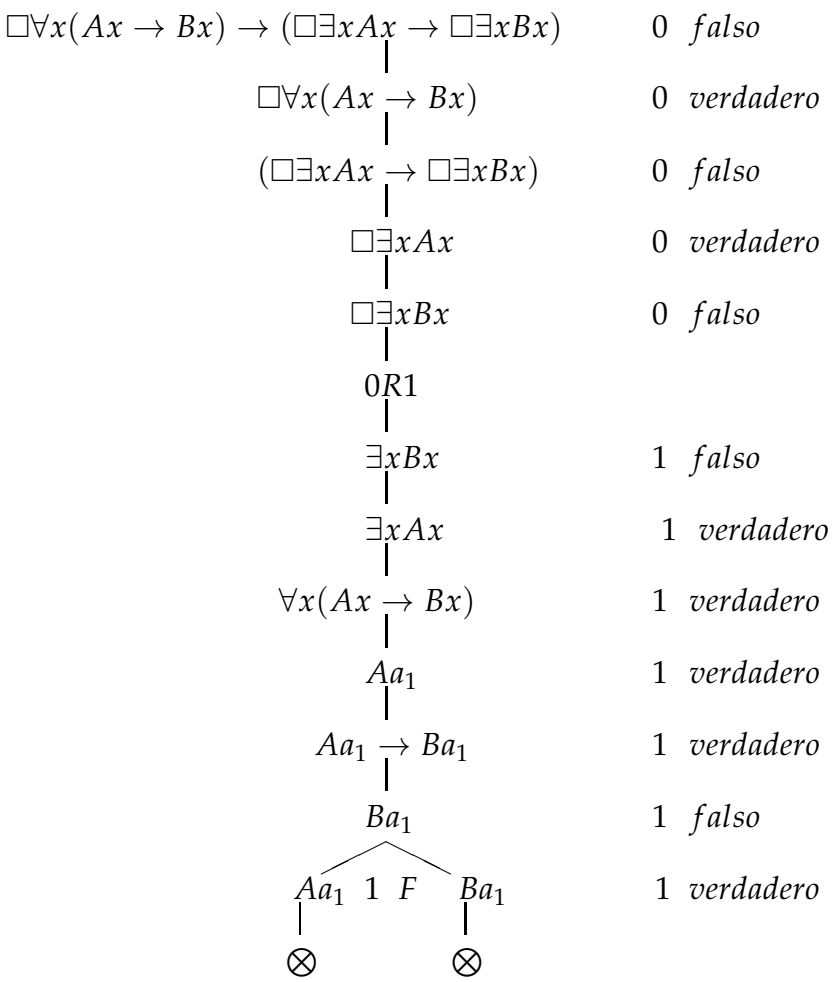
|

$\forall xAx$ — 1 *verdadero*

|

Aa_1 — 1 *verdadero*

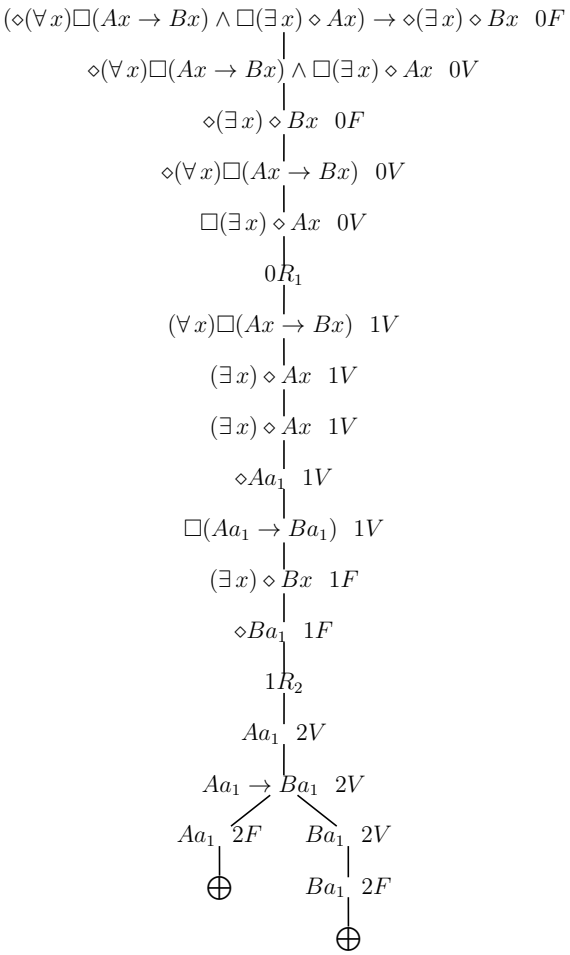
Veamos ahora el árbol de la fórmula $\Box\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\Box\exists xAx \rightarrow \Box\exists xBx)$,


$\Box\forall x(Ax \to Bx) \to (\Box\exists xAx \to \Box\exists xBx)$ 0 falso
$\Box\forall x(Ax \to Bx)$ 0 verdadero
$(\Box\exists xAx \to \Box\exists xBx)$ 0 falso
$\Box\exists xAx$ 0 verdadero
$\Box\exists xBx$ 0 falso
$0R1$
$\exists xBx$ 1 falso
$\exists xAx$ 1 verdadero
$\forall x(Ax \to Bx)$ 1 verdadero
Aa_1 1 verdadero
$Aa_1 \to Ba_1$ 1 verdadero
Ba_1 1 falso
Aa_1 1 F
Ba_1 1 verdadero

Mostraremos ahora con un árbol que la fórmula

$$(\diamond\forall x\Box(Ax \to Bx) \wedge \Box\exists x \diamond Ax) \to \diamond\exists x \diamond Bx$$

es válida.



A continuación demostraremos que este método de los árboles es sólido respecto a la semántica de dominio variable.

Definición 5.10.1. Una rama r de un árbol es fiel a un modelo de dominio variable $M = \langle W, R, D, \phi\rangle$ si existe una función f del conjunto de índices en r a W tal que:

a) Si iRj aparece en la rama $R(f(i), f(j))$.

b) Si c_i (c_i un parámetro) aparece en una fórmula de r, entonces $\phi(c_i) \in D(f(i))$.

c) Si α i verdadero aparece en r, $M, f(i) \models \alpha$ verdadero, mientras que si α i $falso$ aparece en r, $M, f(i) \not\models \alpha$. De f diremos que muestra que la rama es fiel a M.

Definición 5.10.2. Un árbol es fiel a un modelo si una de sus ramas lo es.

Teorema 5.10.3. *Si un árbol que es fiel a un modelo es extendido por una de las reglas de construcción de árboles, el árbol resultante es fiel a un modelo.*

Demostración. La demostración, en los casos de conectivos lógicos y de operadores modales, no difiere en nada de la del teorema correspondiente para árboles de dominio fijo. Nos concentraremos entonces en el caso de los cuantificadores. Supongamos que $\exists x Ax$ *i verdadero* ocurre en una rama r fiel a un modelo $M = \langle W, R, D, \phi \rangle$ y que es extendida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} r \\ | \\ A(a_i) \quad i \quad verdadero \end{array}$$

donde a es una constante que no había aparecido antes en r. Entonces, por hipótesis de inducción, en el modelo M hay un mundo $f(i)$ en el que $\exists x Ax$ es verdadera y existe por lo tanto un objeto $d \in D(f(i))$ que satisface Ax. Tomemos un modelo idéntico a M excepto que $\phi(a_i) = d$. Como a_i no había aparecido hasta entonces en la rama, la nueva rama es fiel al nuevo modelo. El caso $\forall x Ax$ *i falsa* es muy similar. Supongamos ahora que $\forall x Ax$ *i verdadero* aparece en la rama y que c_i aparece en alguna fórmula de r. Entonces, por hipótesis de inducción, $\phi(c_i)$ está en el mundo $f(i)$ de W y $\forall x Ax$ es verdadero en $f(i)$. Entonces $\phi(c_i)$ satisface Ax. El caso $\exists x Ax$ *i falso* es similar. □

Es fácil diseñar, como lo hicimos en la sección previa, un árbol sistemático asegurándonos de que cada nodo se desarrolle tarde o temprano (si el árbol no se cierra antes), excepto que esta vez no aplicaremos la regla del cuantificador universal afirmado (o la del cuantificador existencial negado) con parámetros cuyo índice no coincida con el del mundo en que estamos, y observaremos que cada parámetro conserve el índice del mundo en que fue introducido.

Teorema 5.10.4. *Sea α un enunciado sin constantes. Si un árbol sistemático y completo que tiene en su raíz α 0 V no se cierra, entonces α es satisfactible.*

Demostración. Sea r una rama abierta de un árbol A sistemático y completo con α V en su raíz. Construimos el modelo siguiente para una extensión del lenguaje LMS.
$M_r = \langle W, R, D, \sigma, \rho \rangle$
$W = \{i \text{ es un índice de } r\}$
$R = \{(i,j) \mid Rij \text{ aparece en } r\}$
$D = \{c_j \mid c_j \text{ es un parámetro que aparece en } r, \text{ para cualquier índice j }\}$
$D(i) = \{c_i \mid c_i \text{ es un parámetro que aparece en } r\}$
$\sigma(k) = k$ para cada parámetro que aparece en r. Si $\alpha^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica, $((\sigma(w,t_1), \sigma(w,t_2), \ldots, \sigma(w,t_n)) \in \sigma(i, \alpha^n)$ si y sólo si «$\alpha^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *i verdadero*» aparece en r.
Dado que el método de los árboles se aplica a enunciados, la asignación determinada por el modelo es indiferente). Que α es verdadera en M_r, i se sigue del siguiente lema. □

Lema 5.10.5. *Dada una fórmula α sin variables libres, si «α i verdadero» aparece en r, entonces $M_r, i \models \alpha$). Si α i falso aparece en una rama abierta r, entonces $M_r, i \not\models \alpha$.*

Demostración. En el caso de una fórmula atómica α sin variables libres, si α *i verdadero* aparece en r, entonces $M_r, i \models \alpha$ por definición de M_r y si α *i falso* aparece en r, entonces α *i verdadero* no aparece en r pues r es abierta. Por lo tanto, $M_r, i \not\models \alpha$.

Si α es $\neg\beta$ y α *i verdadero* aparece en r, entonces β *i falso* también aparece en r. Por hipótesis de inducción $M_r, i \not\models \beta$ y, por lo tanto, $M_r, i \models \alpha$.

El caso en que $\neg\beta$ *i falso* aparece en r, así como los otros casos proposicionales, es similar.

Si α es $\forall x\beta$, entonces por la forma en que fue construido el árbol sistemático, $\beta(t)$ *i verdadero* aparecerá en la rama para cada $t \in D(i)$. Por hipótesis de inducción, β será verdadera en el mundo i para cada elemento del dominio $D(i)$. Por lo tanto, $M_r, i \models \alpha$.

Si α es de la forma $\exists x\beta x$ y $\exists x\beta x$ *i verdadero* aparece en r, entonces βc *i* verdadero (c una constante) aparecerá en la rama. Por hipótesis de inducción, βc es verdadera en i y, por lo tanto $M_r, i \models \alpha$. Los casos de fórmulas cuantificadas falsas son similares.

Si α es de la forma $\Box\beta$ y $\Box\beta$ *i verdadero* aparece en r, entonces si i es un modelo terminal, $M_r, i \models \Box\beta$. De lo contrario, existe j tal que Rij, lo que significa que iRj apareció en la rama, así como β *j verdadero*. Por hipótesis de inducción, que $M_r, j \models \beta$ y esto ocurre para cada una de tales j. Por lo tanto, $M_r, i \models \Box\beta$.

Si α es $\Diamond\beta$ y $\Diamond\beta$ *i verdadero* aparece en r, entonces también aparecen en r iRj y β *j verdadero* (con j como un índice que no había aparecido antes en la rama). Por construcción de M_r, Rij y, por hipótesis de inducción, $M_r, \models \beta$. Por lo tanto, $M_r, i \models \Diamond\beta$). Los otros casos son similares. ❐

Ya estaban cerca del fin de la tierra y así fue como el muchacho se subió primero al cielo, donde no lo podía seguir la abuelita. Su hermana tardó en medio ver después de lavarse algo la cara, de modo que cuando ya se estaba ocultando el hombrecito en el horizonte pudo subir al espacio la muchacha. Y la mancha que se le ve a la luna es el lodo que le arrojó su hermanito; por eso brilla menos que el Sol.

Relato mixe

Entonces los dos huérfanos siguieron su camino y llegaron a otro pueblo adonde los reyes y los ricos estaban haciendo una fiesta para que sus hijos pudieran ser el Sol y la Luna. A la mañana siguiente entraron en su camino. El hombre fue a ser el Sol y la mujer fue a ser la Luna.

Relato chatín

Así se llamaba la mujer antiguamente. El armadillo bordaba un huipil para ponérselo cuando saliera el Sol; pero no lo terminó porque era muy trabajoso: lo estaba haciendo bonito y tenía tramos. Cuando iba a salir el Sol, el tepezcuintli fue a ver al armadillo. Le preguntó: «¿No has acabado tu huipil?»

«No, todavía me falta...» respondió el armadillo.

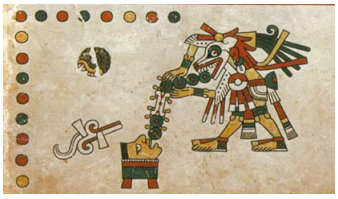
«Yo ya acabé el mío», comentó el tepezcuintli, «tiene flores muy bonitas».

Al oír esto contestó el armadillo: «Creo que no voy a acabar el mío porque ya mero sale el Sol».

Cuando hubo salido el Sol, el huipil del armadillo aún no estaba terminado y no sabía qué hacer. Finalmente se lo puso así, a medio terminar, con todos los palos con que tejía por esto tiene caparacho.

El tepezcuintli se puso el suyo todo entero, pues lo terminó; por eso es pinto el tepezcuintli. Todavía lleva hoy, en su piel, aquellas bonitas flores.

Relato chinanteco



El tlacuache regresó a la gente, que ya pusieron cuatro montones de leña. Todos los hombres se juntaron con sus calabazas, sus frijoles y su maíz, y lo echaron todo a cocer.

Relato tlapaneco

5.11 Identidad

Ahora introducimos en cualquiera de los sistemas que hemos visto y con cualquiera de las semánticas anteriores un predicado binario Ixy (que escribiremos como $x = y$) que tendrá la peculiaridad de que para cualquier interpretación $M, \langle W, R, D, \sigma\rangle$ y $w \in W$ se tiene que $\sigma(w, I) = \{(a, a) \mid a \in D\}$. Más adecuado sería decir que dicho predicado pasa aquí a formar parte del vocabulrio lógico y, por lo tanto, su significado no varía de una interpretación a otra. Es verdad que en cada caso se interpreta como la diagonal de $D \times D$ y el universo varía con cada modelo. Sin embargo, en ese sentido es como una cuantificador en lógica clásica de primer orden. Su rango de valores es el universo de discurso y este cambia de un modelo a otro, pero hay otro sentido en que el significado de un cuantificador está fijo y es por eso por lo que se le clasifica como un símbolo lógico.

Quine propuso otra paradoja para mostrar que la lógica modal cuantificada no tendría sentido. Como es conocido, entre las leyes de la identidad se encuentran las dos siguientes:

1. $\forall x x = x$.
2. $\forall x \forall y(x = y \to (Fx \leftrightarrow Fy))$ $(+)$.

Podemos agregar además que

(3) $\forall x \Box x = x$.

Por lo tanto, tenemos que $\forall x \forall y(x = y \rightarrow (\Box x = x \leftrightarrow \Box x = y)$, de lo que podemos deducir que

$$\forall x \forall y(x = y \rightarrow \Box x = y). \quad (*)$$

Y como

el primer hombre en pisar la luna=Neil Armstrong
concluimos que
necesariamente Neil Armstrong fue el primer hombre en pisar la Luna (★).

Lo cual, a menos que creamos en un determinismo muy radical, nos parece falso. Estrictamente hablando la verdad de $(+)$ parece indubitable. Es la ley conocida como la indiscernibilidad de los idénticos. Más bien parece que el problema surge de la siguiente manera. De

$$\forall x \forall y(x = y \rightarrow \Box x = y)(**)$$

podemos derivar

$$(c = d \rightarrow \Box c = d)(***)$$

con c y d constantes. En nuestro caso, son «Neil Armstrong» y «el primer hombre en pisar la Luna». Es importante hacer esta distinción porque la fórmula con variables (*), no parece problemática. La dificultad comienza cuando aparecen los nombres o las descripciones definidas para instanciar (**). Parece haber alguna dificultad en que las variables acotadas de $(**)$ sean instanciadas por constantes. Independientemente de cuál sea el diagnóstico de la situación, es conveniente separar (**) de (***) y comenzar por este último caso. Veremos que, además, el problema se presenta de diferentes manera según que las constantes representen nombres o descripciones definidas. Ya sabemos que la respuesta que el fregeano da a (***), consiste en decir que, bajo el contexto del adverbio «necesariamente», los nombres y las descripciones definidas[11] no tienen su referencia habitual y que, por lo tanto, en ese contexto «Neil Armstrong» no denota al conocido astronauta, etc. Es decir, el proponente de esta solución rechaza (***). Note además que su lectura del consecuente es de *dicto*. En general, si un contexto productor de opacidad es concatenado con «Napoleón murió envenenado», en la oración resultante el nombre «Napoleón» no se refiere a Napoleón sino a su sentido habitual, y la frase dice que el sentido de la oración «Napoleón murió envenenado» (lo que Frege llamó el «pensamiento» expresado por ese enunciado) tiene cierta propiedad. Los operadores de modalidad denotarían para el fregeano propiedades de pensamientos; es decir, serían predicados y no hay, en esta propuesta, modalidad *de re*. Así, la solución fregeana da lugar a una lógica intensional pero no a una lógica modal, pues en la lógica modal, tal y como se ha desarrollado hasta aquí, los operadores modales son adverbios que, además, posibilitan la expresión de la modalidad *de re*. La respuesta del russelliano, que es la que aquí emplearemos, consiste en mostrar

[11]Hablamos aquí de un fregeano y no de Frege. Para este lo que el adverbio "necesariamente" expresa no forma parte del contenido de una enunciado que comienza con él, sino simplemente agrega énfasis a lo dicho. Por otro lado, para Frege no hay distinción entre nombres y descripciones definidas.

la verdadera forma lógica de (★). Si Neil Armstrong es denotado por la letra n, el antecedente tiene la forma,

$$(\exists x)((\forall y)(Py \leftrightarrow y = x) \wedge x = n)$$

y el consecuente puede interpretarse de dos maneras distintas, a saber, *de dicto*,

$$\Box\exists x(\forall y(Py \leftrightarrow y = x) \wedge x = n)$$

o *de re*,

$$\exists x(\forall y(Py \leftrightarrow y = x) \wedge \Box x = n).$$

La apariencia de paradoja desaparece pues, en el primer caso, el consecuente de la conclusión es falso, pero eso no tiene nada de raro pues estamos pasando de una oración verdadera a decir que lo que esta expresa es necesario, lo cual no tiene por qué ser verdadero; es decir, la paradoja se producía porque aparentemente pasábamos de premisas verdaderas a conclusión falsa en un argumento correcto. Con esta primera lectura, el argumento ya no parece correcto. En el segundo caso la conclusión es verdadera, pero sólo estamos aseverando del hombre que de hecho fue el primero en pisar la luna, es decir, de Neil Armstrong que necesariamente es idéntico a Neil Armstrong, lo cual es trivialmente verdadero. Este expediente resuelve el caso en que tenemos a uno u otro lado de un signo de identidad una descripción definida, pero no todos los casos son así. Quine pone el siguiente ejemplo: una mañana muy temprano miramos en el horizonte un cuerpo celeste y, señalándolo, lo llamamos *Phosphorus*. Otro día en la tarde vemos cercano al crepúsculo un cuerpo celeste al que bautizamos como *Hesperus*. Más tarde descubrimos que Hesperus es Phosphorus. Por último, utilizando las leyes de la identidad llegamos a la conclusión de que necesariamente Hesperus es Phosphorus. Pero eso no parece correcto, pues imaginemos al descubridor de esa identidad la víspera de su descubrimiento. ¿No pudo ser que encontrara algo distinto o que sus observaciones resultaran de otra forma? Podemos concebirlo, y así parece posible, que Hesperus no fuera Phosphorus. ¿Cómo podemos evitar esta paradoja? Una solución fue propuesta por Kripke: si uno o ambos de los nombres que aparecen al lado del signo de identidad son sinónimos de descripciones definidas (por ejemplo, muy probablemente «Homero» signifique «el autor de la Iliada y la Odisea») entonces podemos aplicar la solución de Russell. Si no, es decir, si el signo de identidad se encuentra flanqueado por auténticos nombres (por «designadores rígidos»), entonces Kripke sostiene que la identidad es necesaria. Como dijimos, eso parece contraintuitivo: podemos imaginarnos que el descubridor de que el agua es H_2O obtuviera resultados diferentes en sus experimentos. A ello responde Kripke que en el tiempo anterior a ese logro científico era posible, desde un punto de vista epistemológico, que el agua no fuera H_2O, pero no lo era (suponiendo que la química esté en lo correcto a ese respecto) desde el punto de vista metafísico. Hasta antes de Kripke era común identificar (al menos desde un punto de vista extensional) lo necesario y lo a priori (es decir, lo que se justifica en forma independiente de la experiencia). Por ejemplo, si se puede saber que algo es verdadero sin mirar este mundo, ¿no parece

claro que debe ser verdadero en todo mundo posible? Kripke hizo la separación: «a priori» es un concepto epistemológico, mientras que «necesario» es metafísico. Estos conceptos no solamente son diferentes desde un punto de vista intensional, también subsumen diferentes proposiciones: no sólo podemos tener enunciados necesarios a posteriori, sino también enunciados contingentes a priori. En particular, el hecho de que la ecuación $agua = H_2O$ haya sido descubierta empíricamente no significa que no exprese una proposición necesaria. Kripke mantuvo que una ecuación verdadera en que a cada lado del signo de identidad aparecen designadores rígidos es necesariamente verdadera. Su punto de vista ha tenido mucha aceptación, aunque tiene algunos detractores. También se acepta que $a \neq b \rightarrow \Box a \neq b$ es verdadera si a y b son designadores rígidos.

Con esto se ofrece una vía de solución a la paradoja de Quine en contextos de necesidad. Si Tulio es Cicerón, entonces es necesario que Tulio sea Cicerón. Es decir, si Tulio es realmente idéntico a Cicerón es inconcebible una circunstancia en que esto no suceda (y en la que este personaje exista). En esta sección trabajaremos con constantes para las que la identidad (y la diferencia) se preserva a través de los mundos posibles. Desde luego, cuando las constantes representan descripciones definidas las cosas cambian, pero ese caso lo veremos más adelante. También Kripke califica como designadores rígidos a algunas descripciones definidas que, al aludir a propiedades esenciales del objeto que describen, no cambian de referencia de un mundo otro. Así, por ejemplo, «la raíz cuadrada positiva de 9» designa al 3 en todos los mundos posibles. Es cierto que un designador rígido puede no tener denotación en un mundo posible, pero en cualesquiera dos mundos en que tenga referencia, denota al mismo objeto. En lo que sigue veremos qué sistemas resultan al introducir el signo de identidad (con su semántica estándar) en los sistemas modales que hemos estudiado y cómo determinar validez en los sistemas resultantes. Supondremos, en general, que tenemos un sistema para dominio variable.

Como habíamos anunciado, introducimos en los lenguajes modales hasta ahora estudiados el predicado binario $=$ (y escribiremos $x = y$ en lugar de $= xy$) y llamaremos *normales* a los modelos en que, para todo mundo posible w, la designación de $=$ en w es $\{(x, x) \mid x \in D\}$. En lo que sigue, «modelo» significará modelo normal. Note además que, de de acuerdo a esa estipulación sobre el predicado de identidad, todo objeto del dominio del marco es idéntico a sí mismo, aún en mundos en que no existe. Por lo tanto, toda identidad es necesaria. En efecto, supongamos que para un modelo determinado, en un mundo w y para una asignación dada μ, $x = y$ es verdadera. Esto significa que en w, $\mu(x) = \mu(y) \in D$, entonces en cualquier otro mundo accesible a w $\mu(x) = \mu(y)$. Por lo tanto en w, $\Box x = y$. Nótese que si hubiésemos estipulado que la denotación de $=$ en w fuese $\{(x, x) \mid x \in V(w)\}$, este resultado no se seguiría, excepto que el modelo fuese monótono creciente. Para hacer árboles en el sistema S (de dominio variable con predicado de identidad) seguimos las mismas reglas que dimos en la sección anterior excepto que si la constante c_j (con cualquier índice j) aparece en alguna fórmula de una rama r, podemos agregar a r $c_j = c_j$ V i, para cualquier índice i de la rama. Además si $c_j = c_k$ i verdadero y $\Phi(c_j)$ m *verdadero* aparecen en

la rama, podemos agregar $\Phi(c_k)$ *m verdadero*. Por otro lado, si $c_j = c_k$ *i verdadero* y $\Phi(c_j)$ *m* falso aparecen en el árbol, podemos agregar $\Phi(c_k)$ *m falso*. Si estamos en la semántica de dominio fijo entonces las reglas valen para las constantes sin subíndices. En los tres siguientes ejemplos supondremos que todas los parámetros tienen índice 0.

Ejemplo 5.11.1. Demostremos por este método que $\forall x \forall y(\diamond x = y \to x = y)$ es válida:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x \forall y(\diamond x = y \to x = y) & 0\ falso \\
\quad | & \\
\forall y(\diamond a = y \to a = y) & 0\ falso \\
\quad | & \\
(\diamond a = b \to a = b) & 0\ falso \\
\quad | & \\
\diamond a = b & 0\ verdadero \\
\quad | & \\
a = b & 0\ falso \\
\quad | & \\
0R1 & \\
\quad | & \\
a = b & 1\ verdadero \\
\quad | & \\
a = a & 0\ verdadero \\
\quad | & \\
a = b & 0\ verdadero \\
\quad | & \\
\otimes &
\end{array}
$$

La última fórmula resulta de sustituir a por b en $a = a$, a lo que estamos autorizados por la fórmula en el antepenúltimo nodo.

Ejemplo 5.11.2. Demostremos ahora que $\forall x \forall y \forall z x = y \to (y = z \to \Box x = z)$ es válido. Supondremos que las variables han sido instanciadas por parámetros (de índice 0) y haremos el ábol correspondiente a $a = b \to (b = c \to \Box a = c)$:

$$
\begin{array}{ll}
a = b \to (b = c \to \Box a = c) & 0\ falso \\
\quad | & \\
a = b & 0\ verdadero \\
\quad | & \\
b = c & 0\ verdadero \\
\quad | & \\
\Box a = c & 0\ falso \\
\quad | & \\
0R1 & \\
\quad | & \\
a = c & 1\ falso \\
\quad | & \\
b = c & 1\ falso \\
\quad | & \\
b = b & 1\ falso \\
\quad | & \\
b = b & 1\ verdadero \\
\quad | & \\
\otimes &
\end{array}
$$

La antepenúltima fórmula, $b = c$, resulta de sustituir en $a = c$, b por a. La penúltima fórmula resulta de sustituir b por c en la línea $b = c \quad 1 \quad$ falso, sustitución autorizada por la linea $b = c \quad 0 \quad$ verdadero.

Ejemplo 5.11.3. Demostremos ahora la necesidad de la diferencia: $\forall x \forall y x \neq y \to \Box x \neq y$. Como antes, supondremos que los cuantificadores ya han sido instanciados por parámetros.

$$
\begin{array}{ll}
a \neq b \to \Box a \neq b & 0\ \text{falso} \\
\quad | & \\
a \neq b & 0\ \text{verdadero} \\
\quad | & \\
\Box a \neq b & 0\ \text{falso} \\
\quad | & \\
0R1 & \\
\quad | & \\
a \neq b & 1\ \text{falso} \\
\quad | & \\
a = b & 1\ \text{verdadero} \\
\quad | & \\
a \neq a & 0\ \text{verdadero} \\
\quad | & \\
a = a & 0\ \text{falso} \\
\quad | & \\
a = a & 0\ \text{verdadero} \\
\quad | & \\
\oplus &
\end{array}
$$

«¿Mira tanto un colibrí?» Dícese cuando ponemos a la mesa una tortilla, cualquier cosita de comer; y si alguien dice: «poquito», contestamos ¿mira tanto un colibrí?, porque el colibrí tiene el pico delgadito.

Ejemplo 5.11.4. Demostremos que $\forall x \Box \exists y (y = x) \to (\exists x \diamond Px \to \diamond \exists x Px)$ es V válida.

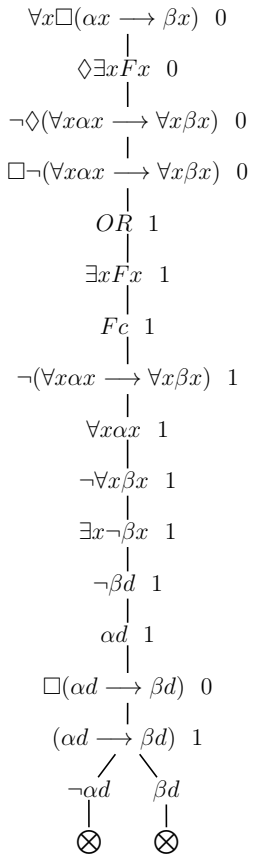
$$\forall x \Box \exists y (y = x) \to (\exists x \diamond Px \to \diamond \exists x Px) \qquad 0 \text{ falso}$$
$$\forall x \Box \exists y\ y = x \qquad 0 \quad \text{verdadero}$$
$$\exists x \diamond Px \qquad 0 \quad \text{verdadero}$$
$$\diamond \exists x Px \qquad 0 \quad \text{falso}$$
$$\diamond P a_0 \qquad 0 \quad \text{verdadero}$$
$$\Box \exists y\ a_0 = y \qquad 0 \text{ verdadero}$$
$$0R1$$
$$P a_0 \qquad 1 \text{ verdadero}$$
$$\exists y\ a_0 = y \qquad 1 \text{ verdadero}$$
$$a_0 = b_1 \qquad 1 \text{ verdadero}$$
$$\exists x Px \qquad 1 \text{ falso}$$
$$P b_1 \qquad 1 \text{ falso}$$
$$P a_0 \qquad 1 \text{ falso}$$
$$\otimes$$

Observe que esta fórmula expresa el hecho de que en un modelo de dominio no decreciente, la fórmula Barcan es verdadera.

La demostración de que el método de los árboles es sólido y completo con respecto a la semántica provista es sencilla. En lo que sigue haremos una breve modificación

insustancial a la técnica de los árboles semánticos. En lugar de $\alpha\ i\ V$, pondremos simplemente $\alpha\ i$; y, en lugar de $\alpha\ i\ F$, escribiremos $\neg\alpha\ i$. Adaptaremos en consecuencia las reglas para desarrollar ramas. Asimismo usaremos las equivalencias $\neg\Box\alpha \equiv \Diamond\neg\alpha$ y las leyes de De Morgan. Para ilustrar esta modificación, probemos la validez en KV de

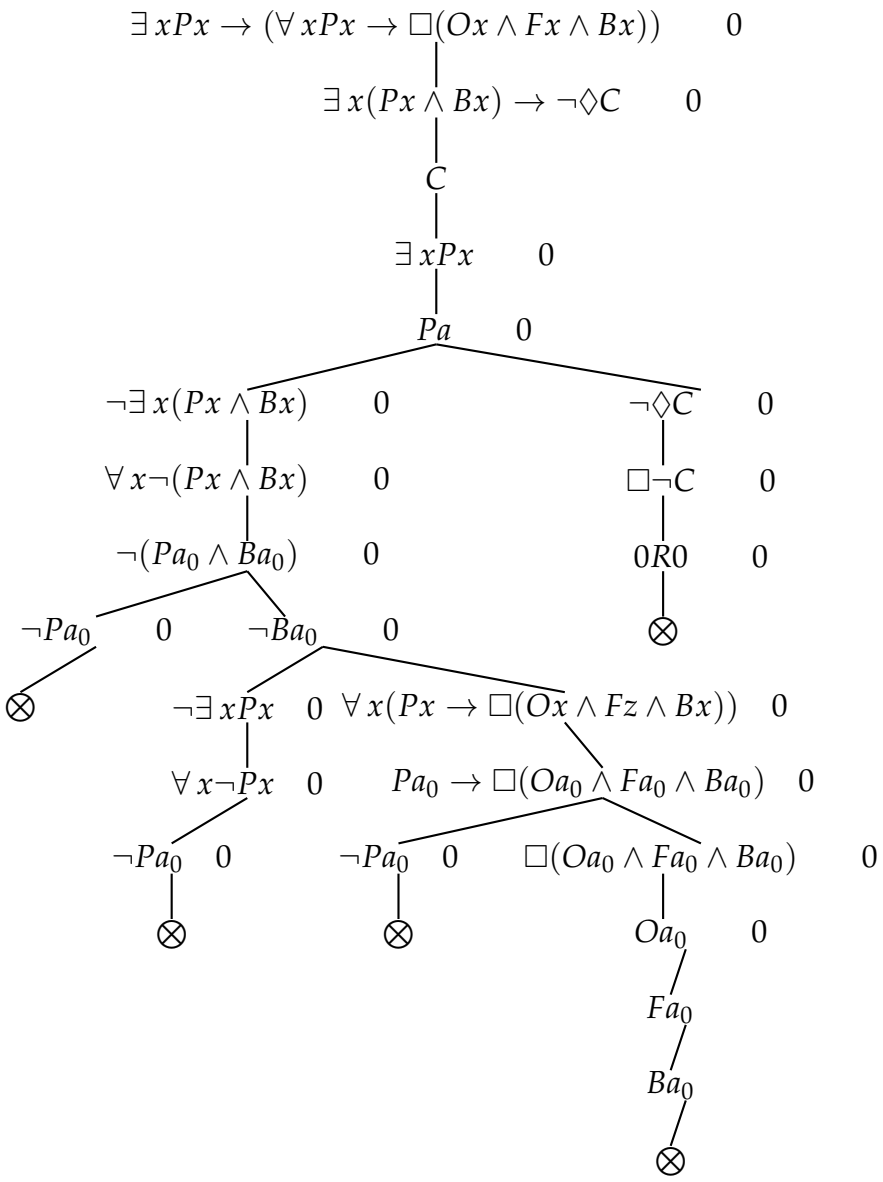
$$\forall x\Box(\alpha x \to \beta x) \wedge \Diamond\exists x Fx \to \Diamond(\forall x\alpha x \to \forall x\beta x)$$



Ejemplo 5.11.5. (El argumento del mal contra la existencia de Dios).
Los seres perfecto, si existen, necesariamente son omnicientees, omnipotentes y buenos.
Si hay un ser perfecto y bueno es imposible que ocurran catastrofes naturales.
Puesto que sí hay catastrofes naturales, no hay un ser perfecto.

$$\begin{array}{l} \exists x Px \to (\forall x Px \to \Box(Ox \wedge Fx \wedge Bx)) \\ \exists x(Px \wedge Bx) \to \neg\Diamond C \\ C \\ \hline \therefore\ \neg\exists \text{xPx} \end{array}$$

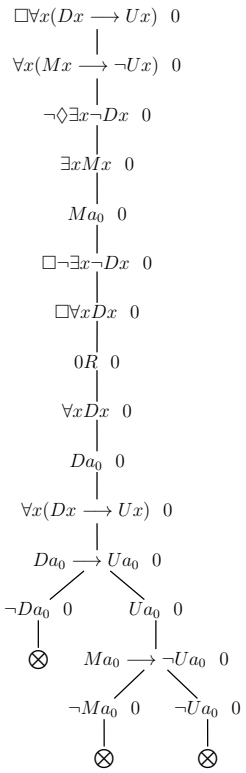
El árbol correspondiente es reflexivo porque el argumento supone implícitamente que todo lo necesario sucede.



En los *Principios del Conocimiento Humano*, Berkeley -pretendió demostrar la inexistencia de los objetos materiales argumentando que son inútiles y que es necesario que todo lo que Dios ha creado- sea útil.

Desde luego va sin decir que lo necesario es verdadero y que es imposble que exista algo que no haya sido creado por Dios. Este argumento puede ser formalizado así

$\Box\forall x(Dx \to Ux)$ Es necesario que todo lo hecho por Dios sea útil. $\forall x(Mx \to \neg Ux)$ Ningun objeto material es útil. $\neg\Diamond\exists x\neg Dx$ No es posible que exista algo no hecho por Dios. $\therefore \neg\exists xMx$ No hay objetos materiales.



Una vez introducido el predicado de indentidad (como parte del vocabulario lógico) es posible en la semántica de dominio variable introducir un predicado de existencia. Recuerde que anteriormente mencionamos que si dispusiéramos de un predicado lógico de existencia en una semántica de dominio constante podríamos reproducir los efectos de una semántica de dominio variable. Ahora que tenemos el predicado de identidad podemos emplearlo para definir un predicado de existencia que será verdadero de un objeto del dominio del marco extendido en un mundo si ese objeto forma parte del dominio de ese mundo. Puesto que se trata de un predicado definido, es superfluo pero da una mayor legilibilidad a ciertas fórmulas.

Lema 5.11.6. *Sea $M = \langle W, R, D, \sigma\rangle$ una estructura normal de dominio variable, β una asignación y $w \in W$. Entonces $M_\beta, w \vDash \exists y\ y = x$ si y solo si $\beta(x) \in D(w)$.*

La demostración se deja al lector. Definimos $Ex \equiv_{def} \exists y\ y = x$ Por supuesto que no es necesario dar nuevas reglas para hacer árboles con fórmulas en que figura E, pero algunas reglas derivadas se siguen de su definición. Dos de ellas son: Sea n una rama abierta de un árbol de dominio variable. Si un nodo de n contiene la expresión $\neg Ea_j\ j$ la rama puede cerrarse. La razón es que la rama puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}\neg Ea_j\ j\\ \neg\exists y\ y = a_j\ j\\ \forall y\neg y = a_j\ j\\ \neg a_j = a_j\ j\\ \otimes\end{array}$$

Por otro lado si Ea_ij aparece en un nodo y, en otro, figura $\forall x\phi\ j$ de la misma rama abierta entonces la rama puede ser extendida por el nodo $\phi x/a_i\ j$. Es decir, una vez garantizada la existencia de un elemento del j-ésimo mundo este puede instanciar una fórmula cuantificada en ese mundo. En acción la regla abrevia el siguiente desarrollo

$$\begin{array}{l}Ea_i\ j\\ \forall x\phi\ j\\ \exists y(y = a_i)\ j\\ (a_J = a_i)\ j\\ \phi a_j\ j\\ \phi a_i\ j\end{array}$$

Note que $\forall xEx$ es una fórmula válida en la semántica pues

$$\begin{array}{l}\neg\forall xEx\ i\\ \exists x\neg Ex\ i\\ \neg Ea_i\ i\\ \otimes\end{array}$$

Ahora sí podemos introducir en la raíz de los árboles fórmulas con constantes. Note que en el árbol no tienen que aparecer constantes con un subíndice porque no es necesario que sus denotaciones existan en un mundo determinado (aunque sí deben habitar en algún mundo del modelo). Pero puede suceder que tengamos informción para agregarles un subíndice cuando vienen acompañadas de un predicado de existencia, como se muestra en los siguientes ejemplos. Claramente la 0fórmula $\phi a \to \exists x\phi x$ no es válida (como tampoco lo es $\phi y \to \exists x\phi x$) pero $((\phi a \wedge Ea) \to \exists x\phi x)$ sí lo es. El árbol correspondiente es,

$$\neg((\phi a \wedge Ea) \longrightarrow (\exists x \phi x)) \quad 0$$
$$\phi a \wedge Ea_0 \quad 0$$
$$\neg\exists x \phi x \quad 0$$
$$\phi a_0 \quad 0$$
$$Ea_0 \quad 0$$
$$\forall x \neg \phi x \quad 0$$
$$\neg \phi a_0 \quad 0$$
$$\otimes$$

Note que que al introducir ϕa en el mundo 0 del árbol, no tendríamos por qué agregarle ningún subíndice. Sabemos que designa un elemento del dominio del modelo que tiene en 0 la propiedad denotada por ϕ en ese mundo, pero no podemos asegurar que exista allí. Sin embargo, cuando es sujeto del predicado de existencia en 0, podemos asegurar que su denotación existe allí y entonces debemos agregarle el subíndice 0.

Vimos que en un modelo de dominio variable creciente el inverso de la fórmula Barcan es válido y podemos probar que, dado un marco F de dominio variable, si el inverso de la fórmula Barcan es verdadero en ese marco, entonces F es creciente.

Probaremos que lo mismo ocurre con la fórmula $\forall x \Box Ex$

Lema 5.11.7. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ es un marco de dominio variable entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones*

1. *$\mathfrak{F}$ es monótono creciente.*
2. *IFB es válido en todo modelo con marco $\mathfrak{F}$.*
3. *$\forall x \Box Ex$ es válida en todo modelo con marco $\mathfrak{F}$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Ya fue demostrado.
2) $\Rightarrow$ 3) Una instancia de IFB es

$$\Box \forall x Ex \longrightarrow \forall x \Box Ex$$

pero ya probamos la validez de $\Box \forall x Ex$
Por lo tanto, $\forall x \Box Ex$ es válido en $\mathfrak{F}$. 3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $\mathfrak{F}$ no es monótono

creciente, es decir, que existen $w, u \in W$ tales que wRu y que $D(w) \nsubseteq D(u)$. Sea $\tau \in D(w)$ pero $\tau \notin D(u)$. Sea $M = \langle W, R, D, \phi, \beta \rangle$ tal que $\beta(x) = \tau$ entonces $M, u \nvDash Ex$ entonces $M, w \nvDash \Box Ex$, $\therefore M, w \nvDash \forall x \Box Ex$. ◻

Vimos que para comprobar la válidez en semántica IFB podían seguirse las reglas ordinarias para árboles de dominio variable, excepto que un cuantificador universal no puede ser instanciado por un parámetro que solo aparece en algún mundo posterior. Note que podemos substituir esa regla por otra que nos autoriza introducir $\forall x \Box Ex$ en cualquier nodo del árbol. Su efecto es el mismo porque permitiría que cualquier constante a_i que sea introducida con el mundo i genere la fórmula $\Box Ea_i$ que a su vez nos facilita a colocar Ea_i j para cualquier j descendiente de i en la rama e instanciar en j un cuantificador universal. Podríamos también considerar una semántica FB, es decir, de dominio decreciente (más precisamente, con la condición $wRv \Rightarrow D(v) \subseteq D(w)$) en que valga la fórmula Barcan. Llamaremos a los marcos que cumplen esta condición anti-monotónicos. El método de los árboles para determinar validez de enunciados en la semántica FB tiene las reglas ordinarias para árboles de dominio variable con la condición suplementaria de que un cuantificador universal con índice i que aparezca en un nodo del árbol puede ser instanciado por una constante que sea introducida en ese mundo o en otro posterior (que sea descendiente de i). Análogamente al caso anterior una fórmula con el predicado de existencia puede expresar la anti-monotonicidad del marco.

Lema 5.11.8. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, D \rangle$ es un marco de dominio variable entonces son equivalentes*

1. *$\mathfrak{F}$ es antimonotónico ($wRu \Longrightarrow D(u) \subseteq D(w)$).*
2. *La fórmula Barcan es válida en cada modelo basado en $\mathfrak{F}$*
3. *$\Diamond Ex \to Ex$ es válida en cada modelo basado en $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Suppngamos que $\mathfrak{F}$ no es antimonotónico y que, por tanto, existen $u, v \in W$ tales que uRv pero $D(v) \nsubseteq D(u)$. Es decir existe $\tau \in v$ pero $\tau \notin u$. Sea $M = \langle W, E, D, \sigma, \beta \rangle$ un modelo tal que $\beta(x) = \tau$. Entonces $M, u \vDash \Diamond Ex$ pero $M, u \nvDash Ex$. Por otro lado, supongamos que el modelo $M = \langle W, E, D, \sigma, \beta \rangle$, falsifica $\Diamond Ex \to Ex$ en el mundo $w \in W$, es decir, $M, w \nvDash \Diamond Ex \to Ex$. Eso implica que existe $v \in W$ tal que wRv y $M, v \models Ex$ y por lo tanto, $\beta(x) \in D(v)$ pero $M, w \nvDash Ex$, es decir, $\beta(x) \notin D(w)$. Por lo tanto $\mathfrak{F}$ no es antimonotónico. De manera similar se prueba que $(1) \iff (2)$. ◻

¿Cómo puede utilizarse la fórmula 3 para construir árboles en semántica FB (o de dominio variable antimonotónico)?

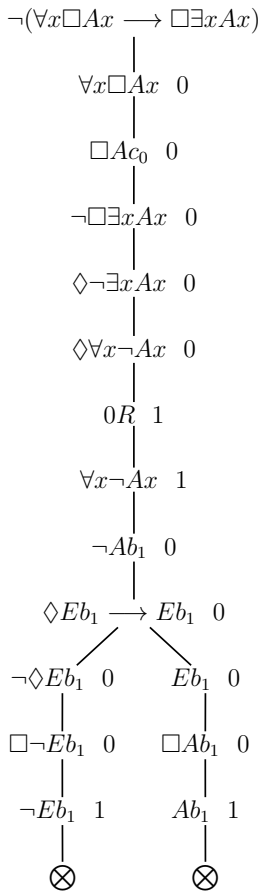
Sabemos que basta con agregar a las reglas ordinarias para árboles de dominio variable la autorización para instanciar un cuantificador universal en un mundo con una constante que se introduce en ese mundo o en uno de sus sucesores. En lugar de

ello podemos permitir que en la fórmula $\Diamond Ec \to Ec$ sea empleada en cualquier nodo y con cualquier parámetro c. Pues si c va a ser introducido en un mundo descendiente j de i entonces $\Diamond Ec$ será verdadera en i, y $E(c)$ i nos autorizará a que c instancie un cuantificador universal en i. Sin embargo, recuerde que en los árboles no aparecen fórmulas con ocurrencias libres de variables. $\Diamond Ex \to Ex$ no tiene el mismo efecto que $\forall x(\Diamond Ex \to Ex)$ pues en la primera la variable corre sobre los elementos del dominio del marco, mientras que en la segunda la variable del cuantificador recorre el dominio del mundo en que la fórmula está siendo evaluada. Veamos un ejemplo de este método.

Ejemplo 5.11.9. Comprobemos que la fórmula

$$\forall x \Box Ax \to \Box \exists x Ax$$

es válida en todo marco antimonotónico



La rama de la izquierda se cierra porque aparece en ella $\neg Eb_1$, en el mundo 1 lo que es contradictorio. Del lado derecho hemos aplicado la regla que permite instanciar un cuantificador universal en el mundo 0 con una constante con ese índice.

Probaremos ahora que el método de los árboles de dominio variable con identidad es completo, es decir, que si α es un enunciado válido en esa semántica entonces un árbol con $\neg\alpha$ en su raíz tarde o temprano se cerrará. En lo que sigue explotaremos un método que en el segundo volumen será tratado con mayor extensión y profundidad. Nos referimos a las propiedades de consistencia, que ahora aplicaremos al caso modal de dominio variable. El lector reconocerá la similitud con el método de los árboles. Así como en los nodos de los árboles teníamos expresiones de la forma $\alpha\ i$, ahora tendremos fórmulas indexadas del tipo αi. En los árboles también aparecían nodos con expresioones de la forma iRj. Ahora tendremos índices como $i.j$. Con ello indicaremos que el mundo $i.j$ es accesible desde el mundo i. Esta notación podría dar lugar a algunas ambigüedades. Por ejemplo, un mundo con índice 1.2.3 podría indicar que el mundo 2.3 es accesible desde el mundo 1 o bien que el mundo 1.2 accede al mundo 3. En cualquier caso, podemos suponer que se usan paréntesis para corregir esta situación. Otros problemas podrían presentarse, por ejemplo, con modelos transitivos o reflexivos. Por ejemplo, pudiera ser que tuviésemos mundos 1, 1.2 y 2.3, pero este último también fuese accesible desde 1, lo que ya no podríamos indicar por la simple disposición de los índices. Sin embargo, es fácil probar que estas complicaciones no se presentan en árboles para el sistema KVI, es decir, del sistema que tiene subyacentes el cálculo de predicados con identidad, la lógica modal K, sin FB ni IFB (es decir, lo que corresponde a lógica modal de predicados de domino variable con identidad). En el caso de otros sistemas tendríamos que utilizar un método diferente para indicar las relaciones de accesibilidad, pero eso no representa una dificultad importante, ni modifica lo esencial del método que ahora veremos. Por otro lado, utilizaremos subíndices para indicar los mundos en que se introduce una constante. Por ejemplo, $c_{i.j}$ será una constante introducida en el mundo $i.j$.

Definición 5.11.10. A una expresión de la forma $\alpha i.j...m$, donde $i, j..., m$ son números naturales y α es un enunciado, la llamaremos enuciado indexado. La expresión $i.j....m$ será llamada índice del enunciado α.

Definición 5.11.11. Una propiedad modal (de primer orden) de consistencia es un conjunto $\mathfrak{C}$ de conjuntos de enunciados indexados tal que

0) Si $\Theta \subseteq \theta' \in \mathfrak{C}$ entonces $\Theta \in \mathfrak{C}$ y para cualquier conjunto de enunciados $\Theta \in \mathfrak{C}$, cualesquiera enunciados α y β y números naturales i y j y fórmula φx con ocurrencia(s) libre(s) de la variable x:

1a) Si $\neg\alpha i \in \Theta$ entonces $\alpha i \notin \Theta$.

1b) Si $\neg\neg\alpha i \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\alpha i\} \in \mathfrak{C}$.

2a) Si $(\alpha \vee \beta)i \in \Theta$, $\Theta \cup \{\alpha i\} \in \mathfrak{C}$ o $\Theta \cup \{\beta i\} \in \mathfrak{C}$.

2b) Si $\neg(\alpha \vee \beta)i \in \Theta$, $\Theta \cup \{\neg\alpha i\} \in \mathfrak{C}$ y $\Theta \cup \{\neg\beta i\} \in \mathfrak{C}$.

3a) Si $\Diamond\alpha i \in \Theta$ entonces, para alguna j que no figura en Θ, $\Theta \cup \{\alpha i.j\} \in \mathfrak{C}$.

3b) Si $\neg\Diamond\alpha i \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\neg\alpha i.j\} \in \mathfrak{C}$ para cualquier j tal que $i.j$ figura en Θ como subíndice.

4a) Si $\exists x\varphi xi \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\varphi d_i i\} \in \mathfrak{C}$ para alguna constante d_i que no figura en Θ.

4b) Si $\neg\exists x\varphi xi \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\neg\varphi d_i i\} \in \mathfrak{C}$ para cada constante d_i tal que d_i figura en Θ.

5a) $\Theta \cup \{d = d\} \in \mathfrak{C}$ para cualquier constante indexada d que figure en Θ.

5b) Si $d = e_i k \in \Theta$ y $\varphi e_i j \in \Theta$ entonces $\Theta \cup \{\varphi dj\} \in \Theta$.

Para cualquier noción modal de primer orden de consistencia $\mathfrak{C}$, si $\Theta \in \mathfrak{C}$ diremos que Θ es $\mathfrak{C}$-consistente.

Definición 5.11.12. Un conjunto Δ de enunciados indexados es débilmente completo si y solo si

a) Si c es una constante indexada que figura en una fórmula de Δ, $c = c \in \Delta$.

b) Para cualesquiera constantes indexadas c y d si $\{c = di, \varphi dj\} \subset \Delta$ entonces $\varphi cj \in \Delta$ para cualquier enunciado φd.

c) Si $\neg\alpha i \in \Delta$ entonces $\alpha i \notin \Delta$.

d) Si $\neg\neg\alpha i \in \Delta$ entonces $\alpha i \in \Delta$.

e) Si $(\alpha \vee \beta)i \in \Delta$ entonces $\alpha i \in \Delta$ o $\beta i \in \Delta$.

f) Si $\neg(\alpha \vee \beta)i \in \Delta$ entonces $\neg\alpha i \in \Delta$ y $\neg\beta i \in \Delta$.

g) Si $\Diamond\alpha i \in \Delta$ entonces existe j tal que $\alpha i.j \in \Delta$.

h) Si $\neg\Diamond\alpha i \in \Delta$ entonces $\neg\alpha i.j \in \Delta$ para toda j tal que $i.j$ figura como subíndice en Δ.

i) Si $\exists x\varphi xi \in \Delta$ entonces $\varphi d_i i \in \Delta$ para alguna constante d_i.

j) Si $\neg\exists x\varphi xi \in \Delta$ entonces $\neg\varphi d_i i \in \Delta$ para toda constante d_i.

Sea $\mathfrak{C}$ una propiedad de consistencia modal de primer orden.

Teorema 5.11.13. *Cualquier conjunto de enunciados $\mathfrak{C}$-consistente con indice 0 puede ser extendido a un conjunto débilmente completo.*

Demostración. Sea Θ dicho conjunto. Supondremos sin pérdida de generalidad que todos los enunciados de Θ son de la forma $(\alpha \vee \beta)$, $\neg(\alpha \vee \beta)$, $\neg\neg\alpha$, $\Diamond\alpha$, $\neg\Diamond\alpha$, $\exists x\alpha$, $\neg\exists x\alpha$, αc, $\neg\alpha c$, $c = d$, $\neg c = d$ con c y d constantes. Extenderemos Θ en pasos sucesivos.
Paso 1 Sea $\Delta_0 = \Theta$.

Paso n+1 Supongamos construido Δ_n y ordenemos sus fórmulas por su índice (es decir αi vendrá antes de αj si $i < j$) y para cada i coloquemos en primer lugar las identidades y luego las fórmulas efímeras (es decir cuyo operador lógico principal es un conectivo veritativo funcional, o el operador modal $\Diamond$ o el cuantificador $\exists x$), en cualquier orden, y después las otras, en orden abitrario.

Consideremos la primera fórmula αi no marcada. Si es de la forma $a = bi$ sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\phi(a/b)j_1, \rho(a/b)j_2, \ldots \eta(a/b)j_n\}$ donde ϕj_1, ρj_2,... ηj_n son todas las fórmulas indexadas de Δ_n es donde aparecía a. Si es de la forma $\neg\neg\gamma i$ sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\gamma i\}$. Si es de la forma $(\gamma \vee \varphi)i$ sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\gamma i\}$, si este conjunto es $\mathfrak{C}$-consistente. En caso contrario $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\varphi i\}$. Si es de la forma $\neg(\gamma \vee \varphi)i$ sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\gamma i, \neg\varphi i\}$. Si es de la forma $\exists x\varphi i$, sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\varphi(x/c_i)i\}$ donde c_i es una constante con subindice i que no figuraba en ninguna fórmula de Δ_n. Si es de la forma $\Diamond\alpha i$, sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\alpha i.j\}$ con j un índice que no figuraba en ninguna fórmula de Δ_n. Si es de la forma $\neg\exists x\varphi xi$, entonces sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\varphi a_i, \neg\varphi b_i i, ..., \neg\varphi k_i i, \neg\exists x\varphi xi\}$ donde $a_i, b_i, ..., k_i$ son todas las constantes de subíndice i que figuran en fórmulas de Δ_n. Si no hay ninguna constante con índice i en las fórmulas de Δ_n, sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\varphi a_i i, \neg\exists x\varphi xi\}$. Si αi es de la forma $\neg\Diamond\alpha i$ sea $\Delta^0_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\alpha i.j, \neg\alpha i.k, ..., \neg\alpha i.h, \neg\Diamond\alpha i\}$ donde $j, k, ..., h$ son todos los índices tales que $i.j, i.k, ..., i.h$ figuraban en Δ_n. Sea $\Delta_n = \Delta^0_n \cup \{\delta = \delta_i |$ para toda constante indexada que ocurre en alguna fórmula con índice i en $\Delta^0_n\}$. Marque αi. Es claro que cada Δ_n $(0 \leq n)$ es $\mathfrak{C}$-consistente. Sea $\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_n$. Claramente Δ es $\mathfrak{C}$-consistente. Es fácil, pero tedioso, demostrar que Δ es débilmente completo. ☐

Teorema 5.11.14. *Si Δ es débilmente completo entonces tiene un modelo de cardinalidad numerable.*

Demostración. Sea D el conjunto de constantes indexadas que aparecen en alguna fórmula de Δ. Definimos una relación binaria en D para cualesquiera $c, d \in D$. $c \approx d$ si y solo si $(c = d) \in \Delta$. Por la cláusula (a) de la definición de conjunto débilmente completo $(c = c) \in \Delta$ y, por lo tanto, $c \approx c$. Por otro lado, si $(c = d) \in \Delta$, entonces $(d = d) \in \Delta$ y por la cláusula (b) $(d = c) \in \Delta$. Por último si $(c = d) \in \Delta$ y $(d = e) \in \Delta$ entonces $(c = e) \in \Delta$ de nuevo por la cláusula (b). Sea $\bar{c}$ la clase de equivalencia de c es decir $\bar{c} = \{m \in D | c \approx m\}$. Sea $M^T = \langle W^T, R^T, D^T, \sigma^T\rangle$, donde $W^T = \{i | i$ aparece como índice en $\Delta\}$. Para cualesquiera $i, j \in W^T$, $iR^T j$, si y solo si existe un número natural k tal que $j = i.k$. Para $i \in W^T$, $D^T(i) = \{\bar{c} | c \in D$ y c tiene subíndice i $\}$. Para cualquier $c \in D^T(i)$, $\sigma^T(\bar{c}) = \bar{c}$. Si ψ^n una letra predicativa n-aria y $t_1, ..., t_n$ son constantes.

$$\sigma^T(i, \psi^n) = \{(\bar{t_1}, ..., \bar{t_n}) | \psi^n t_1 ... t_n \; i \in \Delta\}.$$

Este conjunto está bien definido por la cláusula (b). Veremos ahora que cualquier modelo con M como estructura valida todas las fórmulas de Δ. Más específicamente probaremos que para cualquier enunciado ϕ e índice i

a) Si $\phi i \in \Delta$ entonces $M, i \vDash \phi$ y

b) Si $\neg\phi i \in \Delta$ entonces $M, i \nvDash \phi$.

Para un enunciado atómico $\psi^n t_1 ... t_n$, si $\psi^n t_1 ... t_n i \in \Delta$ entonces $(\bar{t_1}, ..., \bar{t_n}) \in \sigma(i, \psi^n)$ y, por lo tanto, $M, i \vDash \psi^n t_1 ... t_n$. Por otro lado, si $\neg\psi^n t_1 ... t_n i \in \Delta$ entonces por ser Δ débilmente completo $\psi^n t_1 ... t_n \notin \Delta$. Por lo tanto $(\bar{t_1}, ..., \bar{t_n}) \notin \sigma(i, \psi^n)$, es decir, $M, i \nvDash \psi^n t_1 ... t_n$ Suponga que ϕ es $\neg\psi$. Si $\phi i \in \Delta$ entonces $\neg\psi i \in \Delta$ y, por la hipótesis de inducción aplicada a ψ_i, $M, i \nvDash \psi i$. Se sigue que $M, i \vDash \phi$. Si $\neg\phi i \in \Delta$ entonces $\neg\neg\psi i \in \Delta$ y, por ser Δ débilmente completo, $\psi i \in \Delta$. Por (a) $M, i \vDash \psi$ y por lo tanto $M, i \nvDash \phi$. Los otros casos de conectivos proposicionales son similares. Suponga que ϕ es $\Diamond\psi$. Si $\Diamond\psi i \in \Delta$, por ser Δ débilmente completo, existe $i.j \in W^T$ tal que $\psi i.j \in \Delta$. Por definición, $iR^T i.j$ y, por hipótesis de inducción, $M, i.j \vDash \psi$. Por lo tanto, $M, i \vDash \Diamond\psi$. Por otro lado, si $\neg\Diamond\psi i \in \Delta$, por ser Δ débilmente completo, para todo $i.j \in W$, $\neg\psi i.j \in \Delta$. Por definición, $iR^T i.j$ y, por hipótesis de inducción, $M, i.j \nvDash \psi$. Como esto ocurre para cada $i.j \in W^T$, entonces $M, i \nvDash \Diamond\psi$. Siuponga que ϕ es $\exists x\psi$. Si $\exists x\psi i \in \Delta$ entonces, por ser Δ débilmente completo, para alguna constante d_i, $\psi d_i i \in \Delta$ y, por hipótesis de inducción, $M, i \vDash \psi d_i$ o $M_\beta, i \vDash \psi d_i$. Si $\beta' = \beta(x/\sigma(d_i))$ entonces dado que $\sigma(d_i) = \bar{d}_i \in i$, β' es una x-variante de β que satisface $\psi(x)$ en i. Por lo tanto $M_\beta, i \vDash \exists x\psi$. Si $\neg\exists x\psi i \in \Delta$ entonces por ser Δ débilmente completo $\neg\psi d_i i \in \Delta$ para toda constante d_i con subíndice i, es decir, para toda constante $d_i \in i$. Por hipótesis de inducción $M, i \nvDash \psi d_i$. Para cualquier d_i, tal que $\bar{d}_i \in i$, sea $\beta' = \beta(x/\sigma(d_i))$. Entonces $M_{\beta'}, i \nvDash \psi x$. Siendo β' cualquier x-variante de β, se sigue que $M, i \vDash \neg\exists x\psi x$. Concluimos que todo conjunto de enunciados (sin constantes individuales) $\mathfrak{C}$-consistente es satisfacible en una estructura de dominio numerable. ❐

El operador Lambda

Ahora seguiremos a Mendelson y Fitting quienes introducen en el lenguaje formal un expediente que permite ampliar el poder expresivo de los lenguajes hasta aquí considerados y eliminar algunas ambigüedades que, si bien no son relevantes en la lógica clásica de primer orden, ocultan importantes distinciones en el caso modal. El expediente en cuestión es el operador λ que concatenado a una variable x y a una fórmula αx que contiene a x libre forma el predicado $\langle \lambda x \cdot \alpha x \rangle$ que, dicho informalmente, es verdadero de los elementos que satisfacen αx. Es decir, si τ es un término singular, pensemos en una constante, que lo mismo puede representar un nombre propio que una descripción definida, el operador λ será definido de tal manera que la equivalencia

$$\langle \lambda x \cdot \alpha x \rangle(\tau) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha\tau$$

sea validada. No parece que hayamos ganado nada en poder expresivo, hasta que advertimos una distinción de alcance que sucede frecuentemente en el habla coloquial. Imaginemos que alguien dice «mi abuelo no es calvo» ¿quizo decir de su abuelo que no tiene la propiedad de la calvicie? ¿O que es falso que su abuelo sea calvo? Lo segundo sería claramente el caso si no tuviera abuelo.

Podemos decir que en el primer caso hacemos una negación *de re*. Tomamos al sujeto y de él decimos que tiene la propiedad de no ser calvo. En el segundo podríamos considerar que hacemos una negación *de dicto*. Decimos de un enunciado que es falso. En cierto sentido es una negación metalingüística. La primera es una negación interna; la segunda, externa. Sin embargo, puede ser que desde el punto de vista semántico, las dos frases resultantes sean equivalentes. Así mismo es posible que tengan diferentes significados. Por ejemplo, pensemos que entre las personas definitivamente calvas y las que claramente no lo son hay una zona intermedia. En ese caso negar que alguien sea calvo no es lo mismo que afirmar que es no-calvo. Hay otros casos más importantes donde la distinción debe hacerse si no queremos que todo caiga en la confusión. Por ejemplo la frase «el presidente de la república alguna vez será un ciudadano como los otros» puede querer decir que el individuo que ahora es presidente de la república alguna vez será un ciudadano común y corriente, pero también puede querer decir que algún día el que entonces será presidente de la república será un ciudadano no más importante que los otros. Si representamos «alguna vez será» por el operador $\langle F\rangle$[12] y «el presidente de la república» por τ, el primer caso podría representarse por $\langle \lambda x \cdot \langle F\rangle Cx\rangle(\tau)$;mientras que el segundo por$\langle F\rangle\langle \lambda x \cdot Cx\rangle(\tau)$. Note que este fenómeno también puede presentarse con términos genéricos. Por ejemplo, supongamos que al mirar el entrenamiento de las fuerzas juveniles del Atlas, me asombró de la calidad extraordinaria de sus jugadores y emito el juicio «Algún dia uno de los jugadores del Atlas será Balón de oro». Pero también esta frase podría querer decir que alguna vez (quizas en el siglo XXII) un balón de oro será fichado por el Atlas.

Estos ejemplos tratan con la modalidad temporal pero otros similares pueden hallarse para las otras modalidades. Recordemos el de Quine

Necesariamente el número de planetas es mayor que 7.
Puede ser entendido expresando la proposición *de dicto*:
Es necesario que el número de planetas sea mayor que 7
o como expresando la proposición *de re*,
Del número de planetas es necesario que sea mayor que 7.
El lenguaje formal con el operador λ permite que esta diferencia semántica se refleje en una distinción sintáctica. El primero puede ser simbolizado como
$\Box\langle \lambda x \cdot x > 7\rangle(p)$
y el segundo como, $\langle \lambda x \cdot \Box x > 7\rangle(p)$

Como dijimos antes, es característico de la lógica modal que los operadores de necesidad y posibilidad sean considerados (a veces) como adverbios. En este caso «$\Box$» puede ser anexado a un adjetivo para formar otro. Así es posible tratar algunas

[12]En la sección de lógica temporal simbolizamos este operador simplemente con la letra F.

inferencias aparentemente paradójicas como, por ejemplo
«Todos los jugadores pueden ganar»

$\therefore$ «Es posible que ganen todos los jugadores»

«Felipe sabe que hay personas que son espías»
$\therefore$ «Hay personas de las que Felipe sabe que son espías»

«George IV quería saber si Scott era el actor de Waverley»
$\therefore$ «Del autor de Waverley George IV quería saber si era Scott»

En todos estos casos pasamos de la lectura *de dicto* de una frase a su interpretación *de re*. Para determinar que este movimiento es inválido requerimos distinguir claramente ambos casos y esta es una de las utilidades del operador λ. Hasta ahora hemos considerado al enunciado $\Box Pa$ como formado a partir de la fórmula atómica Pa a la que se le antepone el operador de necesidad. Ahora que podemos hacer distinciones de alcance advertimos que pudo ser formada por aplicación del predicado compuesto $\Box P$ a la constante a. ¿cúal es la diferencia desde el punto de vista semántico? Por ejemplo si estamos evaluando la fórmula en un mundo w y hay uno solo un mundo $v \in W$ tal que wRv entonces si interpretamos la fórmula como $(\Box P)a$ entonces debemos comprobar si lo que a designa en w tiene en v la propiedad P. En cambio si la leemos como $\Box(Pa)$ entonces debemos trasladarnos primero a v, allí buscar la designación de a y verificar si tiene la propiedad P. Con la notación λ, la primera lectura corresponde a $\langle \lambda x \cdot \Box Px\rangle(a)$ y la segunda a $\Box\langle \lambda x \cdot Px\rangle(a)$. La introducción del operador de abstracción requiere modificar substancialmente las definiciones tanto de términos como de fórmulas de nuestro lenguaje porque, además de los predicados originales que el lenguaje posee, otros nuevos serán generados por el uso del operador de abstracción lo que a su vez dará lugar a nuevas fórmulas. Otro cambio que debemos hacer es evitar que constantes aparezcan en fórmulas atómicas. ¿Por qué? Como vimos fórmulas tan sencillas como $\neg Pa$ o $\Box Pa$ donde P es un predicado unario y a una constante son ambigüas. Si Pa fuese una fórmula atómica la fórmula $\neg Pa$ no podría construirse mas que por la concatenación del signo de negación a dicha fórmula atómica. A una sola construcción sintáctica corresponderán dos posibles interpretaciones. Con el operador lambda hacemos de la predicación un operador lógico cuyo alcance puede abarcar otros símbolos lógicos. La nueva definición procede ahora como sigue.

Definición 5.11.15. Si ψ^n es una letra predicativa n-aria y $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables $\psi^n x_1 ... x_n$ es una fórmula atómica.
Si α y β son fórmulas, x una variable y t un término, también son fórmulas

1. $\neg\alpha$.
2. $(\alpha \wedge \beta)$.
3. $(\alpha \vee \beta)$.

4. $(\alpha \to \beta)$.
5. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.
6. $\forall x\alpha$.
7. $\exists x\alpha$.
8. $\Box\alpha$.
9. $\Diamond\alpha$.
10. $\langle \lambda x \cdot \alpha \rangle(\tau)$.

Llamaremos a $\langle \lambda x \cdot \alpha \rangle$ abstracción (de α).

De la definición se sigue que el operador λ puede ser aplicado a otra fórmula formada por ese operador. Por ejemplo, si A^2 es un predicado binario y e y b constantes, entonces $\langle \lambda y \cdot A^2 xy \rangle(e)$ es una fórmula como también la es $\langle \lambda x \cdot \langle \lambda y \cdot Axy \rangle(e) \rangle(b)$. Se suele abreviar esta fórmula con la expresión

$$\langle \lambda x, y \cdot Axy \rangle(b, e).$$

Note que las constantes están en orden invertido. Las ocurrencias de variables libres de $\langle \lambda x \cdot \varphi \rangle(t)$ son las de φ excepto x sumadas a las de t. Es verdad que t solo puede tener una variable libre (cuando t misma es una variable) pero conviene dar esta defínción en su forma más general por si se quiere emplear en un lenguaje con letras funcionales.

Ahora a la definición del valor de verdad de una fórmula α en un mundo $w \in W$ de un modelo $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ agregamos la cláusula siguiente.

Definición 5.11.16. $M, w \vDash \langle \lambda x \cdot \alpha \rangle(t)$ si y solo si $M_{\beta'}, w \vDash \alpha$ donde β' es la x-variante de β tal que $\beta'(x) = (\sigma\beta)(w, t)$

Podemos hacer ahora algunas de las distinciones antes mencionados. Por ejemplo, podríamos, viendo el premio mayor de la lotería que se jugó anoche, decir

Necesariamente el ganador de la lotería debe ser rico.

Pero también pudiera ser que conociéramos al ganador y supiéramos de otros negocios jugosos en que ha salido airoso y entonces dijéramos

el ganador de la lotería necesariamente ha de ser rico».

Si e denota al ganador de la lotería de anoche, el primer enunciado podría ser simbolizado por $\Box\langle \lambda x \cdot Rx \rangle(e)$ mientras que el segundo podría formalizarse asi;

$$\langle \lambda x \cdot \Box Rx \rangle(e).$$

Supongamos que debemos evaluar esas fórmulas en un mundo w tal que hay solo dos mundos v y z accesibles desde w. Supongamos que x es la única variable que ocurre libre en R entonces $M_\beta, w \vDash \langle \lambda x \cdot \Box Rx \rangle(e)$ si y solo si la x-variante de β que

asigna a x lo que e denota en w satisface $\Box Rx$. Supongamos que e denota en w a m. Entonces debemos verificar si en v y en z, m tiene la propiedad R. No olvidemos que eso es independiente de que dicho objeto m exista en $D(w)$, $D(v)$ o $D(z)$. Por otro lado $M_\beta, w \vDash \Box\langle\lambda x \cdot Rx\rangle(e)$ si y solo si $M_\beta, v \vDash \langle\lambda x \cdot Rx\rangle(e)$ y $M_\beta, z \vDash \langle\lambda x \cdot Rx\rangle(e)$ y esto ocurre si la x-variante de β que asigna a x lo que e denota en v satisface Rx en v y la x-variante de β que asigna a x lo que e denota en z satisface Rx en z. De nuevo, esto es independiente de si esos objetos existen en dichos mundos. En estos ejemplos hemos recurrido a descripciones definidas, pero a este tipo de expresiones daremos en breve un tratamiento más completo. En todo caso han servido las descripciones definidas como ejemplo de términos singulares que pueden designar objetos diferentes en mundos diferentes. Podemos ahora expresar con mayor claridad proposiciones más entreveradas. De nuevo pensemos en la modalidad temporal $\langle F\rangle$.

Represente el predicado P la propiedad de ser policía, el predicado binario O la relación de quedar x bajo las órdenes de z y denote t al secretario de la Defensa nacional. Consideremos los siguientes enunciados y sus traducciones al lenguaje ordinario

$$\forall x(Px \to \langle F\rangle\langle\lambda y \cdot Oxy\rangle(t)).$$

Los policias actuales alguna vez quedarán bajo las ordenes del que entonces sea secretario de la Defensa.

$$\forall x(Px \to \langle\lambda y \cdot \langle F\rangle Oxy\rangle(t)).$$

Los policias actuales alguna vez quedarán bajo las órdenes del actual secretario de la Defensa.

$$\forall x\langle F\rangle\langle y \cdot (Px \to Oxy)\rangle(t).$$

Los individuos actuales que alguna vez serán policias quedarán bajo las órdenes del que entonces sea secretario de la defensa

$$\langle\lambda y \cdot \langle F\rangle\forall x(Px \to Oxy)\rangle(t).$$

Alguna vez los policias quedarán bajo el mando del actual secretario de la defensa.

En estos caso pudimos decir «bajo el mando de lo que denota t...» Veremos ahora que el recurso al operador λ nos permite hacer interesantes observaciones relativas a la identidad.

El Operador Lambda y la Identidad

Frege (1879) se preguntaba si una ecuación verdadera $a = b$ establece una relación entre objetos o una relación entre nombres. Distinguimos a Cicerón de «Cicerón» que es un nombre del célebre orador romano. Cuando usamos el nombre nos referimos al orador. Así, «Cicerón=Tulio» debería tratar de Cicerón (y no de su nombre) de la misma manera que «Cicerón era un orador romano». Sin embargo, si así fuera «Cicerón=Tulio» solo diría de un objeto que es igual a sí mismo, propiedad que comparte con todos los demás objetos del universo. La afirmación sería trivial y no lo es. En

nuestro lenguaje ampliado podemos hablar por un lado de la identidad de un objeto consigo mismo y también de la identidad de denotaciones de dos términos singulares. Consideremos la fórmula

$$\langle \lambda x, y \cdot (x = y)\rangle(t_1, t_2) \to \Box\langle \lambda x, y \cdot (x = y)\rangle(t_1, t_2),$$

con t_1 y t_2 constantes. Supongamos un modelo $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ tal que solo v es accesible desde $w \in W$. Veamos en qué casos es verdadero el antecedente. $M, w \vDash \langle \lambda x \cdot \langle \lambda y \cdot (x = y)\rangle(t_2)\rangle(t_1)$ si y solo si

$$M_\gamma, w \vDash \langle \lambda y \cdot (x = y)\rangle(t_2),$$

donde $\gamma = \beta\frac{x}{\sigma(w,t_1)}$ si y solo si

$$M_\delta, w \vDash (x = y),$$

donde

$$\delta = \gamma\left(\frac{y}{\sigma(w, t_2)}\right) = \beta\left(\frac{x}{\sigma(w, t_1)}, \frac{y}{\sigma(w, t_2)}\right),$$

es decir, que la fórmula en cuestión es verdadera si y solo si $\sigma(w, t_2) = \sigma(w, t_1)$. En cambio $M, w \vDash \Box\langle \lambda x \cdot \langle \lambda y \cdot (x, y)\rangle(t_2)\rangle(t_1)$ si y solo si

$$M, v \vDash \langle \lambda x \cdot \langle \lambda y \cdot (x, y)\rangle(t_2)\rangle(t_1),$$

lo cual es verdadero si y solo si

$$\sigma(v, t_2) = \sigma(v, t_1).$$

Del allí se sigue que

$$\langle \lambda x, y \cdot (x = y)\rangle(t_1, t_2) \to \Box\langle \lambda x, y \cdot (x = y)\rangle(t_1, t_2) \tag{5.11.1}$$

no es válida.

En cambio, es fácil constatar que

$$(\forall x)(\forall y)(x = y) \to \Box(x = y)$$

es válida pues la denotación de las variables (bajo una asignación) no cambia de un mundo a otro. Por la misma razón 5.11.1 es válido si t_1 y t_2 son designadores rígidos. Mientras que si $x = y$ es verdadera (para una asignación en un modelo) entonces es válida (en ese modelo). Por otro lado, $\langle \lambda x, y \cdot (x = y)\rangle(t_1, t_2)$ solo es verdadera en los mundos en los que las constantes t_1 y t_2 denotan el mismo objeto. Con esto la ley de Leibniz

$$\forall x \forall y(x = y \to (Fx \leftrightarrow Fy)) \qquad \text{para toda } F$$

elude las objeciones surgidas a partir de aparentes contraejemplos. Pongamos por

caso,

$$\begin{array}{ll} & \Box 9 > 7 \\ & 9 = \text{el número de planetas} \\ \hline \therefore & \Box N > 7 \end{array}$$

Podríamos formalizar así el argumento de Quine:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \forall y\ x = y \to (\Box x > 7 \to \Box y > 7) \\ & 9 = N \to (\Box 9 > 7 \to \Box N > 7) \\ & (9 = N \wedge \Box 9 > 7) \\ \hline \therefore & \Box N > 7 \end{array}$$

como la conclusión es falsa, parecería que la primera premisa es incorrecta. Sin embargo, la segunda premisa también podría formalizarse así

$$9 = N \to (\langle \lambda z \cdot \Box z > 7 \rangle (9) \to \langle \lambda z \cdot \Box z > 7 \rangle (N))$$

$\langle \lambda z \cdot \Box z > 7 \rangle (N)$ es verdadero. De esta manera damos una lectura *de re* a la conclusión del argumento problemático, como lo propuso A. Smullyan, solo que ahora no analizamos la descripción definida «el número de planetas». Lo haremos más adelante.

De manera similar podemos tratar otros ejemplos en que se halla una ambigüedad entre atribuciones *de re* y *de dicto*. Cuando el operador λ interactúa con operadores proposicionales veritativos funcionales la diferencia entre ambas construcciones no tiene importancia semántica; al menos mientras supongamos, como lo hemos hecho hasta ahora, que todas las constantes denotan (aunque su denotación pueda no existir en el mundo de evaluación). Así por ejemplo

$$\langle \lambda x \cdot \neg Cx \rangle (t) \equiv \neg \langle \lambda x \cdot Cx \rangle (t)$$
$$\text{y } \langle \lambda x \cdot (Px \wedge Qx) \rangle (t) \equiv (\langle \lambda x \cdot Px \rangle (t) \wedge \langle \lambda x \cdot Qx \rangle (t)).$$

También es fácil constatar que

$$\langle \lambda y \cdot \langle \lambda x \cdot Px \rangle (y) \rangle (t) = \langle \lambda x \cdot Px \rangle (t),$$

lo que muestra que nada se gana si el operador de abstracción se aplica a una variable.

Habíamos visto que una constante no puede instanciar un cuantificador (digamos universal) porque puede denotar un objeto que no existe en el mundo de evaluación, mientras que la variable del cuantificador corre sobre los objetos de ese mundo. Más aún, incluso si una constante denota en cada mundo w un objeto en $D(w)$, las leyes usuales de la instanciación de cuantificadores no son válidas. Por ejemplo sería un error inferir a partir de

$$\langle \lambda x \cdot \Diamond Px \rangle (t) \wedge \Diamond \langle \lambda x \cdot Px \rangle (t) \tag{5.11.2}$$

El enunciado

$$\exists y [\langle \lambda x \cdot \Diamond Px \rangle (y) \wedge \Diamond \langle \lambda x \cdot Px \rangle (y)]$$

pues las dos ocurrencias de t en 5.11.2 no se refieren necesariamente al mismo objeto.

Sin embargo, hay algunas equivalencias que vinculan la instanciación de variables cuantificada y el operador lambda, como lo muestra el siguiente resultado.

Lema 5.11.17. *Son válidas en semántica de dominio variable las fórmulas:*

(a) $\forall x(\langle \lambda z, y \cdot (z = y)\rangle(c, x) \to P(x)) \equiv \langle \lambda x \cdot P(x)\rangle(c)$.

(b) $\exists x(\langle \lambda z, y \cdot (z = y)\rangle(c, x) \wedge P(x)) \equiv \langle \lambda x \cdot P(x)\rangle(c)$.

Demostración. (b) Sea $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ un modelo y $w \in W$. Recordemos las condiciones para que

$$M, \Gamma \vDash \langle \lambda z, y \cdot (z = y)\rangle(c, x)$$

Eso sucede si y solo si

$$(\sigma\beta)(\Gamma, c) = (\sigma\beta)(x),$$

es decir

$$\sigma(\Gamma, c) = \beta(x).$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de la equivalencia es verdadero si y solo si hay una x-variante de β tal que a x asocia $\sigma(\Gamma, c)$ y $\sigma(\Gamma, c) \in \sigma(\Gamma, P)$. La misma condición es necesaria y suficente para validar $\langle \lambda x \cdot P(x)\rangle(c)$ □

Las fórmulas (a) y (b) anteriores se asemejan a las fórmulas

$$\forall x(x = c \to P(x)) \equiv P(c)$$
$$\exists x(x = c \wedge P(x)) \equiv P(c),$$

válidas en la lógica clásica de primer orden, pero que en la semántica de dominio variable pueden ser falsas. Veámos el siguiente argumento. El ser todopoderoso pudo elegir elegir encarnarse «en cualquiera de los destinos que traman la compleja red de la historia» (Borges). Pudo ser el asesino de César. Es necesario que el asesino de César esté en el infierno. Por lo tanto, Dios puede estar en el infierno. Denotemos con d al ser todopoderoso y con c al asesino de César, entonces el argumento puede ser formalizado así

$$\begin{array}{ll} & \langle \lambda x \cdot \Diamond\langle \lambda y \cdot (x = y)\rangle(c)\rangle(d) \\ & \Box\langle \lambda z \cdot P(z)\rangle(c) \\ \hline \therefore & \langle \lambda x \cdot \Diamond Px\rangle(d) \end{array}$$

¿Cómo podemos verificar la correción de un argumento como éste usando árboles semánticos? La novedad son las fórmulas que tiene el operador de abstracción. Dado que atribuyen una propiedad a la denotación de una constante en un mundo, lo más natural es instanciar en esa fórmula la variabe que acompaña al operador λ con la constante indexada con el índice del mundo en que se halla. Es decir si tenemos $\langle \lambda x \cdot \alpha(x)\rangle(c)i$ en un nodo, en todo nodo relevante aparecerá $\alpha(c_i)i$. Así mismo $\neg\langle \lambda x \cdot \alpha(x)\rangle(c)i$ da lugar a $\neg\alpha(ci)i$. Por ejemplo, el árbol del argumento anterior es el siguiente.

$\langle\lambda x \cdot (\Diamond\langle\lambda y \cdot (x = y)\rangle(c))\rangle(d)$ 0

$\Box\langle\lambda z \cdot Pz\rangle(c)$ 0

$\neg\langle\lambda x \cdot \Diamond Px\rangle(d)$ 0

$\Diamond\langle\lambda y \cdot (d_0 = y)\rangle(c)$ 0

$0R$ 0

$\langle\lambda y \cdot (d_0 = y)\rangle(c)$ 1

$d_0 = c_1$ 1

$\langle\lambda z \cdot Pz\rangle(c)$ 1

Pc_1 1

Pd_0 1

$\neg\Diamond Pd_0$ 0

$\Box\neg Pd_0$ 0

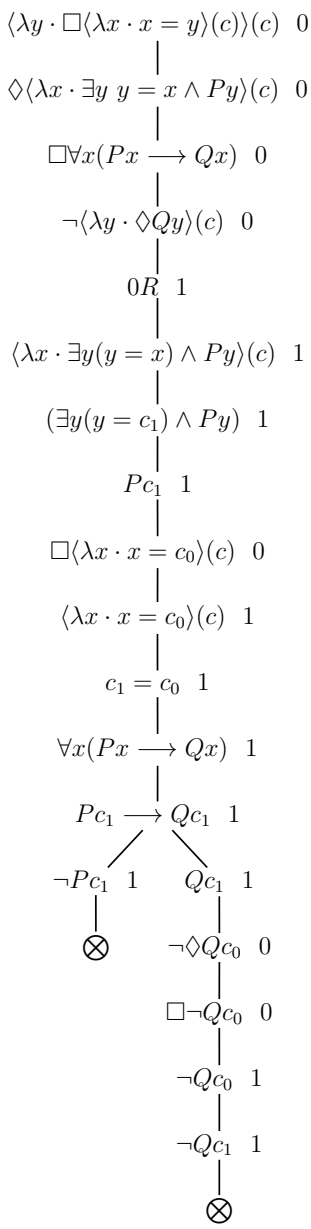
$\neg Pd_0$ 1

$\otimes$

Aquí, por supuesto, hemos admitido que aparezcan en la raíz del árbol fórmulas que contienen constantes siempre y cuando aparezcan como sujetos de un operador de abstracción.

Comprobaremos ahora que la fórmula siguiente es V-válida.

$$[\langle\lambda y \cdot \Box\langle\lambda x \cdot x = y\rangle(c)\rangle(c) \wedge \Diamond\langle\lambda x \cdot \exists y y = x \wedge Py\rangle(c) \wedge \Box\forall x(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \langle\lambda y \cdot \Diamond Qy\rangle(c)$$



En este último ejemplo hemos empleado dos recursos que pueden ser útiles. Uno es la fórmula $\langle\lambda x \cdot \exists y\ y = x\rangle$ que es verdadera de la denotación de una constante en un mundo i si existe en ese mundo. Es decir, si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta\rangle$ y $w \in W$ $M, w \vDash \langle\lambda x \cdot \exists y(y = x)\rangle(t)$ (donde t es una contante) si y solo si $\sigma(t) \in D(w)$. Así podríamos, por ejemplo, expresar que la denotación de t (en w) existe en todos los mundos accesibles a w mediante el enunciado $\langle\lambda x \cdot \Box\exists y y = x\rangle(t)$ o podríamos decir de Alfonso Reyes que «donde quiera que el mar lo haya arrojado se aplicara dichoso y desvelado al otro enigma y a las otras leyes» (Borges) con enunciado del tipo

$$\langle\lambda x \cdot \Box(\exists y(y = x) \to Dx)\rangle(a).$$

El otro recurso es la fórmula

$$\langle \lambda y \cdot \Box \langle \lambda x (x = y) \rangle (t) \rangle (t).$$

que es verdadero de t si t es un designador rígido. No es, por supuesto, una condición suficiente de rigidez pero sí es necesaria. La fórmula solo garantiza que en los mundos accesibles a w, t designa al mismo individuo que en w. Por supuesto que si el modelo en cuestión es de equivalencia y t cumple esta condición en w, será un designador rígido en todos los mundos en la clase de equivalencia de w. Asimismo es cierto que si se trata de evaluar la verdad de una fórmula en un mundo de un modelo de Kripke los mundos que están fuera de la cerradura transitiva y reflexiva de R centrada en w no tienen ninguna relevancia, pero no debemos olvidar que la noción de rigidez es relativa a un modelo.

Definición 5.11.18. Si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ es un modelo, entonces la cerradura reflexiva y transitiva $R^*_=$ de R está definida por las siguientes cláusulas recursivas. Para todo $w, v, z \in W$

1) $wR^*_=w$

2) Si $wR^*_=v$ y vRz entonces $wR^*_=z$.

Definición 5.11.19. Si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ es un modelo y $w \in W$, la cerradura transitiva y reflexiva de R, centrada en w, $R^*_=(w)$ está definida por

$$R^*_=(w) = \{z | wR^*_=z\}.$$

Teorema 5.11.20. *Si $M = \langle W, R, D, \sigma, \beta \rangle$ es un modelo y $w \in W$ es tal que $M, w \vDash \alpha$, entonces $M', w \vDash \alpha$ donde $M' = \langle W, R, D, \sigma', \beta \rangle$ y $\sigma \restriction R^*_=(w) = \sigma' \restriction R^*_=(w)\}$ es decir, σ y σ^* coinciden en la cerradura reflexiva y transitiva de R centrada en w.*

La prueba es sencilla y no la daremos aquí. Mendelson y Fitting agregan un recurso más al lenguaje, introducen términos funcionales que denotan en cada mundo una funcón del dominio del marco a si mismo. Es una extensión natural de la semántica de dominio variable en el caso de las constantes y, evidentemente, permite traducir al lenguaje formal de una manera muy natural algunas expresiones del lenguaje ordinario. Sin embargo, hay otro sentido en que se trata de un recurso muy artificioso. El que una relación sea una función depende de cuestiones de existencia y unicidad de imágenes para cada elemento del dominio. Si extendemos el tratamiento a individuos posibles como lo hacen los autores mencionados, esa característica parece desvanecerse. Por ejemplo, podría entonces la denotación de una letra funcional ser en este mundo la relación de un individuo a su hijo primogénito, en el entendido que a quienes no tienen descendientes podría asignarselos un hijo posible. Preferimos quedarnos solo con las constantes.

5.12 Descripciones definidas y modalidad

Para el tratamiento de las descripciones definidas en contextos modales tenemos dos opciones posibles. La primera es utilizar la teoría russelliana de 1905, la cual provee un medio para traducir cualquier enunciado con ocurrencias de descripciones definidas en otro sin ellas. La segunda posibilidad es seguir la técnica empleada por Mendelson y Fitting (1998). Empezaremos por explorar esta segunda opción. Introduciremos el operador (ιx) (con x una variable) que adjuntado a una fórmula ϕx con (al menos) una ocurrencia libre de x denota en un mundo al único objeto en ese mundo que satisface ϕx. Si más de un elemento de $D(w)$ o ninguno satisface ϕx, entonces $(\iota x)\phi x$ no denota en w. Russell supuso que una frase como «el actual rey de Francia es calvo» es falso, mientras que, según Frege, carece de valor de verdad. Para Strawson, quien emite esa frase no asevera, sino que presupone, que existe actualmente un único rey de Francia. Fitting y Mendelson recurren al operador λ para discriminar los términos singulares que (en un mundo) carecen de denotación. Nosotros solo aplicaremos este recurso a las descripciones definidas. Es decir, supondremos, como lo hemos hecho hasta ahora, que todas las constantes denotan en todos los mundos, aunque lo que denotan no exista en el mundo en cuestión.

En la vía que adoptaremos es falso decir

El actual rey de Francia es calvo.

y también

El actual rey de Francia no es calvo.

En cambio será verdadera la oración

No es cierto que el actual rey de Francia es calvo.

así como tamnbién

No es cierto que el actual rey de Francia no es calvo.

Si $(\iota x)Fx$ simboliza «el actual rey de Francia» y C el predicado de la calvicie entonces

$$\langle \lambda y \cdot Cy \rangle((\iota x)Fx)$$
$$\langle \lambda y \cdot \neg Cy \rangle((\iota x)Fx)$$

son falsos en este mundo. Vayamos ahora a los detalles formales para, más adelante, ilustrar su aplicación. Puesto que si t es un término y α una fórmula, $\langle \lambda x \cdot \alpha \rangle(t)$ es una fórmula y, por otro lado, $(\iota x)\alpha x$ es un término, no podremos definir «fórmula» y «término» de manera independiente. Los definiremos de manera conjunta, pero no circular. Suponemos dado un vocabulario no lógico S y haremos referencia implícita a él en la siguiente definición.

1. Si A es una letra predicativa n-aria y $x_1, ..., x_n$ son variables, entonces $Ax_1...x_n$ es una fórmula atómica.

2. Si α y β son fórmulas, x es una variable y t un término, son fórmulas:

   2.1 $\neg\alpha$.

   2.2 $(\alpha \wedge \beta)$.

   2.3 $(\forall x)\alpha$.

   2.4 $\Box\alpha$.

   2.5 $\langle\lambda x \cdot \alpha\rangle(t)$.

3. Una variable es un término.

4. Una constante es un término.

5. Si α es una fórmula y x una variable $(\imath x)\alpha$ es un término.

Como siempre, dado un modelo $M = \langle W, D, R, \sigma, \beta\rangle$, cada término que no sea de la forma $(\imath x)\alpha$ denotará a un individuo en cada mundo (aunque no exista en ese mundo). El individuo denotado por t en w es $(\sigma\beta)(w, t)$. Por otro lado $(\sigma\beta)(w, (\imath x)\alpha(x)) = b$ si y solo si $b \in D(w)$, b satisface $\alpha(x)$ y ningún otro miembro de $D(w)$ satisface $\alpha(x)$. En caso contrario $(\sigma\beta)(w, (\imath x)\alpha)$ no está definido. Ahora agregamos una cláusula a la definición de «satisfacción». 1) $M_\beta, w \vDash \langle\lambda y \cdot \phi\rangle((\imath x)\alpha)$ si y solo si $(\imath x)\alpha$ denota a un elemento en el dominio de w y $M_\gamma, w \vDash \phi$ donde γ es la x-variante de β tal que $\gamma(x) = (\sigma\beta)(w, (\imath x)\alpha)$. En particular, si no hay miembro de $D(w)$ que satisfaga $\alpha(x)$, o hay más de un elemento que lo haga

$$M_\beta, w \nvDash \langle\lambda y \cdot \phi\rangle((\imath x)\alpha)$$

para cualquier fórmula ϕ (incluída α misma).

Así, el cuadrado redondo no será cuadrado ni redondo. Denotemos por Cx y Rx las propiedades de ser cuadrado y ser redondo respectivamente. Entonces $((\imath x)(Cx \wedge Rx))$ significa lo mismo que «el cuadrado redondo», tenemos entonces que

$$M, w \nvDash \langle\lambda y \cdot Cy\rangle((\imath x)(Cx \wedge Rx).$$

Por lo tanto,

$$M, w \vDash \neg\langle\lambda y \cdot Cy\rangle((\imath x)(Cx \wedge Rx).$$

En consecuencia, no es válida una fórmula del tipo $\langle\lambda y \cdot Py\rangle((\imath x)Px)$. Como vimos antes, la oración «el autor de las Catilinarias pudo no escribir las Catilinarias» (es decir pudo no ser el autor de las Catilinarias) admite varias lecturas. Una *de dicto* que corresponde a la siguiente formalización:

$$\Diamond\langle\lambda x \cdot \langle\lambda y \cdot x \neq y\rangle((\imath z)Az)\rangle((\imath z)Az),$$

la cual es contradictoria. La lectura de re puede ser formalizada así

$$\langle\lambda x \cdot \Diamond\langle\lambda y \cdot x \neq y\rangle((\imath z)Az)\rangle((\imath z)Az)$$

La cual es verdadera si el que es de hecho el autor de Las Catilinarias, Cicerón, no es la persona que en algún otro mundo escribió esa obra. Sin embargo, sería más de sentido común la siguiente lectura

$$\langle \lambda x \cdot \Diamond \neg \langle \lambda y \cdot x = y \rangle ((\iota z) Az) \rangle ((\iota z) Az)$$

porque es verdadera aún si hay un mundo accesible en donde nadie escribió Las Catilinarias.
Consideremos ahora el enunciado: Alguna vez el actual presidente de México se casará con la que entonces sea la reina de Inglaterra. Si representamos por Ix «ser reina de Inlgaterra» y por Mx «ser presidente de México», el enunciado podría simbolizarse de la siguiente manera

$$\langle \lambda x \cdot F \langle \lambda y \cdot Cxy \rangle ((\iota z) Iz) \rangle ((\iota w) Mw).$$

Note que las reglas de formación de fórmulas nos autorizan a utilizar el operador de descripción definida con fórmulas que contienen operadores modales o temporales. Por ejemplo, el enunciado «el español que anotó el último gol vive en México», podría formalizarse así

$$\langle \lambda y \cdot My \rangle ((\iota z)(P(Ez)),$$

donde P es el operador del tiempo pretérito. Note que la fórmula es verdadera en el modelo temporal que corresponde a nuestra intuición. Hay que prevenir un posible malentendido. Para facilitar la comprensión daremos un ejemplo artificial. Sea $M = \langle W, R, D, \phi, \beta \rangle$ un modelo tal que: $W = \{1, 2, 3\}$
$R = \{(1,2), (1,3)\}$
$D(1) = \{a, b\}$, $D(2) = \{a, c, d\}$, $D(3) = \{b, d\}$
$\phi(1, P) = \{b, c\}$, $\phi(2, P) = \{a, c\}$, $\phi(3, P) = \{a, b\}$, $\phi(1, Q) = \{c, d\}$, $\phi(2, Q) = \{c\}$ y $\phi(3, Q) = \{c, d\}$.
En el mundo 1, $(\iota x)(\Diamond Px \wedge \Diamond Qx)$ no denota. Por consiguiente,

$$M, 1 \not\models \langle \lambda z \cdot Qz \rangle ((\iota x)(\Diamond Px \wedge \Diamond Qx)).$$

Sin embargo, note que también podríamos decir que el único individuo que en 1 posiblemente tiene P y posiblemente tiene Q es c. Eso no lo podemos expresar con nuestra notación.

Comparemos este tratamiento de las descripciones definidas con el ofrecido por Russell y al cual ya hemos hecho mención. Como vimos, una la frase «el autor de *La Ilíada* nació en Quíos» debe ser parafraseada como «hay uno y solo un autor de *La Ilíada* y ese individuo nación en Quíos». Simbólicamente,

$$Q((\iota x) Ix) \equiv \exists x (\forall y (Iy \leftrightarrow y = x) \wedge Qx)$$

Ahora debemos distinguir entre «El autor de *La Ilíada* posiblemente nació en Quíos» y «Es posible que el autor de *La Ilíada* haya nacido en Quíos». Es verdad que en el

lenguaje ordinario ambas frases podrían utilizarse como sinónimas, pero supongamos que deban interpretarse como haciendo la primera una atribución *de re* y la seguna una *de dicto*. entonces pueden ser respectivamente formalizadas como:

$$(\exists x(\forall y(Iy \leftrightarrow y = x) \wedge \diamond Qx)$$

y

$$\diamond(\exists x(\forall y(Iy \leftrightarrow y = x) \wedge Qx)$$

Introduzcamos como antes la modalidad en la descripción misma: «El hombre que posiblemente escribió *La Ilíada* nació en Quíos». La frase dice que en este mundo hay uno y solo un humano que en algún otro mundo posible (tal vez en varios) accesible al nuestro escribió *La Ilíada* y ese individuo nació en Quíos (la de este mundo). La paráfrasis lógica es entonces,

$$\exists x(\forall y(\diamond Iy \leftrightarrow y = x) \wedge Qx)$$

Este enfoque tiene la ventaja de que no requiere agregar nuevas clúsulas semánticas para el tratamiento de las descripciones definidas ni nuevas reglas semánticas ni para la construcción de árboles. Por otro lado, si los únicos términos singulares en un enunciado son descripciones definidas (es decir, no tiene nombres propios), entonces tampoco requerimos del operador lambda, pero no desarrollaremos más este tema.

Los dieciocho meses

1. *Atl Caualo (carenica de agua) o Quiauitl eua (crecimiento del árbol)*
2. *Tlacaxipehualiztli (desollamiento de hombres)*
3. *Tozoztontli (ayuno corto)*
4. *Huey Tozoztli (ayuno prolongado)*
5. *Toxcatl (¿sequía?)*
6. *Etzalqualiztli (etzalli: potaje compuesto de maíz y de frijol cocido, qualiztli: el acto de comer)*
7. *Tecuilhuitontli (pequeño festín de príncipes)*
8. *Huey Tecuilhuitl (gran fiesta de los señores)*
9. *Tlaxochimaco (ofrenda de flores)*
10. *Xocotl Huetzi (caída de los frutos)*
11. *Ochpaniztli (mes de las escobas)*

12. *Teotleco (regreso de los dioses)*
13. *Tepeilhuitl (fiesta de las montañas)*
14. *Quecholli (nombre de un pajaro)*
15. *Panquetzaliztli (elevación de los estandartes de plumas de quetzal)*
16. *Atemoztli (caída de las aguas)*
17. *Tititl (?)*
18. *Izcalli (crecimiento).*

Al fin venían los cinco días llamados nemotemi, considerados como sumamente nefastos, al grado de que se interrumpía durante este período toda actividad.

Entonces el viejito quedó ya de gusto. Y así otra vez estaban contentos ellos de que ya tenían todo, ya estaban arreglados. Pero la única cosa que faltaba era la lumbre. Pero también llegó ahí un zorro; este zorro decía que, «Yo voy a traer lumbre». Y éste, pues, fue y luego allí donde había ido este cacalote a traer tierra, pues, allí volvió el zorro a traer lumbre. Porque allí había lumbre. Entonces este zorro llegó pidiendo permiso a que se calentara un poquito. Se sentó un rato el zorro allí; conforme que se iba a despedir, mete su cola entre la lumbre y corrió. Por esa razón ahora, dicen, que este animal tiene medio negra la punta de la cola. Así es que fue que ese señor ya encontraba la lumbre y todos éstos estaban muy contentos.

Cuento mixe

Titlacahuan llamó al que tenía el nombre de Tata y a su mujer llamada Nene, y les dijo: «No queráis nada más; agujerad un ahuéhuetl muy grande, y ahí os meteréis cuando sea la vigilia y se venga hundiendo el cielo». Ahí entraron; luego los tapó y le dijo: «Solamente una mazorca de maíz comerás tú, y también una tu mujer». Cuando acabaron de consumir los granos, se notó que iba disminuyendo el agua; ya no se movía el palo.

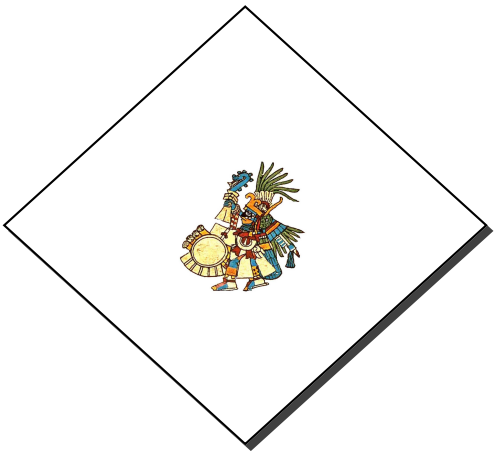
Luego se destaparon y vieron un pescado; sacaron fuego con palillos y asaron para sí los pescados. Miraron hacia acá los dios Citlalinicue y Citlallatónac y dijieron; «Dioses ¿quién ha hecho fuego? ¿quién ha ahumado el cielo?» Al punto descendió Titlacahuan, Tezcatlipoca, los riñó y dijo: «Qué haces, Tata? ¿Qué hacéis vosotros? Luego les cortó los pescuezos y les remendó su cabeza en la nalga, con que se volvieron perros.

Leyenda de los soles

...El Océano estaba nuevamente a la vista. Dentro de pocos meses tornaría a conocer el júbilo de las velas hinchadas, en una orza más cabal y segura que la de antes...Y ahora tendría naves suficientes; ahora era finado el bellaco de Martín Alonso; ahora mandaría marineros de verdad, con título de Almirante, nombramiento de Virrey y tratamiento de Don... Volví a la atarazana donde los indios tiritaban bajo colchas de lana, y los papagayos acaban de vomitar el vino tragado, con ojos vidriosos de pescado en trance de podrirse, alicaídos, patas arriba, de plumas revueltas, como corridos a escobazos... Pronto murieron todos. Como murieron, pocos días después de haber sido bautizados– quien del pecho, quien de sarampión, quien de diarreas– seis de los siete indios que ante los tronos había exhibido. Por Dieguito, el único que me quedaba, supe que esos hombres ni nos querían ni nos admiraban: nos tenían por pérfidos, mentirosos, violentos, coléricos, crueles, sucios y malolientes, extrañados de que casi nunca nos bañaramos, ellos que, varias veces al día, refrescaban sus cuerpos en los riachuelos, cañadas y cascadas de sus tierras. Decían que nuestras casas apestaban a grasa rancia; a mierda, nuestras angostas calles; a sobaquina nuestros más lucidos caballeros, y que si nuestras damas se ponían tantas ropas, corpiños, perifollos y faralás, era porque, seguramente, querían ocultar deformidades y llagas que las hacían repulsivas–o bien se avergonzaban de sus tetas, tan gordas que siempre parecían prestas a saltarles fuera del escote. Nuestros perfumes y esencias –también el incienso– los hacían estornudar; se ahogaban en nuestros estrechos aposentos, y se figuraban que nuestras iglesias eran lugares de escarmiento y espanto por los muchos tullidos, baldados, piojosos, enanos y monstruos que en sus entradas se apiñaban. Tampoco entendían por qué tanta gente, que no era de tropa, andaba armada, ni cómo tantos señores ricamente ataviados podían contemplar, sin avergonzarse, de lo alto de sus relumbrantes monturas, un perpetuo y gimiente muestrario de miserias, purulencias, muñones y andrajos. Por lo demás, los intentos de

inculcarles algo de doctrina, antes de que recibieran las aguas lustrales, habían fracasado. No diré que ponían mala voluntad en entender: diré, sencillamente, que no entendían. Si Dios, al crear el mundo, y las vegetaciones, y los seres que lo poblaban, había pensado que todo aquello era bueno, no veían por qué Adán y Eva, personas de divina hechura, hubiesen cometido falta alguna comiendo los buenos frutos de un buen árbol. No pensaban que la total desnudez fuese algo indecente: si los hombres, allá, *usaban unos taparrabos, era porque el sexo, frágil, sensible y algo molesto por colgante, debía defenderse de arbustos espinosos, hierbas filosas, hincadas, golpes o picadas de alimañas; en cuanto a las mujeres, era mejor que taparan su natura con aquel trocito de algodón que yo les conocía, para que, cuando les bajaran las menstruas no tuviesen que exhibir una desagradable impureza. Tampoco entendían ciertos cuadros del Antiguo Testamento que les mostré: no veían por qué el Mal era representado por la Serpiente, puesto que las serpientes de sus islas no eran dañinas. Además, lo de una serpiente con manzana en la boca los hacía reír enormemente porque –según me explicaba Dieguito– «culebra no come frutas»...*

Monólogo de Cristobal Colón, en *El Arpa y la Sombra*, A. Carpentier.



5.13 Ejercicios

1. Muestre los incisos a), d), y e) del lema 5.3.25.
2. Pruebe a), b), c) del lema 5.3.34.
3. Confirme los incisos a), b), d) e), f) y h) del lema 5.3.36.
4. Verifique el inciso b) del lema 5.3.39.
5. Pruebe que en K_4 es teorema $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\beta)$.
6. Constate que en D son teoremas

$$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \beta).$$

$$\Box\Box\alpha \to \Diamond\Diamond\alpha.$$

7. Demuestre que en $S4$ no hay más de 14 modalidades.
8. Demuestre que
   a) $K < K_4$.
   b) $K < D < T < S_4 < S_5$.
   c) $K < D < T < B < S_5$.
9. Dada una fórmula modal α sin figuraciones de los símbolos $\leftrightarrow$ y $\to$, definimos el dual de α (o α^D)por las siguientes condiciones: a) $\rho^D = \neg\rho$ (donde ρ es una letra proposicional), $(\neg\beta)^D = \neg(\beta)^D$, $(\beta \wedge \gamma)^D = (\beta^D \vee \gamma^D)$; $(\beta \vee \gamma)^D = (\beta^D \wedge \gamma^D)$; $(\Box\alpha)^D = \Diamond(\alpha)^D$ y $(\Diamond\alpha)^D = \Box(\alpha)^D$. Demuestre que $\vdash_K \alpha \leftrightarrow \alpha^D$.
10. Dada α una fórmula modal, sea α' el resultado de borrar todos sus operadores modales. Demuestre que si $\vdash_{S5} \alpha$ entonces α' es una tautología. Concluya que K, KT,KD $S4$ y $S5$ son sistemas axiomáticos consistentes.
11. Pruebe que en $S5$ cualquier fórmula del tipo $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}\theta_n\alpha$ donde cada θ_i es un operador modal ($\Box$ o $\Diamond$), es equivalente a $\theta_n\alpha$.

12. Demuestre las siguientes afirmaciones.

    a) $\vdash_{S5} \Box(P \vee \Box Q) \leftrightarrow (\Box P \vee \Box Q)$.

    b) $\vdash_{S5} \Box(P \vee \diamond Q) \leftrightarrow (\Box P \vee \diamond Q)$.

13. De los ejercicios 12 y 9 concluya lo siguiente.

    a) $\vdash_{S5} \diamond(P \wedge \diamond Q) \leftrightarrow (\diamond P \wedge \diamond Q)$.

    b) $\vdash_{S5} \diamond(P \wedge \Box Q) \leftrightarrow (\diamond P \wedge \Box Q)$.

14. De una fórmula en que ningún operador modal ocurre en el alcance de otro se dice que es de primer grado. Demueste que en $S5$ toda fórmula es equivalente a una fórmula de primer grado.

15. Llamaremos atómica a una fórmula de primer grado (lo que incuye fórmulas sin operadores modales). Sea β una fórmula del cálculo de proposiciones no-modal, en forma normal conjuntiva. Si γ se obtiene de β al subsituir algunas de las letras proposicionales que figuran en esta por fórmulas atómicas, diremos que γ está en forma normal conjuntiva modal. Demostrar que para toda fórmula del lenguaje proposicional modal se puede encontrar una fórmula equivalente en $S5$.

16. Sean α_0, α_1,...α_n y ϕ formulas proposicionales sin operadores modales. Demueste que $\alpha_i \vee \phi$ es una tautología entonces $\models_{S5} \alpha_0 \vee \Box\alpha_0 \ldots \vee_n \vee \diamond \phi$.

17. Demuestre el inverso de la proposición anterior. Es decir, suponga que para ninguna i $(1 \leq i \leq n)$ $\alpha_i \vee \phi$ es tautología. Construya un modelo $S5$ en que $\alpha_0 \vee \Box\alpha_0 \ldots \vee_n \vee \diamond \phi$ sea falsa en un mundo del modelo. Sugerencia: Construya un modelo $S5$ con $n+1$ mundos tal que en cada uno de ellos $\alpha_i \vee \phi$ para alguna i.

18. A partir del teorema de completud para la lógica modal proposicional, demuestre que si α es K-consistente, entonces es satisfacible en un modelo finito con forma de árbol que tiene $alpha$ en el nodo raíz. Sugerencia: si wRv, wRt, vRe y tre (en cuyo caso perdemos la forma arbolada), construya un modelo en que wRv, wRt, vRe y tre' en donde e' es un hermano gemelo de e.

19. En la lógica temporal mímina (K_T) demuestre que son válidas las siguientes afirmaciones:

    a) a) La regla de Becker: si $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Omega\alpha \rightarrow \Omega\beta)$ donde ω es un operador temporal.

    b) Dado un enunciado α, definimos su reflejo α^M, reemplazando G por H y viceversa, y F por P y viceversa. $\vdash \alpha$ si y solo si $\vdash \alpha^M$.

    c) Dado un enunciado α, definimos su dual α^D, reemplazando G por H y viceversa, F por P y viceversa y $\wedge$ por $\vee$ y viceversa. $\vdash \alpha$ si y solo si $\vdash \alpha^M$.

20. Demuestre que si a LLT agregamos los axiomas $G \bot \vee FG \bot$ y $H \bot \vee PH \bot$, el sistema resultante solo tiene modelos finitos.

21. Caracterice los modelos de LLT si agregamos como axioma el esquema $P\alpha \to PP\alpha$.

22. Demuestre que si a los axiomas de LLT agregamos el esquema $(PT \wedge Q \wedge GQ) \to PGQ)$ caracterizamos un orden discreto hacia el pasado.

23. ¿Si a SL agregamos los esquemas $P\alpha \to F\alpha$ y $F\alpha \to P\alpha$ caracterizamos un orden lineal circular?

24. Demuestre que si un marco lineal, denso y sin extremos no valida

$$(FQ \wedge \Diamond\neg Q \wedge (Q \to HQ)) \to \Diamond((Q \wedge G\neg Q) \vee (\neg Q \wedge HQ))$$

no es continuo.

25. Usando los operadores $\mathbb{S}$ y $\mathbb{U}$ (*since* y *until*) exprese simbólicamente las siguientes proposiciones:

    a) Solo una vez cayó aquí un meteorito y desde entonces no florecen los arbustos.

    b) Alguna vez se descubriá quién mató al Dr. Leuben y hasta entonces seguiremos buscando.

    c) Desde que se fue y hasta que vuelva he vivido y viviré esperando.

    d) Entonces vino por vez primera el Papa y desde entonces hasta el gobierno de Fox no volvió a venir.

    e) Desde la primera vez que use una manchester me sentí a gusto.

26. Formalice los siguientes argumentos y determine cuáles son las condiciones míminas que hay que atribuirle a la estructura temporal para que sean válidos.

    (a) En todo tiempo futuro será verdad que en todo tiempo pasado Dios existió. Por lo tanto, Dios es sempiterno.

    (b) Eva Braun y Hitler murieron simultáneamente. El mensaje de cese al fuego llegó después de la muerte de Hitler. Por lo tanto, Eva Braun murió antes de que llegara el mensaje de cese al fuego.

    (c) Algún día fue verdad que los romanos dominarían el Mediterráneo. Los romanos no dominan ni dominarán el Mediterráneo. POr lo tanto, alguna vez los romanos dominaron el Mediterráneo.

    (d) Hoy soy desdichado. En cualquier tiempo futuro, si un día soy desdichado, al día siguiente también lo seré. Por lo tanto siempre seré desdichado.

(e) Alguna vez habrá un terremoto en Indonesia. En cualquier momento, si llega a haber un terremoto en Indonesia, después habrá un tsunami. Por lo tanto En todo momento pasado fue verdad que en el futuro habría un tsunami.

27. Demuestre que:

a) $\vdash_{KC} \Box\forall x(Ax \vee Bx) \to (\exists x \diamond \neg Ax \to \exists x \diamond Bx)$.

b) $\vdash_{KC} \diamond\forall x(Ax \to Bx) \leftrightarrow (\Box\forall xAx \to \diamond\forall xBx)$.

c) $\vdash_{KC} \forall x(\Box Ax \wedge \diamond Bx) \to \diamond\exists x(Ax \wedge Bx)$.

d) $\vdash_{KC} (\exists x \diamond Az \wedge \forall x\Box(Ax \to Bx)) \to \diamond\exists xBx$.

e) $\vdash_{KC} (\exists x\Box\forall yRxy \to \forall y\Box\exists xRxy)$.

f) $\vdash_{KC} (\Box\forall x(Ax \to \diamond\exists yRxy) \wedge \exists x \diamond Ax) \to \diamond \diamond \exists x\exists yRxy)$.

g) $\vdash_{KDC} \forall x\Box(Ax \vee Bx) \to \diamond(\exists xAx|vee\exists xBx)$.

h) $\vdash_{KS4C} \exists x \diamond (Ax \to \forall x\Box Ax)$.

i) $\vdash_{KS4C} \exists x\Box(\Box Ax \vee Bx) \to (xAx \vee \Box\exists xBx)$.

j) $\vdash_{KS4C} \forall x \diamond (\Box Ax \to \diamond Bx) \to \diamond(\forall xAx \to \exists xBx)$.

k) $\vdash_{KS5C} \diamond\forall x(Ax \wedge \Box Bx) \to (\forall x \diamond Ax \wedge \forall xBx)$.

28. Demuestre las aserciones del ejercicio anterior utlizando el método de los árboles semánticos.

29. Confirme que la fórmula Barcan no es V válida.

30. Demuestre el lema 5.6.21.Demuestre que

a) si $\vdash_{KM+4} \alpha$, entonces α es válida en todos los marcos transitivos.

b) si $\vdash_{KM+B} \alpha$, entonces α es válida en todos los marcos simétricos.

c) si $\vdash_{KM+S_5} \alpha$, entonces α es válida en todos los marcos transitivos.

d) Demuestre el lema 5.6.21.

31. Demostramos en el texto que si N es un sistema en el que FB es una fórmula válida, entonces $\vdash_N \alpha$ si y solo si α es válida en M_N, el modelo canónico de N. En particular, $\vdash_{KS4C} \alpha$ si y solo si α es válida en M_{KS4C}. Para obtener el correspondiente teorema de completud del sistem a con respecto a los marcos reflexivos y transitivos demuestre que M_{KS4C} pertenece a esta clase de marcos. item Vimos que si utlizamos una constante, digamos t, para denotar una descripción definida, hay una diferencia entre las dos fórmulas siguientes:

$$\Box\langle\lambda x \cdot Fx\rangle(t)$$
$$\langle\lambda x \cdot \Box Fx\rangle(t).$$

Muestre que simbolizando las descripciones definidas como lo hace Russell ambas proposiciones pueden representarse sin necesidad de usar el operador λ.

32. Considere el argumento de Quine:

    a) $\Box 9 > 7$

    b) El número de planetas$= 9$.

    c) Por lo tanto, $\Box$ El número de planetas> 7.

    Simbolizando la descripción definida a la manera de Russell y usando áboles semánticos demuestre que es válido en su interpretación *de re*. Es decir, demuestre que el árbol de la fórmula

    $$\Box 9 > 7 \wedge (\exists y[(\forall x Nx \leftrightarrow y = x) \wedge y = 9]) \wedge \neg(\exists y[(\forall x Nx \leftrightarrow y = x) \wedge \Box y > 7])$$

    se cierra.

33. Haga lo mismo con el argumento de Russell

    a) George IV quería saber si el autor de Waverley era Scott.

    b) El autor de Waverley=Scott.

    c) Por lo tanto, (1) George IV quería saber si Scott era Scott.

34. Simbolice el argumento siguiente y demuestre su corrección usando árboles semánticos.

    a) El autor de las Catilinarias= El autor de Los Oficios.

    b) Cicerón escribió Las Catilinarias.

    c) Por lo tanto, Tulio escribió Los oficios.

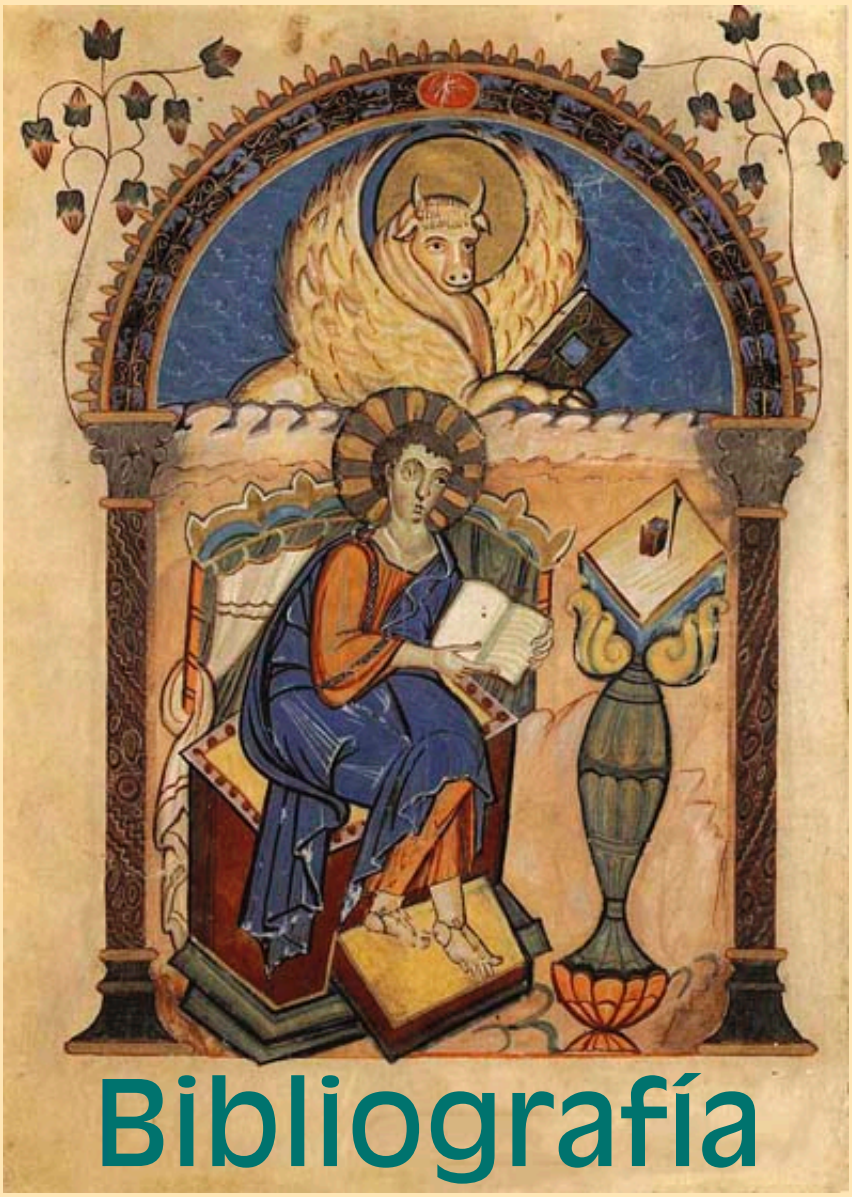
35. Simbolice los enunciados *El autor de La Biblia necesariamente es poderoso*, *El autor de la Biblia posiblemte no es poderoso* de tal manera que ambos puedan ser falsos. De un modelo en que ambos sean falsos.

36. Utilizando el operador de descripción definida represente los siguientes enunciados:

    a) Scott es el hombre que escribió 29 novelas sobre Waverley en total.

    b) El número tal que Scott es el hombre que escribió ese número de novelas sobre Waverley en total es 29.

    ¿Son lógicamente equivalentes?



Bibliografía

Bibliografía

[An21] R. Antonsen, *Logical Methods, The Art of Thinking Abstractly and Mathematically*, Springer-Verlag, Switzerland, 2021.

[BaSie94] F. Baader, J. Siekmann, *Unification theory*. En *Handbook of Logic in artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 2, D. Gabbay, C. Hogger and J. Robinson Eds., 40–125, Oxford University Press, 1994.

[Be12] M. Ben-Ari, *Mathematical Logic for Computer Science*, Third Ed., Springer-Verlag, UK, 2012.

[vBen10] J. van Benthem, *Modal Logic for Open Minds*, CSLI Publications, 2010.

[Bl01] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[BoGe93] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1993.

[Bo97] E. Boerger, E. Graedel, Y. Gurevich, *The Classical Decision Problem*, Springer-Verlag, 1997.

[Bo02] G. Boolos, J. Burguess, R. Jeffery, *Computability and Logic*, Fourth Ed., Cambridge Univ. Press, 2002.

[Br78] J. Bridge, *Beginning Model theory*, Clarendon Press, Oxford, U. K., 1978.

[Ca58] L.Carroll, *Mathematical Recreations of Lewis Carroll, Symbolic Logic, The Game of Logic*, Dover, 1958.

[Che95] B. F. Chellas, *Modal Logic, An Introduction*, Cambridge University Press, 1995.

[Co08] N. Cocchiarella, M. Freund, *Modal Logic*, Oxford University Press, 2008.

[CoLa00] R. Cori, D. Lascar *Mathematical Logic. A Course with Excercises, I*, Oxford University Press, 2000.

[Cu16] D. Cunningham, *Set Theory*, Cambridge University Press, 2016.

[Cu12] D. Cunningham, *A Logical Introduction to Proof*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[Da04] D. Van Dalen, *Logic and Structure*, 4th. Ed., Springer-Verlag, 2004.

[De88] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg, 1888.

[De93] K. Devlin, *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.

[Di75] M. A. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1975.

[Di08] C. Di Prisco, *Teoría de Conjuntos*, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2008, República Bolivariana de Venezuela.

[Eb18] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer Spektrum, Deutschland, 2018.

[EbFlTh21] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Third Ed., Springer-Verlag, Switzerland, 2021.

[Eps06] R. Epstein, *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundation of Logic*, Princeton Univ. Press, 2006.

[FeVi09] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica matemática I: Lógica proposicional, Intuicionista y Modal*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2009.

[FeVi11] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, *Lógica Matemática II Lógica clásica, Intuicionista y Modal*, UAMI, 2011.

[FeVi13] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines I, Universidad Autónoma Metropolitana, 2013.

[FeVi17] M. Fernández De Castro Tapia, L. M. Villegas Silva, Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines II, Universidad Autónoma Metropolitana, 2017.

[Fr70] G. Frege, *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*, en van Heijennort, 1970.

[Fr79] G. Frege, *Begriffschrift*, Halle, Nebert, 1879.

[Gi00] R. Girle, *Modal Logic and Philosophy*, McGill-Queen's University Press, 2000.

[GoJu95] M. Goldstern, H. Judah, *The incompletness Phenomenon: A new course in mathematical Logic*, A. K. Peters, 1995.

[He04] S. Hedman, *A First Course in Logic*, Oxford Univ. Press, 2004.

[He70] J. Heijenoort (ed.) *Frege and Gódel, Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard University Press, 1970.

[Hi05] P. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2005.

[Ho97] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[HuCr96] G. Hughes, E. Cresswell, *M.J. A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, 1996.

[HrJe99] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to Set Theory*, M. Dekker Inc., 3rd Ed., 1999

[Ke71] H. J. Keisler, *Model theory for infinitary logic*, North-Holland, 1971.

[Ko18] R. Kossak, *Mathematical Logic. On Numbers, Sets, Structures and Symmetry*, Springer-Verlag, Switzerland, 2018.

[La19] M. Lawson, *A First Course in Logic*, Taylor & Francis Group, USA, 2019.

[Le02] A. Levy, *Basic Set Theory*, Dover, 2002.

[Lu77] J. Lukasiewicz, *La Silogística de Aristóteles*, Tecnos, 1977

[Ma79] J. Malitz, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, USA, 1978.

[Ma02] D. Marker, *An Introduction to Model Theory*, Springer-Verlag, 2002.

[Me04] E. Mendelson, *An Introduction to Mathematical Logic*, Sixt Ed., Taylor & Francis Group, USA, 2015.

[MeNe96] G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*, North-Holland, 1996.

[Mi00] G. Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic-Plenum Publishers, 2000.

[NeSh94] A. Nerode, R. Shore, *Logic for Applications*, Springer-Verlag, 1994.

[PrDe11] A. Prestel, C. Delzell, *Mathematical Logic and Model Theory*, Springer-Verlag, UK, 2011.

[Pr92] A. Prestel, *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg, 1992.

[Pr01] G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[Qu82] W. V. O. Quine, *Methods of Logic*, Harvard University Press, 1982.

[Ra06] W. Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 2006.

[Ru90] J. E. Rubin, *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Saunders Co. Pub., 1990.

[Ru05] B. Russell, *On Denoting*, Mind, 1905.

[Sh01] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, A. K. Peters, 2001.

[Sm95] R. Smullyan, *First Order Logic*, Dover, 1995.

[ViRoMi00] Luis Miguel Villegas Silva, Favio Ezequiel Miranda Perea, et. al. *Conjuntos y modelos: un curso avanzado*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2000.

[Wa18] A. Wasilewska, *Logics for Computer Science*, Classical and Non-Classical, Springer-Verlag, Switzerland, 2019.

Índices

Índice de símbolos

Índice alfabético

El centro y los cuatro rumbos del mundo
Códice Fejérváry-Mayer

Así lo vinieron a decir,
así lo asentaron en su relato,
y para nosotros lo vinierón a dibujar en sus papeles
los ancianos, las ancianas.
Eran nuestros abuelos, nuestras abuelas,
nuestros bisabuelos, nuestras bisabuelas,
nuestros tatarabuelos, nuestros antepasados.
Se repitió como un discurso su relato,
nos lo dejaron,
y vinieron a legarlo
a quienes ahora vivimos,
a quienes salimos de ellos.
Nunca se perderá, nunca se olvidará,
lo que vinieron a hacer,
lo que vinieron a asentar en las pinturas:
su nombre, su historia, su recuerdo.
Así en el porvenir
jamás perecerá; jamás se olvidará,
siempre lo guardaremos
nosotros, hijos de ellos, los nietos,
hermanos, bisnietos, tataranietos, descendientes.
Quienes tenmos su sangre y color.
Lo vamos a decir, lo vamos a comunicar
a quienes todavía vivirán, habrán de nacer,
los hijos de los mexicas, los hijos de los tenochas.
Y esta relación la guardó Tenochtitlan
cuando vinieron a reinar todos los grandes,
estimables ancianos, los señores y reyes tenochcas.
Esta antigua relación oral,
esta antigua relación pintada en los códices,
nos la dejaron en México,
para ser aquí guardada...
Aquí, tenochcas, aprenderéis cómo empezó
la renombrada, la gran ciudad,
México-Tenochtitlan,
en medio del agua, en el titular,
en el cañaveral, donde vivimos,
donde nacimos,
nosotros los tenochcas.

Crónica mexicáyotl

Dichos

Zuerst Collegium Logicum. Da wird der Geist Euch wohl dressiert, In spanische Stiefeln eingeschnürt, Daßer bedächtiger so fortan Hinschleiche die Gedankenbahn, Und nicht etwa, die Kreuz und Quer, Irrlichteliere hin und her. Dann lehret man Euch manchen Tag, Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag Getrieben, wie Essen und Trinken frei, Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.

J. W. Goethe

Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse.
Wer A sagt, der muß nicht B sagen. Er kann auch erkennen, daß A falsch war.
Das Schlimmste ist nicht: Fehler haben, nicht einmal sie nicht bekämpfen, ist schlimm.
Schlimm ist, sie zu verstecken.
Was sind das für Zeiten, wo ein Gespräch über Bäume fast ein Verbrechen ist, weil es ein Schweigen über so viele Untaten einschließt.

B. Brecht

Die Kommunisten sind keine besondere Partei gegenüber den andern Arbeiterparteien. Sie haben keine von den Interessen des ganzen Proletariats getrennten Interessen. Sie stellen keine sektiererischen Prinzipien auf, wonach sie die proletarische

Bewegung modeln wollen.
Die Kommunisten sind also praktisch der entschiedenste, immer weiter treibende Teil der Arbeiterparteien aller Länder; sie haben theoretisch vor der übrigen Masse des Proletariats die Einsicht in die Bedingungen, den Gang und die allgemeinen Resultate der proletarischen Bewegung voraus.

K. Marx